UNIVERZITET U NIŠU
PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET
DEPARTMAN ZA MATEMATIKU

Ivana M. Radojević

UOPŠTENI INVERZI I KVAZIHIPONORMALNE MATRICE U PROSTORIMA SA NEDEFINITNIM SKALARNIM PROIZVODOM

Doktorska disertacija

Niš, 2016.

UNIVERSITY OF NIŠ
FACULTY OF SCIENCE AND MATHEMATICS
DEPARTMENT OF MATHEMATICS

Ivana M. Radojević

GENERALIZED INVERSES AND QUASIHYPONORMAL MATRICES IN SPACES WITH INDEFINITE INNER PRODUCT

PhD thesis

Niš, 2016.

Komisija za odbranu doktorske disertacije

Mentor: dr Dragan S. Đorđević, redovni profesor Prirodno-matematičkog fakulteta Univerziteta u Nišu

Članovi komisije:

1. dr Vladimir Rakočević, redovni profesor Prirodno-matematičkog fakulteta Univerziteta u Nišu

2. dr Snežana Živković Zlatanović, redovni profesor Prirodno-matematičkog fakulteta Univerziteta u Nišu

3. dr Ivana Đolović, vanredni profesor Tehničkog fakulteta u Boru Univerziteta u Beogradu

4. dr Dijana Mosić, vanredni profesor Prirodno-matematičkog fakulteta Univerziteta u Nišu

Datum odbrane:

Mojim roditeljima,

Miroslavu i Živici

Прилог 4/1

ПРИРОДНО - МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ
НИШ

КЉУЧНА ДОКУМЕНТАЦИЈСКА ИНФОРМАЦИЈА

Редни број, **РБР**:	
Идентификациони број, **ИБР**:	
Тип документације, **ТД**:	монографска
Тип записа, **ТЗ**:	текстуални
Врста рада, **ВР**:	докторска дисертација
Аутор, **АУ**:	Ивана М. Радојевић
Ментор, **МН**:	Драган С. Ђорђевић
Наслов рада, **НР**:	УОПШТЕНИ ИНВЕРЗИ И КВАЗИХИПОНОРМАЛНЕ МАТРИЦЕ У ПРОСТОРИМА СА НЕДЕФИНИТНИМ СКАЛАРНИМ ПРОИЗВОДОМ
Језик публикације, **ЈП**:	српски
Језик извода, **ЈИ**:	енглески
Земља публиковања, **ЗП**:	Србија
Уже географско подручје, **УГП**:	Србија
Година, **ГО**:	2016.
Издавач, **ИЗ**:	ауторски репринт
Место и адреса, **МА**:	Ниш, Вишеградска 33.
Физички опис рада, **ФО**: (поглавља/страна/ цитата/табела/слика/графика/прилога)	5 / v+ 98
Научна област, **НО**:	Математика
Научна дисциплина, **НД**:	математичка анализа
Предметна одредница/Кључне речи, **ПО**:	функционална анализа
УДК	517.98 (043.3) 517.986.3 (043.3)
Чува се, **ЧУ**:	у библиотеци Природно-математичког факултета у Нишу
Важна напомена, **ВН**:	

Извод, **ИЗ**:	У овој дисертацији изложени су оригинални резултати из теорије матрица и уопштених инверза у коначно-димензионалним просторима са недефинитним скаларним производом. Приликом бројних генерализација на дегенеративан случај коришћене су линеарне релације. У првом делу дисертације извршено је уопштење појма нормалности и хипонормалности. Дефинисане су квазихипонормалне матрице и линеарне релације у просторима са недегенеративним и дегенеративним скаларним производом. Дата је карактеризација квазихипонормалних и јако квазихипонормалних матрица у овим просторима. У другом делу дисертације дефинисан је Мур-Пенроузов инверз матрица и линеарних релација у просторима са дегенеративним скаларним производом. Доказан је велики број особина овог инверза за квадратне матрице у дегенеративним просторима. Резултати у трећем делу односе се на ЕП матрице у просторима са недефинитним скаларним производом у односу на недефинитни матрични производ. Такве матрице се називају J-ЕП матрице. Показана је повезаност ЕП и J-ЕП матрица, као и значај који имају код закона обрнутог редоследа за Мур-Пенроузов инверз производа матрица.
Датум прихватања теме, **ДП**:	12.01.2015.
Датум одбране, **ДО**:	
Чланови комисије, **КО**: Председник:	
Члан:	
Члан:	
Члан:	
Члан, ментор:	

Образац Q4.09.13 - Издање 1

Прилог 4/2

ПРИРОДНО - МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ
НИШ

KEY WORDS DOCUMENTATION

Accession number, **ANO**:	
Identification number, **INO**:	
Document type, **DT**:	monograph
Type of record, **TR**:	textual
Contents code, **CC**:	doctoral dissertation
Author, **AU**:	Ivana M. Radojević
Mentor, **MN**:	Dragan S. Đorđević
Title, **TI**:	GENERALIZED INVERSES AND QUASIHYPONORMAL MATRICES IN SPACES WITH INDEFINITE INNER PRODUCT
Language of text, **LT**:	Serbian
Language of abstract, **LA**:	English
Country of publication, **CP**:	Serbia
Locality of publication, **LP**:	Serbia
Publication year, **PY**:	2016.
Publisher, **PB**:	author's reprint
Publication place, **PP**:	Niš, Višegradska 33.
Physical description, **PD**: (chapters/pages/ref./tables/pictures/graphs/appendixes)	5 / v + 98
Scientific field, **SF**:	мathematics
Scientific discipline, **SD**:	mathematical analysis
Subject/Key words, **S/KW**:	functional analysis
UC	517.98 (043.3) 517.986.3 (043.3)
Holding data, **HD**:	In the library of Faculty of sciences and mathematics, Niš
Note, **N**:	

