PRIRODNO – MATEMATIČKI FAKULTET U NIŠU
DEPARTMAN ZA RAČUNARSKE NAUKE

Utorak, 28.06.2022. godine

PRIJEMNI ISPIT IZ MATEMATIKE

Rešenja zadataka

1. Odrediti opšti član aritmetičkog niza ako je njegov peti član jednak 19, a deseti jednak 39.

Rešenje:

Neka $\{a_n\}_{n\in N}$ traženi aritmetički niz i d razlika uzastopnih elemenata tog niza. Tada je $a_{10} = a_5 + 5d$, pa je $5d = a_{10} - a_5 = 20$, tj. $d = 4$. Dalje je $a_1 = a_5 - 4d = 3$, a onda je opšti član niza

$$a_n = a_1 + (n-1)d = 3 + 4(n-1) = 4n - 1$$

2. Data je kvadratna jednačina

$$2x^2 - 5x + 3 = 0$$

Ne rešavajući jednačinu izračunati vrednost izraza

$$\frac{x_1^2}{x_2} - \frac{x_2^2}{x_1}$$

Rešenje:

Primenom Viete – ovih pravila dobijamo $x_1 + x_2 = \frac{5}{2}$ i $x_1x_2 = \frac{3}{2}$.

Dati izraz transformišemo na sledeći način:

$$\frac{x_1^2}{x_2} - \frac{x_2^2}{x_1} = \frac{x_1^3 - x_2^3}{x_1x_2} = \frac{(x_1 - x_2)(x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2)}{x_1x_2}$$

Uz to,

$$x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = \frac{25}{4} - 3 = \frac{13}{4}$$

i

$$(x_1 - x_2)^2 = (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 = \frac{25}{4} - 6 = \frac{1}{4}$$

Ovde treba primetiti da znak tražene vrednosti izraza zavisi od toga koje rešenje je veće.
Ako je $x_1 \geq x_2$, onda je

$$\frac{x_1^2}{x_2} - \frac{x_2^2}{x_1} = \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{13}{4} + \frac{3}{2}\right)}{\frac{3}{2}} = \frac{19}{12}$$

a ako je $x_1 < x_2$

$$\frac{x_1^2}{x_2} - \frac{x_2^2}{x_1} = -\frac{19}{12}$$

3. U skupu realnih brojeva rešiti jednačinu:

$$\sin^3 x + \cos^3 x = 1 - \tfrac{1}{2}\sin 2x.$$

Rešenje:

$$\begin{aligned}
&\sin^3 x + \cos^3 x = 1 - \frac{1}{2}\sin 2x \Leftrightarrow \\
&(\sin x + \cos x)(\sin^2 x - \sin x \cos x + \cos^2 x) = 1 - \sin x \cos x \Leftrightarrow \\
&(\sin x + \cos x)(1 - \sin x \cos x) = 1 - \sin x \cos x
\end{aligned}$$

Ako je $1 - \sin x \cos x \neq 0$, jednačina dobija oblik

$$\begin{aligned}
&\sin x + \cos x = 1 \Leftrightarrow \\
&2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} + \cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2} = \sin^2\frac{x}{2} + \cos^2\frac{x}{2} \Leftrightarrow \\
&2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} = 2\sin^2\frac{x}{2}
\end{aligned}$$

Ako je $\sin\frac{x}{2} \neq 0$, onda poslednja jednačina postaje

$$\cos\frac{x}{2} = \sin\frac{x}{2}$$

tj. $\frac{x}{2} = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in Z$, odnosno $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in Z$.
Za $\sin\frac{x}{2} = 0$, dobijamo $x = 2k\pi, k \in Z$

Slučaj $1 - \sin x \cos x = 0$, nije moguć jer bi tada važilo

$$\sin x \cos x = 1 \Leftrightarrow 2\sin x \cos x = 2 \Leftrightarrow \sin 2x = 2$$

4. U skupu realnih brojeva rešiti nejednačinu:

$$\log_{\frac{1}{2}}(x^2 - x - 2) \geq -2.$$

Rešenja:

Da bi logaritam bio definisan, neophodno je da važi

$$\begin{aligned}
&x^2 - x - 2 > 0 \Leftrightarrow \\
&(x-2)(x+1) > 0 \Leftrightarrow \\
&x \in (-\infty, -1) \cup (2, \infty)
\end{aligned}$$

Transformacijom nejednačine, a kako je osnova manja od 1, dobijamo

$$\begin{aligned}
&x^2 - x - 2 \leq 4 \Leftrightarrow \\
&(x+2)(x-3) \leq 0 \Leftrightarrow \\
&x \in [-2,3]
\end{aligned}$$

