

Kosokutan trokut

Poučci o trokutu i veza između sinusa i kosinusa

Marko Obradović

profesor matematike u srednjoj školi „Marko Marulić“ u Slatini

omegaobradovic@gmail.com

Mirko Radić

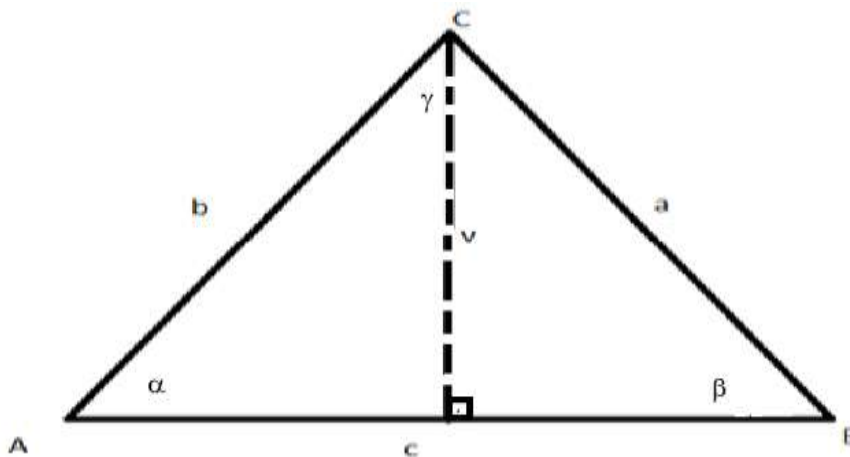
profesor emeritus na Filozofskom fakultetu u Rijeci

mradic@ffri.hr

1. UVOD

Osnovni elementi trokuta su njegovi kutovi i stranice. Jedna od veza između stranica i kutova u trokutu iskazana je poučkom o sinusima i poučkom o kosinusu. Što je s njihovom povezanošću? Matematičare je to zanimalo još od davnine. Naime, "riješiti trokut" znači iz zadanih podataka odrediti njegove nepoznate elemente. Odavde je iznimna važnost navedenih poučaka.

Nacrtajmo bilo koji trokut ABC i označimo njegove elemente kao na slici. Svakako je uz izvođenja korisno imati i jasnu geometrijsku predodžbu.



Koristit ćemo sljedeće standardne oznake: a, b, c – duljine stranica trokuta; α, β, γ – njegovi odgovarajući kutovi; R – polumjer opisane mu kružnice; P – njegova površina.

Još iz osnovne škole znamo da je trokut zadan svojim elementima i to:

- (a) jedna stranica i dva kuta;
- (b) dvije stranice i kut nasuprot većoj od njih;
- (c) dvije stranice i kut između njih;
- (d) tri stranice.

U slučajevima (a) i (b) koristimo poučak o sinusima, a u slučajevima (c) i (d) kosinsov poučak. Koristit ćemo poznate identitete:

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ = \pi,$$

$$(1^\circ) \sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta,$$

$$(2^\circ) \cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta.$$

Promatrat ćemo vezu između poučaka (1) i (2).

(1) Poučak o sinusima,

$$\frac{\sin \alpha}{a} = \frac{\sin \beta}{b} = \frac{\sin \gamma}{c} = \frac{1}{2R} = K$$

(2) Poučak o kosinusu,

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha.$$

Cikličkom zamjenom dobivamo još dvije pridružene formule.

Razmotrimo sada vezu između tih poučaka. Pokažimo najprije kako iz (1) dobivamo (2).

Iz (1) imamo: $\frac{\sin \alpha}{a} = K$ tj. $aK = \sin \alpha$, odnosno, $bK = \sin \beta$, $cK = \sin \gamma$.

Kvadriranjem dobivamo

$$K^2 a^2 = \sin^2 \alpha = \sin^2(\beta + \gamma),$$

jer je $\sin(\beta + \gamma) = \sin(\pi - \alpha) = \sin \alpha$. Upotrebom teorema (1⁰) za sinus dobivamo:

$$\begin{aligned} K^2 a^2 &= (\sin \beta \cos \gamma + \cos \beta \sin \gamma)^2 \\ &= \sin^2 \beta \cos^2 \gamma + \cos^2 \beta \sin^2 \gamma + 2 \sin \beta \sin \gamma \cos \beta \cos \gamma \\ &= \sin^2 \beta (1 - \sin^2 \gamma) + (1 - \sin^2 \beta) \sin^2 \gamma + 2 \sin \beta \sin \gamma \cos \beta \cos \gamma \\ &= \sin^2 \beta + \sin^2 \gamma - 2 \sin \beta \sin \gamma (\sin \beta \sin \gamma - \cos \beta \cos \gamma) \\ &= K^2 (b^2 + c^2) - 2K^2 bc (-\cos(\beta + \gamma)) \\ &= K^2 (b^2 + c^2 - 2bc \cos(\pi - (\beta + \gamma))) \\ &= K^2 (b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha). \end{aligned}$$

Kako je $K \neq 0$ dobivamo poučak (2) o kosinusu:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha.$$

Cikličkom zamjenom imamo i njoj srodne dvije formule.