Abstract, **AB**:	In this dissertation the original results in matrix theory and general inverses theory in finite-dimensional indefinite inner product spaces are presented. Linear relations are used for the extension of some results in degenerate case. In the first part a generalization of the notion of normality and hyponormality is established.Quasihyponormal and strongly quasihyponormal matrices and linear relations are defined in nondegenerate and degenerate indefinite inner product spaces. A characterization of quasihyponormal and strongly quasihyponormal matrices in those spaces is given. In the second part a Moore-Penrose inverse of matrices and linear relations in degenerate indefinite inner product spaces is defined. Some properties of this inverse for matrices in degenerate case are shown. Results in the third part concerns EP matrices in indefinite inner product spaces with respect to indefinite matrix product. These matrices are J-EP matrices. The connection among EP, J-EP matrices and the reverse order law for the Moore-Penrose inverse of the indefinite matrix product is studied.
Accepted by the Scientific Board on, **ASB**:	12.01.2015.
Defended on, **DE**:	
Defended Board, **DB**: President:	
Member:	
Member:	
Member:	
Member, Mentor:	

Образац Q4.09.13 - Издање 1

Sadržaj

Predgovor

Prostori sa nedefinitnim skalarnim proizvodom počeli su da se izučavaju na teritoriji bivšeg Sovjetskog Saveza. Prvi rad o linearnim operatorima u beskonačno - dimenzionalnim prostorima sa nedefinitnim skalarnim proizvodom delo je ruskog matematičara Pontrjagina [82] iz 1944. godine. Problem protoka fluida u mehanici, koji je postavio Soboljev, bio je motivacija za istraživanja na ovu temu. Nezavisno od njega, analizirajući stabilnost jednačine sa operatorskim koeficijentima $Au_{tt} + Bu_t + C = O$, Krein i Langer takođe su koristili prostore sa nedefinitnom metrikom. Od tada pa do danas linearni operatori u prostorima sa nedefinitnim skalarnim proizvodom predstavljaju jednu od važnih grana u modernoj teoriji operatora.

Najvažniji i najizučavaniji primeri prostora sa nedefinitnim skalarnim proizvodom su Kreinovi i Pontrjaginovi prostori. Vektorski prostor V sa nedefinitnim skalarnim proizvodom $[.,.]$ je *Kreinov prostor* ako postoje potprostori V^+ i V^- prostora V takvi da je:

(i) $V = V^+[\dot{+}]V^-$,
pri čemu je sa $[\dot{+}]$ označena direktna ortogonalna suma potprostora V^+ i V^-.

(ii) $(V^+, [.,.])$ i $(V^-, -[.,.])$ su Hilbertovi prostori.

Dekompozicija prostora data sa (i) naziva se *fundamentalna dekompozicija.*

Istorijski gledano, prostori Kreina pojavili su se još u XIX veku (u nešto drugačijem kontekstu nego danas) i to tokom razvoja neeuklidske geometrije.

Ako je neki od potprostora V^+ i V^- konačno - dimenzionalan, tada se Kreinov prostor $(V, [.,.])$ naziva *Pontrjaginov prostor.* Još jedan od poznatijih primera prostora sa nedefinitnim skalarnim proizvodom je *prostor Minkovskog.* Ovaj prostor je specijalan slučaj Kreinovih prostora, preciznije, to je 4 - dimenzionalni Kreinov prostor nad poljem realnih brojeva gde je nedefinitni skalarni proizvod definisan sa $[x, y] = \langle Jx, y\rangle$, pri čemu je $J = diag(1, 1, 1, -1)$, a $\langle ., .\rangle$ predstavlja standardan skalarni proizvod.

Proučavanje linearnih transformacija u prostorima sa nedefinitnim skalarnim proizvodom veoma je aktuelno poslednjih trideset godina. Nekoliko važnih strukturnih karakterizacija dato je u [13] i [91].

Primena prostora sa nedefinitnim skalarnim proizvodom je velika. Oni se koriste u fizici, npr. [40], u teoriji faktorizacije za racionalne matrične funkcije, zatim u teoriji sistema i upravljanja, itd. Degenerativni prostori sa nedefinitnim skalarnim proizvodom važni su teoriji operatorskih snopova.

U ovoj disertaciji govorimo o uopštenim inverzima matrica i nekim tipovima matrica samo u slučaju kada je prostor sa nedefinitnim skalarnim proizvodom *konačno-dimenzionalan.* Posmatraćemo prostor $\mathbb{C}^n$ na kome je definisan nedefinitan skalaran proizvod sa:

$$[x, y] = \langle Hx, y \rangle, \quad x, y \in \mathbb{C}^n \tag{1}$$

gde je sa $\langle .,. \rangle$ označen standardan skalarni proizvod na $\mathbb{C}^n$, a matrica $H \in \mathbb{C}^{n \times n}$ je ermitska. Ako je matrica H još i singularna, onda je ovaj prostor degenerativan. U tom slučaju, mnogi rezultati koje uopštavamo (koji, na primer, koriste rangove matrica), ne mogu biti dobijeni po analogiji, pa u te svrhe koristimo linearne relacije.

