Универзитет у Нишу
Природно-математички факултет
Департман за математику

12.07.2023.

ЗАДАЦИ СА РЕШЕЊИМА ПРИЈЕМНОГ ИСПИТА ИЗ МАТЕМАТИКЕ

Додатни термин - Јул 2023

1. Упростити израз:

$$\frac{a+b}{a-b}-\frac{a-b}{a+b}-\frac{4ab}{a^2-b^2}, \quad a \neq b,\ a \neq -b.$$

Решење. Довођењем разломака на заједнички именилац добијамо

$$\begin{aligned}\frac{a+b}{a-b}-\frac{a-b}{a+b}-\frac{4ab}{a^2-b^2} &= \frac{(a+b)^2-(a-b)^2-4ab}{a^2-b^2}\\ &= \frac{a^2+2ab+b^2-a^2+2ab-b^2-4ab}{a^2-b^2}=\frac{4ab-4ab}{a^2-b^2}=0.\end{aligned}$$

2. Решити једначину:

$$|x-2|-|1-x|=4x+2.$$

Решење. Разликујемо три случаја:

1) $x \in (-\infty, 1]$. У овом случају полазна једначина постаје $4x=-1$ тј. $x=-\frac{1}{4}$ што је и решење полазне једначине.

2) $x \in (1,2]$. У овом случају полазна једначина постаје $6x=1$ тј. $x=\frac{1}{6}$ што није решење полазне једначине јер $\frac{1}{6}$ не припада интервалу $(1,2]$.

3) $x \in (2,+\infty)$. У овом случају полазна једначина постаје $4x=-3$ тј. $x=-\frac{3}{4}$ што није решење полазне једначине јер $-\frac{3}{4}$ не припада интервалу $(2,+\infty)$.

Дакле, једино решење полазне једначине је $x=-\frac{1}{4}$.

3. Одредити a и b тако да је остатак при дељењу полинома $P(x)=x^4+3x^3-x^2+ax+b$ полиномом $Q(x)=x^2+3x+1$ једнак $R(x)=2x$.

Решење. Дељењем полинома $P(x)$ полиномом $Q(x)$ добија се количник $S(x)=x^2-2$ и остатак $R(x)=(a+6)x+b+2$. Како је остатак $R(x)=2x$, следи да је $a+6=2$ и $b+2=0$, тј. $a=-4$ и $b=-2$.

4. Одредити реалан параметар m тако да збир квадрата решења једначине $x^2-mx+5=0$ буде једнак 15.

Решење. Нека су x_1 и x_2 решења дате квадратне једначине. Из Вијетових формула следи $x_1+x_2=m$ и $x_1 \cdot x_2=5$. Како је $x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2$, а из услова задатка је $x_1^2+x_2^2=15$, следи да је $15=m^2-2\cdot 5$, тј. $m^2=25$. Дакле, решења су $m=\pm 5$.

5. Решити једначину:
$$\cos 2x - \cos 8x + \cos 6x = 1.$$

Решење. Применом адиционих формула за збир и разлику косинуса, као и за косинус двоструког угла, добија се следећи низ еквивалентних једначина:

$$\begin{aligned}
\cos 2x - \cos 8x + \cos 6x = 1 \quad &\Leftrightarrow \quad 2\cos 4x \cos 2x - \cos 8x = 1\\
&\Leftrightarrow \quad 2\cos 4x \cos 2x - \cos^2 4x + \sin^2 4x = \cos^2 4x + \sin^2 4x\\
&\Leftrightarrow \quad \cos 4x \cos 2x - \cos^2 4x = 0\\
&\Leftrightarrow \quad \cos 4x(\cos 2x - \cos 4x) = 0\\
&\Leftrightarrow \quad 2\cos 4x \sin 3x \sin x = 0.
\end{aligned}$$

Из последње једначине следи

$$\cos 4x = 0 \ \vee \ \sin 3x = 0 \ \vee \ \sin x = 0$$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \quad 4x = \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in Z \ \vee \ 3x = l\pi,\ l \in Z \ \vee \ x = m\pi,\ m \in Z\\
&\Leftrightarrow \quad x = \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{4}\,,\ k \in Z \ \vee \ x = \frac{l\pi}{3}\,,\ l \in Z \ \vee \ x = m\pi,\ m \in Z.
\end{aligned}$$