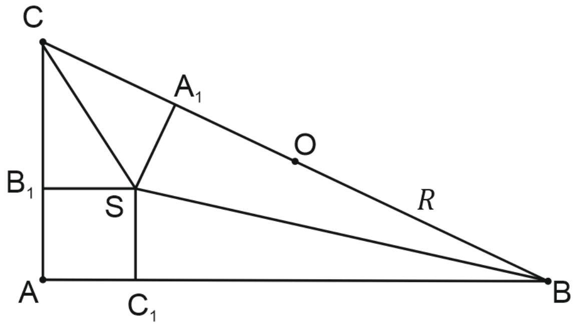
Konačno, skup rešenja date nejednačine je presek dva pomenuta skupa, tj.

$$x \in [-2, -1) \cup (2,3]$$

5. Dat je pravougli trougao. Poluprečnik opisanog kruga je $R = 15$,a poluprečnik upisanog kruga je $r = 6$. Izračunati površinu i obim ovog trougla.

Rešenje:

Centar opisanog krupa kod pravouglog trougla se nalazi na sredini hipotenuze. Neka su tačke obeležene kao na slici – O je centar opisanog kruga, S centar upisanog kruga, a tačke A_1, B_1 i C_1 su podnožja normala iz tačke S na stranice BC, CA i AB, redom.



Očigledno je $BC = 2R$. Takođe, lako dokazujemo $\Delta A_1CS \cong \Delta B_1CS$ i $\Delta A_1BS \cong \Delta C_1BS$.

Obim trougla je

$$O_{\Delta \mathrm{ABC}} = AB + BC + CA = AC_1 + C_1B + BC + CB_1 + B_1A$$
$$= r + BA_1 + 2R + CA_1 + r = 2r + 4R = 72$$

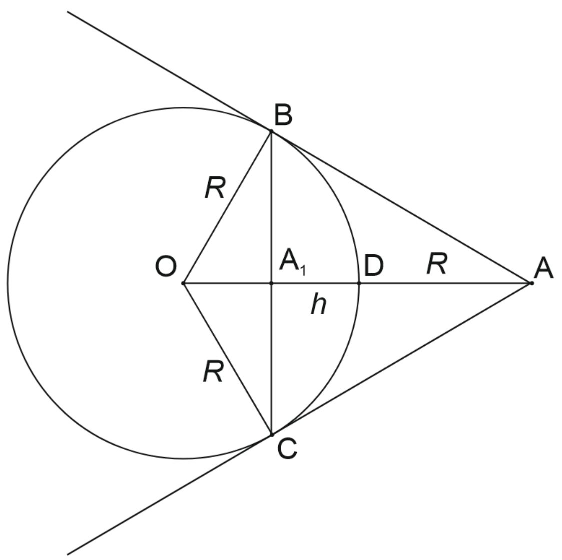
Uočimo da je $P_{\Delta \mathrm{BCS}} = \frac{BC \cdot A_1S}{2} = \frac{2Rr}{2}$. Odatle je

$$P_{\Delta \mathrm{ABC}} = P_{\Delta BCS} + P_{\Delta B_1SC} + P_{\Delta C_1SB} + P_{AC_1SB_1} = 2P_{\Delta BCS} + r^2 = 2Rr + r^2 = 216$$

6. Tačkasti izvor svetlosti je udaljen $4m$ od centra lopte poluprečnika R = $2m$. Kolika je površina osvetljenog dela lopte (površina kalote je $2\pi Rh$, gde je R poluprečnik lopte, a h visina kalote)?

Rešenje:

Neka su tačke obeležene kao na slici (slika je projekcija na ravan koja prolazi kroz centar lopte i dati izvor svetlosti).



Da bi odredili traženu površinu, potrebno nam je da odredimo visinu kalote $A_1D = h$.

Korišćenjem Pitagorine teoreme na trougao ΔOAB dobijamo

$$AB = \sqrt{OA^2 - OB^2} = R\sqrt{3}$$

Površinu trougla ΔOAB možemo da izrazimo na dva načina, pa dobijamo

$$OB \cdot AB = OA \cdot A_1B$$

a odatle zaključujemo

$$A_1B = \frac{R\sqrt{3}}{2}$$

Primenom Pitagorine teoreme na trougao ΔOA_1B dobijamo

$$OA_1 = \sqrt{OB^2 - A_1B^2} = \frac{R}{2}$$

Konačno

$$h = A_1D = OD - OA_1 = R - \frac{R}{2} = \frac{R}{2}$$

i tražena površina je

$$P = 2\pi Rh = R^2\pi = 4\pi\ m^2$$