Izučavanje linearnih relacija prvi je započeo američki matematičar R. Arens 1961. godine u radu [1]. Sistematičan i detaljan prikaz rezultata vezanih za linearne relacije može se naći u monografiji čiji je autor britanski matematičar R. Kros [19].

Relacija T između elemenata skupova X i Y predstavlja podskup od $X \times Y$. Za $x \in X$ važi $T(x) = \{y : (x, y) \in T\}$. Domen relacije T sadrži sve elemente $x \in X$ za koje skup $T(x)$ nije prazan. Kažemo da je relacija T *jednovednosna* ako za svako x iz domena skup $T(x)$ sadrži jednan element i tada je T, u stvari, funkcija iz X u Y. Slika relacije T je unija svih $T(x)$.

Ako su X i Y vektorski prostori nad poljem $F = \mathbb{R}$ ili $F = \mathbb{C}$, tada je T linearna relacija, ili viševrednosan linearan operator (multivalued linear operator), ako za sve x, y iz domena relacije T i proizvoljni skalar $\lambda \in F$ imamo

$$\begin{aligned} &(1) \quad Tx + Ty \subset T(x + y) \\ &(2) \quad \lambda Tx \subset T(\lambda x). \end{aligned}$$

Domen linearne relacije je linearan potprostor u X.

U ovoj disertaciji izloženi su originalni rezultati iz teorije matrica i uopštenih inverza u konačno-dimenzionalnim prostorima sa nedefinitnim skalarnim proizvodom. Ovi rezultati objavljeni su u radovima [83], [84] i [85]. Takođe su predstavljeni originalni rezultati iz neobjavljenih radova [92, 93]. Ova disertacija sadrži i brojne primere kojim se ilustruju važne razlike pojmova kvazihiponormalnosti, Mur-Penrouzovog inverza i EP-matrica u euklidskim, nedegenerativnim i degenerativnim prostorima sa nedefinitnim skalarnim proizvodom. Radi bolje čitljivosti, neke teoreme iz citiranih radova date su sa dokazom.

Disertacija se sastoji iz četiri glave. Prva glava je uvodnog karaktera. U sekciji 1.1 dati su osnovni pojmovi vezani za matrice i konačno-dimenzionalne prostore. U sekciji 1.2 data je definicija prostora sa nedefinitnim skalarnim proizvodom na $\mathbb{C}^n$. Razmatrane su specifičnosti nedegenerativnog i degenerativnog slučaja. Posebno su tretirani semidefinitni potprostori, i to njihova maksimalna dimenzija i oblik. Sekcija 1.3 odnosi se na linearne relacije. Istaknut je njihov značaj u samoj disertaciji i šire.

Naime, usled nepostojanja adjungovane matrice (ponekad i inverzne matrice) u degenerativnom slučaju, veći deo rezultata ćemo izvesti korišćenjem linearnih relacija. Pored osobina linearnih relacija prikazana je i forma za linearne relacije $AA^{[*]}$ i $A^{[*]}A$, pri čemu je $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ matrica. One će biti značajne u daljem radu.

Pre nego što se pređe na centralni deo druge glave gde ćemo uvesti kvazihiponormalne matrice, u sekciji 2.1 predstavljene su neke klase matrica u nedegenerativnim prostorima (H-samoadjungovane, H-unitarne i H-normalne matrice). Mogućnosi njihovog uopštenja na degenerativan slučaj bazirale su se na rezultatima Mela i Tranka iz 2007. godine [71]. Uopštenje je izvršeno na dva načina, čime su dobijene dve različite klase, i to:

(i) Mur-Penrouz H-normalne matrice: $HTH^{\dagger}T^*H = T^*HT$

(ii) H-normalne matrice: $T^{[*]}T \subseteq TT^{[*]}$.

Sekcije 2.2 i 2.3 sadrže originalne rezultate zajedničkog rada sa D. S. Đorđevićem [85]. U [67] definisane su H-hiponormalne matrice, koje su potom bile uopštene i na degenerativni slučaj u radu [44] iz 2010. godine. Definicija je uključivala i linearne relacije. Ova klasa sadrži i H-normalne i Mur-Penrouz H-normalne matrice. Dalje predstavljamo originalne rezultate iz pomenutog rada [85]. Najpre smo izvršili uopštenje na H-kvazihiponormalne matrice u nedegenerativnim prostorima (Definicija 4.9). Posle detaljnog izvođenja potrebnog oblika odgovarajuće linearne relacije, definisali smo H-kvazihiponormalne matrice i linearne relacije (Definicija 2.5) i pokazali da ova klasa sadrži sve H-hiponormalne matrice (Teorema 2.10), ali da se ove dve klase ne poklpaju. Takođe, dali smo potpunu karakterizaciju H-kvazihiponormalnih matrica (Teorema 2.9). Na kraju ove sekcije, kao Posledicu 2.1 pokazali smo da H-kvazihiponormalnost neke matrice T implicira H-hiponormalnost na nekom potprostoru slike date matrice T.

