UNIVERZITET U NIŠU
PRIRODNO – MATEMATIČKI FAKULTET
DEPARTMAN ZA RAČUNARSKE NAUKE
PETAK, 28.06.2024.

REŠENJA ZA TEST IZ MATEMATIKE

1. Rešenje:

$\frac{6-x}{3-x} < -2$ je ekvivalentno sa

$$\frac{6-x}{3-x} + 2 < 0$$

$$\frac{6-x+2(3-x)}{3-x} < 0$$

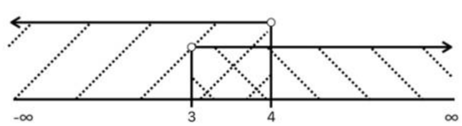
$$\frac{6-x+6-2x}{3-x} < 0$$

$$\frac{12-3x}{3-x} < 0$$

I opcija

$$12 - x > 0 \quad \wedge \quad 3 - x < 0$$

$$x < 12 \quad \wedge \quad x > 3$$

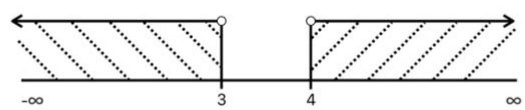


$x \in (3,4) \rightarrow$ konačno rešenje.

II opcija

$$12 - x < 0 \quad \wedge \quad 3 - x > 0$$

$$x > 12 \quad \wedge \quad x < 3$$



Nema rešenja – prazan skup

2. Rešenje:

$$2^{x-1} - 2^{x-3} = 3^{x-2} - 3^{x-3}$$

$$2^{x-3}(2^2 - 1) = 3^{x-3}(3 - 1)$$

$2^{x-3} \cdot 3 = 3^{x-3} \cdot 2$ i deljenjem obe strane sa $2^{x-3} \neq 0$ dobijamo

$\frac{3^{x-3}}{2^{x-3}} = \frac{3}{2}$, odakle zaključujemo da je $x - 3 = 1,\ pa\ je\ x = 4.$

3. Rešenje:

$$\tan(4\alpha) - \frac{1}{\cos(4\alpha)} = \frac{\sin(4\alpha)}{\cos(4\alpha)} - \frac{1}{\cos(4\alpha)} = \frac{\sin(4\alpha) - 1}{\cos(4\alpha)} = \frac{2\sin(2\alpha)\cos(2\alpha) - 1}{\cos^2(2\alpha) - \sin^2(2\alpha)} =$$

$$= \frac{2\sin(2\alpha)\cos(2\alpha) - (\cos^2(2\alpha) + \sin^2(2\alpha))}{(cos(2\alpha) - sin(2\alpha))(cos(2\alpha) + sin(2\alpha))} = \frac{-(-2\sin(2\alpha)\cos(2\alpha) + \cos^2(2\alpha) + \sin^2(2\alpha))}{(cos(2\alpha) - sin(2\alpha))(cos(2\alpha) + sin(2\alpha))}$$

$$= \frac{-(cos(2\alpha) - sin(2\alpha))^2}{(cos(2\alpha) - sin(2\alpha))(cos(2\alpha) + sin(2\alpha))} = \frac{-(cos(2\alpha) - sin(2\alpha))}{(cos(2\alpha) + sin(2\alpha))} = \frac{sin(2\alpha) - cos(2\alpha)}{sin(2\alpha) + cos(2\alpha)} \quad .$$

4. Rešenje:
   Da bi broj bio deljiv sa 5, mora da se završava brojem 0 ili 5. Četvorocifrenih brojeva sa različitim ciframa koji se završavaju nulom ima ukupno $9 \cdot 8 \cdot 7$. Četvorocifrenih brojeva sa različitim ciframa koji se završavaju peticom ima ukupno $8 \cdot 8 \cdot 7$, jer prva cifra ne može biti 0. Dakle ukupno ih ima
   $9 \cdot 8 \cdot 7 + 8 \cdot 8 \cdot 7 = 952$.

5. Rešenje:

   Pošto je ostatak pri deljenju polinoma $P1$ sa $x^2 - 1$ jednak x, polinom $P1$ možemo napisati u obliku $P1 = Q1 \cdot (x^2 - 1) + x$, gde je $Q1$ polinom koji je količnik dobijen pri deljenju $P1$ sa $x^2 - 1$. Na isti način $P2 = Q2 \cdot (x^2 - 1) + (x + 2)$, pri čemu je $Q2$ količnik pri deljenju polinoma $P2$ sa $x^2 - 1$. Prema tome proizvod možemo napisati u obliku:

$$P1 \cdot P2 = (Q1 \cdot (x^2 - 1) + x) \cdot [Q2 \cdot (x^2 - 1) + (x + 2)]$$
$$= Q1 \cdot Q2 \cdot (x^2 - 1)^2 + Q1 \cdot (x^2 - 1)(x + 2) + x \cdot Q2 \cdot (x^2 - 1) + x \cdot (x + 2)$$
$$= (x^2 - 1) \cdot (Q1 \cdot Q2 \cdot (x^2 - 1) + Q1 \cdot (x + 2) + Q2 \cdot x) + x^2 + 2x$$
$$= (x^2 - 1) \cdot (Q1 \cdot Q2 \cdot (x^2 - 1) + Q1 \cdot (x + 2) + Q2 \cdot x) + x^2 - 1 + 1 + 2x$$
$$= (x^2 - 1) \cdot (Q1 \cdot Q2 \cdot (x^2 - 1) + Q1 \cdot (x + 2) + Q2 \cdot x + 1) + 2x + 1.$$

To znači da se proizvod $P1 \cdot P2$ može napisati u obliku
$P1 \cdot P2 = (x^2 - 1) \cdot Q + 2x + 1$,
gde je $Q = Q1 \cdot Q2 \cdot (x^2 - 1) + Q1 \cdot (x + 2) + Q2 \cdot x + 1$, te je ostatak pri deljenju polinoma $P1 \cdot P2$ sa $(x^2 - 1)$ jednak $\mathbf{2x + 1}$.

6. Rešenje:

Koeficijent pravca prave MN je

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{0 - 2}{-2 - 4} = \frac{1}{3}$$

Kako je simetrala normalna na duž MN, koeficijent pravca simetrale k_s zadovoljava:

$$k \cdot k_s = -1$$

Dakle, $k_s = -3$. Simetrala prolazi kroz tačku $O(x_O, y_O)$ koja je na sredini duži MN, odakle je:

$$(x_O, y_O) = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right) = \left(\frac{4 + (-2)}{2}, \frac{2 + 0}{2}\right) = (1,1)$$

Jednačina prave kroz tačku O sa koeficijentom k_s je:

$$y - y_O = k_s(x - x_O).$$

Dakle, jednačina prave je

$$y - 1 = -3(x - 1).$$

Odnosno,

$$\boldsymbol{y = -3x + 4}.$$