Univerzitet u Nišu
Prirodno-matematički fakultet
Departman za matematiku

30.06.2022.

PRIJEMNI ISPIT IZ MATEMATIKE SA REŠENJIMA

1. Ako su $a, b \in \mathbb{R}$, odredi sve polinome oblika $P(x) = x^2 + ax + b$ ťako da su a i b obe njegove nule.

   Rešenje: Pretpostavimo da je $P(x) = x^2 + ax + b$ polinom čije su nule a i b. Na osnovu Vijetovih formula dobijamo:
   $$a + b = -a,\ ab = b.$$
   Ako je $b \neq 0$, tada imamo da je $a = 1$ i $b = -2$. Za $b = 0$ dobijamo da je $a = 0$. Dakle, postoje dva polinoma sa traženom osobinom:
   $$P_1(x) = x^2 + x - 2 \text{ i } P_2(x) = x^2.\square$$

2. Odredi sve realne brojeve x za koje su brojevi
   $$\ln 2,\ \ln(2^x - 1),\ \ln(2^x + 3),$$
   uzastopni članovi aritmetičkog niza.

   Rešenje: Primetimo najpre da su sva tri logaritma definisani za $x > 0$.

   Da bi brojevi a, b, c predstavljali tri uzastopna elementa aritmetičkog niza potrebno je i dovoljno da važi $a + c = 2b$. U našem slučaju, to je ekvivalentno sa
   $$\ln 2 + \ln(2^x + 3) = 2\ln(2^x - 1)$$
   tj.
   $$2(2^x + 3) = (2^x - 1)^2.$$
   Dalje, dobijamo
   $$(2^x)^2 - 4 \cdot 2^x - 5 = 0,$$
   što se smenom $2^x = s$ svodi na kvadratnu jednačinu
   $$s^2 - 4s - 5 = 0.$$
   Rešenja ove kvadratne jednačine su $s_1 = 5$ i $s_2 = -1$, ali imajući u vidu smenu $2^x = s > 0$, zaključujemo da je rešenje $s_1 = 5$ tj. $x = \log_2 5$. $\square$

3. Metodom matematičke indukcije dokazati da se za svako $n \in \mathbb{N}$ broj $(1 + \sqrt{5})^n$ može predstaviti u obliku $a + b\sqrt{5}$, za neke prirodne brojeve a i b.

   Rešenje: Označimo sa $P(n)$ tvrdenje: ”postoje prirodni brojevi a_n i b_n tako da $(1 + \sqrt{5})^n = a_n + b_n\sqrt{5}$ ”.

   Za $n = 1$ imamo da $(1 + \sqrt{5})^1 = 1 + \sqrt{5}$, tj. $a_1 = b_1 = 1$.

Pretpostavimo sada da tvrđenje $P(n)$ važi za prirodan broj n, i pokažimo da važi i za $n+1$ tj. da je $P(n+1)$ istinito.

$$\begin{aligned}(1+\sqrt{5})^{n+1} &= (1+\sqrt{5})(1+\sqrt{5})^n\\ &= (1+\sqrt{5})(a_n+b_n\sqrt{5})\\ &= (a_n+5b_n)+(a_n+b_n)\sqrt{5}\\ &= a_{n+1}+b_{n+1}\sqrt{5}.\end{aligned}$$

Kako su a_n i b_n prirodni brojevi (čija egzistencija sledi iz induktivne pretpostavke), onda su i $a_{n+1}=a_n+5b_n$ i $b_{n+1}=a_n+b_n$ takođe prirodni brojevi, te sledi da važi tvrđenje $P(n+1)$.

Dakle, $P(n)$ važi za sve prirodne brojeve n. $\square$

4. Rešiti jednačinu

$$4^{x+1}-2^{2x-1}+3\cdot 7^{x-\frac{1}{2}}=7^{x+\frac{1}{2}}.$$

Rešenje: Primetimo najpre da je jednačina definisana za svako $x\in\mathbb{R}$. Primenom odgovarajućih transformacija dobijamo:

$$\begin{aligned}4^{x+1}-2^{2x-1}+3\cdot 7^{x-\frac{1}{2}}=7^{x+\frac{1}{2}} &\Leftrightarrow 4\cdot 4^x-\frac{1}{2}\cdot 4^x+\frac{3}{\sqrt{7}}\cdot 7^x=\sqrt{7}\cdot 7^x\\ &\Leftrightarrow \left(4-\frac{1}{2}\right)\cdot 4^x=\left(\sqrt{7}-\frac{3}{\sqrt{7}}\right)\cdot 7^x\\ &\Leftrightarrow \frac{7}{2}\cdot 4^x=\frac{4}{\sqrt{7}}\cdot 7^x\\ &\Leftrightarrow \frac{4^x}{7^x}=\frac{8}{7\sqrt{7}}\\ &\Leftrightarrow \left(\frac{4}{7}\right)^x=\left(\frac{4}{7}\right)^{\frac{3}{2}}\\ &\Leftrightarrow x=\frac{3}{2}.\end{aligned}$$

Dakle, jednačina ima jedno rešenje $x=\frac{3}{2}$.$\square$

5. Rešiti nejednačinu

$$\log_x\frac{x+15}{x-1}>1.$$

Rešenje: Nejednačina je definisana za ono x koje zadovoljava sledeća tri uslova:

$$x>0,\ x\neq 1,\ \frac{x+15}{x-1}>0$$

tj.

$$x\in(1,+\infty).$$

Dalje, nejedanačina je ekvivalentna sa nejednačinom

$$\log_x \frac{x+15}{x-1} > \log_x x,$$

koja se imajući u vidu da je $x \in (1, +\infty)$, svodi na nejednačinu

$$\frac{x+15}{x-1} > x,$$

tj. kvadratnu nejednačinu

$$x^2 - 2x - 15 < 0.$$

Rešenje ove nejednačine je $x \in (-3, 5)$, ali imajući u vidu oblast definisanosti polazne nejednačine dobijamo da je njeno rešenje $x \in (1, 5)$.$\square$

6. Rešiti jednačinu

$$\sqrt{3} \sin 2x - 2\cos^2 x = 1.$$

Rešenje: Jednačina je definisana za $x \in \mathbb{R}$ i ekvivalentna sa jednačinom

$$2\sqrt{3} \sin x \cos x - 2\cos^2 x = \sin^2 x + \cos^2 x,$$

tj.

$$\sin^2 x - 2\sqrt{3} \sin x \cos x + 3\cos^2 x = 0.$$

Proverom dobijamo da x za koje je $\cos x = 0$ nije rešenje polazne jednačine, te datu jednačinu možemo podeliti sa $\cos^2 x$ i dobijamo:

$$\begin{aligned} \sin^2 x - 2\sqrt{3} \sin x \cos x + 3\cos^2 x = 0 &\Leftrightarrow \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} - 2\sqrt{3}\frac{\sin x}{\cos x} + 3 = 0 \\ &\Leftrightarrow \mathrm{tg}^2 x - 2\sqrt{3}\mathrm{tg} x + 3 = 0 \\ &\Leftrightarrow (\mathrm{tg} x - \sqrt{3})^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow \mathrm{tg} x = \sqrt{3} \\ &\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Dakle, rešenje jednačine je $x = \frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$. $\square$

7. Zapremina zarubljene kupe je $1040\pi cm^3$. Njena visina je $15cm$, a razlika poluprečnika osnova je $8cm$. Odrediti poluprečnike osnove i površinu ove zarubljene kupe.

Rešenje: Neka su R i r poluprečnici veće i manje osnove redom, H visina, s izvodnica, P površina i V zapremina zarubljene kupe. Iz uslova zadatka imamo da je

$$V = 1040\pi cm^3, \; R - r = 8cm \text{ i } H = 15cm.$$

Dalje je,

$$\begin{aligned} 1040\pi cm^3 &= \frac{\pi H}{3}(R^2 + Rr + r^2) \\ &= 5\pi((r+8)^2 + (r+8)r + r^2) \\ &= 5\pi(3r^2 + 24r + 64), \end{aligned}$$

tj.