Sekciju 2.3 počinjemo isticanjem važne osobine H-normalnih matrica. Naime, jezgro matrice H, koja indukuje nedefinitan skalarni proizvod, je invarijantno za H-normalne matrice. Za Mur-Penrouz H-normalne matrice ova osobina ne važi. Ako je T Mur-Penrouz H-normalna matrica, tada je jezgro matrice H sadržano u nekom T-invarijantnom H-neutralnom potprostoru [68]. H-hiponormalne matrice nemaju ovu osobinu, a kao opštija klasa, nemaju je ni H-kvazihiponormalne matrice koje smo definisali u prethodnom delu. Razlog je to sto je ova klasa suviše široka. Pooštravajući uslov domena, tj. zahtevajući da linearna relacija $(T^{[*]})^iT^i$ ima potpun domen za svako $i \in \mathbb{N}$, sužavamo ovu klasu i definišemo *jako H-kvazihiponormalne matrice i linearne relacije* (Definicija 2.7). Zatim dajemo karakterizaciju jako H-kvazihiponormalnih matrica (Teorema 2.13). Posledicom 2.3 pokazujemo ekvivalenciju Mur-Penrouz H-normalnih, H-hiponormalnih, jako H-hiponormalnih, H-kvazihiponormalnih i jako H-kvazihiponormalnih matrica, pod specifičnim uslovom H-normalnosti njihove podmatrice.

U delu 2.4 navodimo nekoliko teorema koje se odnose na ekstenziju semidefinitnih potprostora do maksimalnih za normalne i hiponormalne matrice. Ovi rezultati se mogu naći u [3, 44, 66, 67]. Jedna od njih je i Teorema 2.19 kojom se pokazuje kako naći potprostor koji bi sadržao jezgro matrice H i pritom bio invarijantan za jako H-hiponormalne matrice. Zaključujemo da je ovaj rezultat potpuno primenljiv i na jako H-kvazihiponormalne matrice i dajemo Teoremu 2.22.

Glava 3 se odnosi na Mur-Penrouzov inverz matrica. Sekcije 3.1, 3.2 i 3.3 daju pregled rezultata (osobina) ovog inverza u euklidskom prostoru, kao i u nedegenerativnim i degenerativnim prostorima sa nedefinitnim skalarnim proizvodom. U sekciji 3.1 uvodimo pojam uopštenih inverza za matrice i dajemo istorijski osvrt na njihov razvoj, sa akcentom na Mur-Penrouzov inverz. Za nekoliko tipova uopštenih inverza (Mur-Penrouzov, grupni, Drazinov i unutrašnji inverz) navedene su osnovne osobine. Veći deo ovih rezultata može se naći u poznatoj knjizi Ben-Izraela i Grevila *Generalized Inverses: Theory and Applications* iz 2003. godine.

Sekcija 3.2 daje uopštenje Mur-Penrouzovog inverza na prostore sa nedefinitnim skalarnim proizvodom. U radu [54] ispitivan je samo nedegenerativan slučaj i ti rezultati su predstavljeni ovde. Indijski matematičari Kamaraj i Sivakumar pokazali su da gotovo sve poznate osnovne osobine Mur-Penrouzovog inverza važe i u ovim prostorima. Bitna razlika jeste u tome što Mur-Penrouzov inverz ne mora da postoji. On postoji ako i samo ako je $r(A^{[*]}A) = r(AA^{[*]}) = r(A)$ i u skoro svim rezultatima uslov egzistencije se mora pretpostaviti.

U delu 3.3 dati su originalni rezultati zajedničkog rada sa D. S. Đorđevićem [84]. Pojam Mur-Penrouzovog inverza uopšten je na degenerativne prostore sa nedefinitnim skalarnim proizvodom. Definicija se razlikuje od poznatih za Mur-Penrouzov inverz, šira je i uključuje i linearne relacije. Glavni uzrok je taj što $A^{[*]}$ neke matrice $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ nije matrica, već linearna relacija. Teoremom 3.22 pokazuje se da je ovako definisan inverz kvadratnih matrica svojevrsno uopštenje Mur-Penrouzovih inverza u prostorima sa nedegenerativnim nedefinitnim skalarnim proizvodom. U slučaju da je matrica H invertibilna, ovaj inverz se svodi na $A^{[\dagger]}$ predstavljen u radu [54], dok se za pozitivno definitnu matricu H svodi na težinski inverz. Takođe pokazujemo da, ako postoji, ovaj inverz ne mora da bude jedinstven (Primer 3.2). Pod uslovom da u skupu matrica Mur-Penrouzov inverz postoji (u oznaci $A^{[\dagger]}$), izvodimo sledeće osobine:

(1) $(A^{[\dagger]})^{[*]} \subseteq (A^{[*]})^{[\dagger]}$ (Teorema 3.24);

(2) $A^{[*]} = A^{[*]}AA^{[\dagger]}$ i $A^{[\dagger]}AA^{[*]} \subseteq A^{[*]}$ (Teorema 3.25);