Pokažimo da vrijedi i obrat. Neka vrijedi (2), odnosno ciklički srodna formula

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \beta. \quad (3)$$

Iz $\cos \alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$, $\cos \beta = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$ dobivamo

$$\frac{\sin^2 \alpha}{\sin^2 \beta} = \frac{1 - \cos^2 \alpha}{1 - \cos^2 \beta} = \frac{1 - \left(\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}\right)^2}{1 - \left(\frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}\right)^2} = \frac{a^2}{b^2} \cdot \frac{4b^2c^2 - (b^2 + c^2 - a^2)^2}{4a^2c^2 - (a^2 + c^2 - b^2)^2} = \dots = \frac{a^2}{b^2},$$

odakle je $\frac{\sin \alpha}{a} = \frac{\sin \beta}{b}$, što smo i trebali pokazati. Analogno slijedi $\frac{\sin \alpha}{a} = \frac{\sin \beta}{b} = \frac{\sin \gamma}{c}$, a to je *poučak o sinusima* (1).

Primjer. Duljine dviju stranica u trokutu ABC iznose 5 cm i 8 cm, a kut nasuprot jedne od tih dviju je dva puta je manji od kuta nasuprot druge. Kolika je duljina treće stranice ovog trokuta?

Ne smanjujući općenitost možemo uzeti da je $a = 5$ cm, $b = 8$ cm, te $\beta = 2\alpha$. Iz poučka o sinusima (1) imamo $a : b = \sin \alpha : 2 \sin \alpha \cos \alpha$ odnosno, $\cos \alpha = \frac{4}{5}$, $\sin \alpha = \frac{3}{5}$. Iz

$$\beta = 2\alpha \text{ imamo } \sin \beta = \sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha = \frac{24}{25}, \cos \beta = \frac{7}{25}. \text{ Zatim,}$$

$$\cos \gamma = \cos(\pi - (\alpha + \beta)) = -\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta = \frac{44}{125}.$$

Konačno je $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma = \left(\frac{39}{5}\right)^2$, odakle je $c = 7.8$ cm.

2. NEKE CRTICE IZ PROŠLOSTI:

Matematika se tokom svoje povijesti nije mogla odvojiti od astronomije. Prva trigonometrijska računanja javljaju se vrlo rano, još u starom Babilonu i Egiptu, i to u astronomiji.

Začetnici trigonometrije su Grci u 3. st. pr. Krista. Prve tablice, nalik tablicama *sinus* funkcije, sastavili su Indi u 5. st. pr. Krista.

Kroz povijest matematičari su na razne načine pokušavali naći vezu poučaka (1) i (2). Poučak o sinusima opisao je persijski matematičar Abu Al-Wafa (940-998).

F. Viète (1540 – 1603) je izveo poučak o kosinusu u današnjem obliku. Povezao je trigonometriju s algebrom. Matematičari koji su pridonijeli procvatu trigonometrije bili su: J. Napier, L. Euler, K. F. Gauss, R. Bošković, ...

3. ZADACI (ZA VJEŽBU):

- 1) Odredi nepoznate elemente u trokutu, ako je zadano: $a = 42$ cm, $b = 37.1$ cm, kut $\gamma = 67^\circ 19'$.
- 2) Ako je zbroj duljina dviju stranica $a + b = 85$ cm, duljina polumjera trokutu upisane kružnice 9.6 cm, te $\gamma = 46^\circ 12'$, odredi površinu tog trokuta.
- 3) Odredi nepoznate stranice trokuta ako je $a : b = 12 : 7$, $c = 3$ cm i $\alpha = 2\gamma$.
- 4) Duljine stranica trokuta tri su uzastopna cijela broja, a najveći je kut trokuta dvostruko veći od najmanjeg. Kolike su duljine stranica i kutovi trokuta?

Upute: (1) Imamo: $c = 44.03$ cm, $\alpha = 61^\circ 39'$, $\beta = 51^\circ 2'$.

$$(2) \text{ Iz } x = \frac{a+b-c}{2} = \frac{85-c}{2}, \text{ tg } \frac{\gamma}{2} = \frac{r}{x}, \text{ imamo } c=39.9262\text{cm,}$$
$$P=599.9339\text{cm}^2.$$

$$(3) \text{ Dobivamo: } \frac{a}{c} = \frac{\sin \alpha}{\sin \gamma} = \frac{\sin 2\gamma}{\sin \gamma} = 2 \cos \gamma, \quad c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma, \quad \text{odakle}$$

je $28a^3 - 193a^2 + 1296 = 0$. Jedno rješenje je $a_1 = 4$,

$$28a^3 - 193a^2 + 1296 = 28(a-4)\left(a - \frac{36}{7}\right)\left(a + \frac{9}{4}\right),$$

pa postoji još jedno pozitivno rješenje $a_2 = \frac{36}{7}$. Odgovarajuće stranice su $b_1 = \frac{7}{3}$, $b_2 = 3$.

$$(4) \text{ Duljine stranica trokuta su } 4, 5 \text{ i } 6, \text{ a kutovi } \alpha = 41^\circ 24' 35'', \beta = 55^\circ 46' 16''$$

i $\gamma = 82^\circ 49' 9''$.

LITERATURA

- [1] N. Elezović, Ž. Hanjš, S. Varošaneć, *Matematičko natjecanje 3*, 1999.
- [2] V. Mičić i dr., *Matematika za 3 r. srednjih škola*, Novi Sad, 2010.
- [3] M. Valčić, *Trigonometrija (odabrani zadaci)*, Element d.o.o. Zagreb, 2000.
- [4] W. Schweizer, *Trigonometri*, Hannover, 2015.