6. Решити једначину:
$$\log_3(4^x - 3) + \log_3(4^x - 1) = 1.$$

Решење. Дата логаритамска једначина дефинисана је за

$$4^x - 3 > 0 \quad \wedge \quad 4^x - 1 > 0 \quad \Leftrightarrow \quad 4^x > 3 \quad \Leftrightarrow \quad x > \log_4 3\,,$$

и може се записати у облику

$$\begin{aligned}
\log_3(4^x - 3)(4^x - 1) = \log_3 3 \quad &\Leftrightarrow \quad (4^x - 3)(4^x - 1) = 3\\
&\Leftrightarrow \quad 4^{2x} - 4 \cdot 4^x + 3 - 3 = 0\\
&\Leftrightarrow \quad 4^x(4^x - 4) = 0\\
&\Leftrightarrow \quad 4^x = 0 \ \vee \ 4^x = 4 \quad \Leftrightarrow \quad x = 1\,.
\end{aligned}$$

Како је $x = 1 > \log_4 3$, то је $x = 1$ једино решење дате једначине.

7. Решити једначину:
$$10 \cdot 4^x - 29 \cdot 10^x + 10 \cdot 25^x = 0.$$

Решење. Дељењем дате једначине са 25^x (смемо да делимо јер је увек $25^x > 0$) добијамо еквивалентне једначине

$$10\frac{4^x}{25^x} - 29\frac{2^x 5^x}{25^x} + 10 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad 10\left(\frac{2}{5}\right)^{2x} - 29\left(\frac{2}{5}\right)^{x} + 10 = 0.$$

Увођењем смене $t = \left(\frac{2}{5}\right)^x$, добијамо квадратну једначину $10t^2 - 29t + 10 = 0$ чија су решења $t = \frac{2}{5}$ и $t = \frac{5}{2}$. Тада су тражена решења $x = 1$ и $x = -1$.

8. Странице правоугаоника се разликују за 6. Ако већу умањимо за 2, а мању увећамо за 5, површина правоугаоника ће бити већа за 32. Одредити те странице.

   Решење.

   Уколико странице правоугаоника обележимо са a и b а његову површину са P, а странице новонасталог правоугаоника са a_1 и b_1 и његову површину са P_1, из услова задатка добијамо $a - b = 6, \quad a_1 = a - 2, \quad b_1 = b + 5, \quad P_1 = P + 32$. Односно

   $$P_1 = P + 32 \quad \Longrightarrow \quad a_1 \cdot b_1 = a \cdot b + 32 \quad \Longrightarrow \quad (a-2)(b+5) = ab + 32 \quad \Longrightarrow \quad 5a - 2b = 42.$$

   Решавањем линеарног система једначина $a - b = 6,\ 5a - 2b = 42$ налазимо да је $a = 10$ и $b = 4$.

9. Наћи запремину ваљка површине $180\pi\, cm^2$ ако је разлика висине и полупречника основе $3\, cm$.

   Решење. Из услова задатка имамо $H - r = 3\, cm \ \Rightarrow \ H = r + 3$ и $180\pi = 2r^2\pi + 2r\pi H$ односно

   $$180 = 2r^2 + 2r(r+3) \quad \Longrightarrow \quad 2r^2 + 3r - 90 = 0 \quad \Longrightarrow \quad r = 6\, cm \quad \wedge \quad H = 9\, cm.$$

   Тада је запремина ваљка $V = r^2\pi H = 324\pi\, cm^3$.

10. Ако је збир три узастопна члана растућег аритметичког низа једнак 15, а збир њихових квадрата једнак 93, одредити те чланове.

    Решење. Нека су $a - d$, a и $a + d$ три узастопна члана аритметичког низа. Тада је $(a-d) + a + (a+d) = 15$, односно $3a = 15$, па је $a = 5$.

    Збир њихових квадрата је 93, па је $93 = (a-d)^2 + a^2 + (a+d)^2 = 3a^2 + 2d^2$. Заменом $a = 5$, следи $d^2 = 9$. Могућа решења за d су $d = 3$ и $d = -3$. Како је дати аритметички низ растући, d мора бити веће од нуле, па је једино решење $d = 3$. Дакле, тражени чланови су 2, 5 и 8.