(3) Ako je u dekompoziciji $A = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{bmatrix}$ i $H = \begin{bmatrix} H_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ podmatrica A_4 invertibilna, tada je $A^{[*]} = A^{[*]}AA^{[\dagger]}$ i $A^{[*]} = A^{[\dagger]}AA^{[*]}$ (Posledica 3.2);

(4) $A^{[\dagger]}(A^{[\dagger]})^{[*]} \in A^{[*]}A\{1,2,(3)\}$ (Teorema 3.26);

(5) $(A^{[\dagger]})^{[*]}A^{[\dagger]} \in AA^{[*]}\{1,2,(4)\}$ (Teorema 3.27);

(6) Dajemo potrebne i dovoljne uslove da važi $(A^{[*]}A)^{[\dagger]} = A^{[\dagger]}(A^{[\dagger]})^{[*]}$ i $(AA^{[*]})^{[\dagger]} = (A^{[\dagger]})^{[*]}A^{[\dagger]}$ (Teoreme 3.28 i 3.29)

(7) Ako linearne relacije $A^{[*]}$ i $(A^{[\dagger]})^{[*]}$ imaju potpune domene, tada takođe važi $(A^{[*]}A)^{[\dagger]} = A^{[\dagger]}(A^{[\dagger]})^{[*]}$ i $(AA^{[*]})^{[\dagger]} = (A^{[\dagger]})^{[*]}A^{[\dagger]}$ (Posledica 3.3);

(8) $A^{[\dagger]} \neq (A^{[*]}A)^{[\dagger]}A^{[*]}$, kao i $A^{[\dagger]} \neq A^{[*]}(AA^{[*]})^{[\dagger]}$ (Primer 3.5).

Glava 4 sadrži rezultate iz autorskog rada [83]. Ovi rezultati vezani su za EP matrice u prostorima sa nedefinitnim skalarnim proizvodom u kome je definisan nov matrični proizvod - nedefinitan matrični proizvod. Takve matrice se nazivaju $J-EP$ matrice. U sekciji 4.1 dati su uvodni pojmovi. Definisan je Mur-Penrouzov inverz, koji je označen sa $A^{[\ddagger]}$, i istaknuta razlika u odnosu na Mur-Penrouzov inverz u nedefinitnim prostorima sa standardnim matričnim proizvodom (koji je ispitivan u prethodnoj glavi).

U sekciji 4.2 dajemo potrebne i dovoljne uslove da nedefinitan matrični proizvod dveju matrica bude $J-EP$ (Teoreme 4.3 i 4.4). Pored toga, uslovi za ekvivalenciju EP i $J-EP$ matrica iz rezultata datih u [51], oslabljeni su (Teoreme 4.5 i 4.6). Pokazujemo povezanost između EP, $J-EP$ matrica i ortogonalnosti (preciznije, J-ortogonalnosti) potprostora $Ra(A^{[*]})$ i $Nu(A)$ (Teorema 4.14). Takođe uopštavamo rezultat iz [64] (istovremeno poboljšavamo rezultat iz [51]) definišući dovoljne uslove da zbir $J-EP$ matrica bude $J-EP$ (Teoreme 4.18 i 4.19).

U sekciji 4.3 ispitujemo zakon obrnutog redosleda za Mur-Penrouzov inverz nedefinitnog matričnog proizvoda dveju matrica. Neki od originalnih rezultata dati su Teoremama 4.23 i 4.24, kao i Teoremom 4.26 koja poboljšava rezultat iz [51].

U sekciji 4.4 navodimo rezultat iz [73] kojim je predstavljena veza između zvezda parcijalnih uređenja matrica i EP matrica. Teoremom 4.36 dajemo potpunu generalizaciju ovog rezultata na matrice u prostorima sa nedefinitnim skalarnim proizvodom i sa nedefinitnim matričnim proizvodom. Ova teorema takođe predstavlja poboljšanje rezultata iz rada [51].

Ovom prilikom izražavam zahvalnost svom mentoru profesoru Draganu Đorđeviću za usmeravanje mog naučnog rada i izrade ove disertacije, kao i na profesionalnom i prijateljskom odnosu tokom ovih godina.

Zahvaljujem se i prof. dr Ivani Đolović na saradnji na Tehničkom fakultetu u Boru, prijateljstvu i podršci. Zahvalnost dugujem i svim članovima komisije na interesantnim predavanjima i korisnim savetima tokom mog školovanja.

Na kraju, posebnu zahvalnost dugujem suprugu Ivanu, svojim roditeljima Miši i Živici i sestri Violeti. Njihova podrška i razumevanje za mene su od nemerljivog značaja.

1 Uvod

U ovoj glavi predstavićemo osnovne pojmove i teoreme vezane za prostore sa nedefinitnim skalarnim proizvodom i za linearne relacije. Ovi rezultati dati su bez dokaza, a mogu se naći u monografijama [8, 13, 33, 86], kao i u radovima [44, 71] i tamo navedenim referencama.

1.1 Konačno - dimenzionalni vektorski prostori

U ovoj disertaciji koristićemo sledeće oznake. Sa $\mathbb{C}^n$ je označen n-dimenzionalan vektorski prostor nad poljem kompleksnih brojeva $\mathbb{C}$ na kome je definisan standardan skalarni proizvod:

$$\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i \overline{y_i},$$

gde je $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^t$, $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)^t$ i $x_i, y_i \in \mathbb{C}$ za $i = 1, \dots, n$.