$$r^2 + 8r - 48 = 0.$$

Rešenja ove jednačine su $r = 4$ i $r = -12$, ali kako je drugo rešenje manje od nule dobijamo $r = 4cm$. Sada imamo da je $R = r + 8 = 12cm$ i $s = \sqrt{H^2 + (R - r)^2} = 17cm$. Konačno,

$$P = \pi(R^2 + r^2 + s(R + r)) = 432\pi cm^2.\square$$

8. Odrediti sve kompleksne brojeve z koji zadovoljavaju jednačinu

$$|z| + z = 2 + i.$$

Rešenje: Neka je $z = x + iy$. Kako iz date jednakosti sledi jednakost realnih i imaginarnih delova leve i desne strane, dobijamo da je $y = 1$ i $\sqrt{1 + x^2} + x = 2$. Ako u poslednjoj jednačini prebacimo x na desnu stranu i kvadriramo, dobićemo da je $x = \frac{3}{4}$, tj. $z = \frac{3}{4} + i$. $\square$

9. Visina i težišna linija konstruisane iz temena C trougla ABC, dele ugao trougla kod temena C na tri jednaka dela. Odrediti uglove trougla ABC.

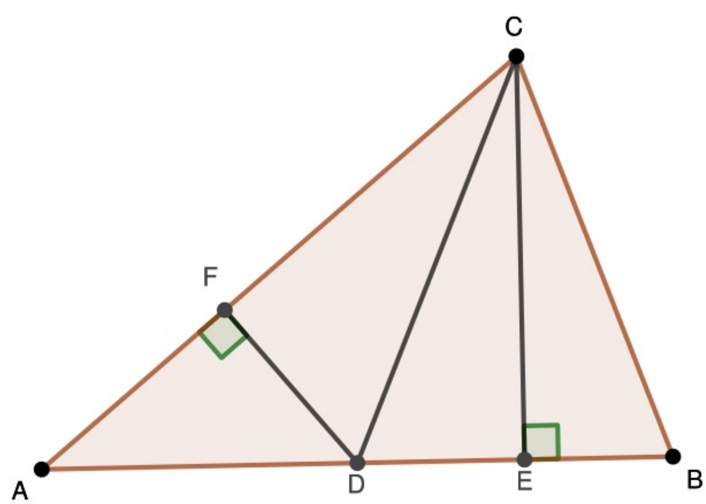
Rešenje: Neka je D središte stranice AB trougla $\triangle ABC$, a E podnožje visine iz temena C (tj. neka važi raspored tačaka $A - D - E - B$ gde su D i E podnožja visine i težišne duži u zavisnosti kojim redom padaju na stranicu AB). Neka je još F podnožje visine iz temena D trougla ADC. Po uslovima zadatka važi da je $\angle BCE = \angle DCE = \angle DCF$. Iz uslova zadatka i toga što su uglovi $\angle BEC$, $\angle DEC$ i $\angle DFC$ pravi, zaključujemo da trouglovi $\triangle BEC$, $\triangle DEC$ i $\triangle DFC$ imaju iste uglove tj. da su slični. Sada iz činjenica da trouglovi $\triangle BEC$ i $\triangle DEC$, odnosno $\triangle DEC$ i $\triangle DFC$ imaju po jednu zajedničku stranicu, sledi

$$\triangle BEC \cong \triangle DEC \cong \triangle DFC.$$

Dakle,

$$BE = DE = DF.$$

Kako je D središte stranice AB, zaključujemo da važi $AD = 2DF$. Ugao $\angle DFA$ je prav, te je $\angle BAC = 30°$, a $\angle ADF = 60°$. Dalje, iz jednakosti uglova $\angle EDC$ i $\angle FDC$ zaključujemo da je $\angle EDC = \angle FDC = 60°$. Iz $\angle ABC = \angle EDC$ sledi $\angle ABC = 60°$, a $\angle ACB = 90°$.



$\square$

10. U razvoju binoma

$$\left(\frac{2}{\sqrt[3]{a}} - a^2\right)^{11}, \qquad a \neq 0$$

odrediti koeficijent uz a^8.

Rešenje: Kako je

$$\left(\frac{2}{\sqrt[3]{a}} - a^2\right)^{11} = \sum_{k=0}^{11} \binom{11}{k} (\frac{2}{\sqrt[3]{a}})^k (-a^2)^{11-k} = \sum_{k=0}^{11} \binom{11}{k} 2^k (-1)^{11-k} a^{22-2k-\frac{k}{3}},$$

da bismo odredili koeficijent uz a^8 potrebno je rešiti jednačinu:

$$22 - 2k - \frac{k}{3} = 8.$$

Očigledno $k = 6$, te je koeficijent uz a^8 jednak $-64\binom{11}{6}$. $\square$