Vektori $x, y \in \mathbb{C}^n$ su *uzajamno ortogonalni*, u oznaci $x \perp y$, ako je $\langle x, y\rangle = 0$. Ortogonalnost vektora može se jednostavno produžiti na ortogonalnost skupova. Ako je $M \subset \mathbb{C}^n$, tada je $M^{\perp} = \{y \in \mathbb{C}^n : y \perp x, \text{ za svako } x \in M\}$.

Podrazumevaćemo još da je $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ baza prostora $\mathbb{C}^n$, pri čemu je $e_i = (0, 0, \dots 0, 1, 0, \dots 0)^t \in \mathbb{C}^n$, gde se 1 nalazi na $i - tom$ mestu. Sa $\text{Span}\{x_1, \dots, x_k\}$ ćemo označavati potprostor razapet vektorima $x_1, \dots, x_k$.

Neka je $\mathbb{C}^{m\times n}$ skup svih $m \times n$ kompleksnih matrica. Sa A^T i A^* označena je transponovana, odnosno konjugovano - transponovana matrica matrice $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$. Sa I_n je označena jedinična matrica reda n, a sa O nula matrica odgovarajućih dimenzija. Za matricu $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$ definišu se slika (postor kolona) sa $R(A) = \{Ax : x \in \mathbb{C}^n\}$ i jezgro sa $N(A) = \{x \in \mathbb{C}^n : Ax = 0\}$ i oni su potprostori prostora $\mathbb{C}^m$ i $\mathbb{C}^n$, redom. Dimenzija slike matrice A predstavlja rang matrice i označavamo je sa $r(A)$. Dimenzije slike i jezgra matrice povezane su na sledeći način.

Teorema 1.1 *(Teorema o rangu i defektu) Za proizvoljnu matricu $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$ važi*

$$dim R(A) + dim N(A) = n.$$

Osobine konjugovano-transponovanih matrica date su sledećom lemom koja se može naći npr. u [25].

Lema 1.1 *Neka su $A, B \in \mathbb{C}^{l\times m}$, $C \in \mathbb{C}^{m\times n}$ i $\lambda \in \mathbb{C}$. Tada važi:*

(i) $(A + B)^* = A^* + B^*$*;*

(ii) $(\lambda A)^* = \bar{\lambda} A^*$*;*

(iii) $A^{**} = A$;

(iv) $(AC)^* = C^*A^*$;

(v) $I^* = I,\ O^* = O$;

(vi) *ako je* A *invertibilna matrica, tj.* $l = m$, *onda je* A^* *takođe invertibilna matrica i važi* $(A^{-1})^* = (A^*)^{-1}$.

Teorema 1.2 *Neka je* $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$. *Tada važi:*

(1) $N(A^*) = R(A)^{\perp}$;

(2) $R(A^*) = N(A)^{\perp}$;

(3) $N(A^*A) = N(A)$;

(4) $R(A^*A) = R(A^*)$.

U konačno dimenzionalnim prostorima sa standardnim skalarnim proizvodom važi i sledeći rezultat.

Lema 1.2 *Za svaku matricu* $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$ *važi*

$$r(AA^*) = r(A) = r(A^*A). \tag{1.1}$$

Indeks kvadratne matrice A je najmanji nenegativan ceo broj k takav da važi $r(A^k) = r(A^{k+1})$ i on se označava sa $ind(A)$. Kvadratna matrica $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ je invertibilna (regularna) ako je $r(A) = n$. U suprotnom, matrica A je singularna. Jasno, ako je matrica A invertibilna, tada je $ind(A) = 0$. Važi i da je $indA \leq 1$ ako i samo ako je $r(A) = r(A^2)$. U opštem slučaju za proizvoljnu matricu $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ važi $0 \leq ind(A) \leq n$.

Poznato je da se svaka linearna transformacija iz jednog konačno-dimenzionalnog vektorskog prostora u drugi može prikazati matricom. Takva matrica je jedinstveno određena samom linearnom transformacijom i izborom baza u ovim prostorima. Tako ćemo linearni operator $A \in L(\mathbb{C}^n, \mathbb{C}^m)$ posmatrati kao matricu $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$ i obrnuto.

1.2 Prostori sa nedefinitnim skalarnim proizvodom

Definicija 1.1 *Funkcija* $[.,.] : \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}$ *je nedefinitan skalarni proizvod na* $\mathbb{C}^n$ *ako su zadovoljene sledeće tri aksiome:*

(1) linearnost po prvom argumentu:

$$[\alpha x_1 + \beta x_2, y] = \alpha[x_1, y] + \beta[x_2, y]$$

za sve $x_1, x_2, y \in \mathbb{C}^n$ *i sve* $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$;

(2) antisimetričnost:

$$[x, y] = \overline{[y, x]}$$

za sve $x, y \in \mathbb{C}^n$*;*

(3) nedegenerativnost: ako je $[x, y] = 0$ *za svaki* $y \in \mathbb{C}^n$*, tada je* $x = 0$*.*

Drugim rečima, razmatramo kompleksan vektorski prostor sa nedegenerativnom ermitskom seskvilinearnom formom $[.,.]$. Za razliku od standardnog skalarnog proizvoda, kod nedefinitnog skalarnog proizvoda nije pretpostavljena aksioma pozitivnosti, tj. mogu postojati vektori $x, y \in \mathbb{C}^n$, takvi da je $[x, x] < 0 < [y, y]$.

Za svaki nedefinitan skalarni proizvod $[.,.]$ na $\mathbb{C}^n$ postoji $n \times n$ invertibilna ermitska matrica H takva da važi:

$$[x, y] = \langle Hx, y \rangle, \quad x, y \in \mathbb{C}^n \tag{1.2}$$

gde je sa $\langle .,. \rangle$ označen standardan skalarni proizvod na $\mathbb{C}^n$. Važi i obrat, tj. formulom (1.2) određen je nedefinitan skalarni proizvod na $\mathbb{C}^n$. Dakle, postoji bijekcija između skupa nedefinitnih skalarnih proizvoda na $\mathbb{C}^n$ i skupa svih invertibilnih ermitskih matrica dimenzije $n \times n$. U ovoj disertaciji to će biti korišćeno u velikoj meri, tj. pretpostavljaćemo da je nedefinitan skalarni proizvod definisan sa (1.2), ili (drugim rečima) da matrica H indukuje ovaj skalarni proizvod [33].

Nedefinitnost skalarnog proizvoda povlači specifičnu geometriju prostora na kome je definisan. Tako, na primer, ortogonalnost se definiše na sledeći način. Ortogonalni komplement potprostora L u $\mathbb{C}^n$ je potprostor

$$L^{[\perp]} = \{x \in \mathbb{C}^n | [x, y] = 0 \text{ za sve } \ y \in L\}.$$

Ako je nedefinitan skalarni proizvod zadan ermitskom matricom H, tj. sa (1.2), u upotrebi je i: potprostor $L^{[\perp]}$ je H-ortogonalan na L. Jedan od primera koji pokazuju da ortogonalan komplement nekog potprostora nije obavezno i direktan komplement može se pronaći u radu [33].

Primer 1.1 *Neka je* $[x, y] = \langle Hx, y \rangle$*, gde je* H *invertibilna ermitska matrica reda* n *koja indukuje nedefinitan skalarni proizvod*

$$H = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix}. \tag{1.3}$$

Za potprostor $M = Span\{e_1\}$*, lako se dobija da je* $M^{[\perp]} = Span\{e_1, e_2, \dots, e_{n-1}\}$*.*

Matrica H *definisana sa* (1.3) *je takozvana sip matrica (the standard involutary permutation matrix) i ona ima važnu ulogu kod kanonskih formi nekih klasa matrica u ovim prostorima. Sip matricu reda* p *obično označavamo sa* Z_p*.*

Značajan pojam u ovim prostorima jeste i *H-adjungovana matrica* matrice $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, koja je označena sa $A^{[*]}$. Naime, za svaku matricu $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ postoji jedinstvena matrica $A^{[*]} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ koja zadovoljava

$$[A^{[*]}x, y] = [x, Ay], \quad \text{za sve } x, y \in \mathbb{C}^n. \tag{1.4}$$

Nije teško pokazati da postoji i eksplicitni oblik ove matrice, i to:

$$A^{[*]} = H^{-1}A^*H,$$

gde je sa A^* obeležena konjugovano - transponovana matrica od A. Kako je A^* jedinstvena matrica za proizvoljnu matricu $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, iz ovog oblika slede egzistencija i jedinstvenost i H-adjungovane matrice $A^{[*]}$. Matrica $A^{[*]}$ je slična matrici A^*.

Kvadratna matrica A je idempotent (projektor) ako je $A^2 = A$, a ako je još i $A^{[*]} = A$, onda je A *H-ortogonalan projektor.*

Važi i opštiji slučaj. Neka su na $\mathbb{C}^m$ i $\mathbb{C}^n$ definisani nedefinitni skalarni proizvodi sa

$$\langle x, y\rangle_M = y^*Mx, \quad x, y \in \mathbb{C}^m \quad \text{i} \quad \langle x, y\rangle_N = y^*Nx, \quad x, y \in \mathbb{C}^n, \tag{1.5}$$

redom, pri čemu su $M \in \mathbb{C}^{m\times m}$ i $N \in \mathbb{C}^{n\times n}$ invertibilne ermitske matrice. MN-adjungovana matrica matrice $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$ je matrica

$$A^{[*]} = N^{-1}A^*M.$$

Za H-adjungovane matrice, sledećom teoremom date su neke osobine.

Teorema 1.3 *Neka su $A, B \in \mathbb{C}^{m\times p}$ i $C \in \mathbb{C}^{p\times n}$. Tada važi*

(i) $(A^{[*]})^{[*]} = A$,

(ii) $(AC)^{[*]} = C^{[*]}A^{[*]}$,

(iii) $(A + B)^{[*]} = A^{[*]} + B^{[*]}$,

(iv) Ako je $\mathbb{C}^n$ prostor sa nedefinitnim skalarnim proizvodom koji je indukovan ermitskom matricom $H \in \mathbb{C}^{n\times n}$, tada je $H^{[*]} = H$.

Teoremom 1.2 dat je poznat rezultat koji povezuje sliku i jezgro matrice A i njene konjugovano-transponovane matrice A^*. Ista relacija važi i za matricu A i H-adjungovanu matricu $A^{[*]}$ u prostorima sa nedefinitnim skalarnim proizvodom.

Teorema 1.4 *([33]) Neka je $A^{[*]}$ H-adjungovana matrica matrice $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Tada važi:*

$$R(A^{[*]}) = N(A)^{[\perp]} \quad i \quad N(A^{[*]}) = R(A)^{[\perp]}. \tag{1.6}$$

Potprostor $L \subset \mathbb{C}^n$ je nedegenerativan ako ne postoji vektor $x \in L$, $x \neq 0$, koji je H-ortogonalan na sve vektore iz L. Drugim rečima, potprostor $L \subset \mathbb{C}^n$ je nedegenerativan ako i samo ako je $L \cap L^{[\perp]} = \{0\}$. U protivnom L je *degenerativan*. U opštem slučaju,

$$L^0 = L \cap L^{[\perp]}$$

je *izotropni deo* od L. Karakterizaciju nedegenerativnih potprostora dali su Gohberg, Lankaster i Rodman u monografiji [33] na sledeći način:

Teorema 1.5 [33] *Potprostor $L^{[\perp]}$ je direktan komplement od L u $\mathbb{C}^n$ ako i samo ako je L nedegenerativan.*

Ako su L i M potprostori u $\mathbb{C}^n$ takvi da važi

$$M \subseteq L^{[\perp]} \text{ i } M \cap L = \{0\},$$

tada je $L[\dot{+}]M$ direktna H-ortogonalna suma potprostora L i M.

Važi i sledeća teorema:

Teorema 1.6 [94] *Neka je u $\mathbb{C}^n$ nedefinitan skalarni proizvod definisan sa* (1.2), *i neka je L potprostor od $\mathbb{C}^n$. Sledeća tvrđenja su ekvivalentna:*

(i) *L je nedegenerativan;*

(ii) *$L^{[\perp]}$ je nedegenerativan;*

(iii) *$L^{[\perp]}$ je direktan komplement od L u $\mathbb{C}^n$, tj. važi $L[\dot{+}]L^{[\perp]} = \mathbb{C}^n$.*

Vektor $x \in \mathbb{C}^n$ je H-pozitivan (ili pozitivan u odnosu na nedefinitan skalarni proizvod indukovan matricom H) ako je $[x, x] > 0$. Vektor $x \in \mathbb{C}^n$ je H-negativan (H-neutralan) ako je $[x, x] < 0$ ($[x, x] = 0$).

Potprostor $L \subset \mathbb{C}^n$ je H-pozitivan (H-negativan, H-neutralan, H-nenegativan, H-nepozitivan) ako je svaki vektor iz $L \backslash \{0\}$ H-pozitivan (respektivno, H-negativan, H-neutralan, H-nenegativan, H-nepozitivan).

Potprostor je:

(i) *H-definitan* ako je H-pozitivan ili H-negativan;

(ii) *H-semidefinitan* ako je H-nenegativan ili H-nepozitivan;

(iii) *H-nedefinitan* ako nije H-definitan, H-semidefinitan ili H-neutralan.

Treba napomenuti da su H-pozitivni i H-negativni potprostori uvek nedegenerativni.

Neka je invertibilna ermitska matrica $H \in \mathbb{C}^{n \times n}$ data sa

$$H = \begin{bmatrix} Ip & 0 \\ 0 & -Iq \end{bmatrix}, \tag{1.7}$$

gde je p broj pozitivnih, a q broj negativnih sopstvenih vrednosti matrice H. Ovaj oblik matrice H uvek se može dobiti pomoću transformacije $H \longrightarrow P^*HP$, za odgovarajuću invertibilnu matricu P [33]. Kada je matrica H data sa (1.7) mogu se opisati H-definitni, H-semidefinitni i H-neutralni potprostori.

Teorema 1.7 *([33]) Neka je matrica H data sa* (1.7)*. Netrivijalan potprostor $M \subseteq \mathbb{C}^n$ dimenzije d je H-nenegativan ako i samo ako ima oblik*

$$M = R\left(\begin{bmatrix} P \\ K \end{bmatrix}\right), \tag{1.8}$$

gde je $P \in \mathbb{C}^{p \times d}$ matrica čije su kolone ortonormirane, a $K \in \mathbb{C}^{q \times d}$ je kontrakcija (tj. $||K|| \leq 1$).

Sličan rezultat važi i za H-pozitivne potprostore, pri čemu se u Teoremi 1.7 uslov kontrakcije zamenjuje strogom kontrakcijom, tj. sa $||K|| < 1$.

Za H-nepozitivne, odnosno H-negativne potprostore analogni rezultati mogu se dobiti ako umesto matrice H posmatramo $-H$.

Teorema 1.8 *([33]) Neka je matrica H data sa* (1.7)*. Netrivijalan potprostor $M \subseteq \mathbb{C}^n$ dimenzije d je H-nepozitivan (H-negativan) ako i samo ako ima oblik*

$$M = R\left(\begin{bmatrix} K \\ P \end{bmatrix}\right), \tag{1.9}$$

gde je $P \in \mathbb{C}^{q \times d}$ matrica čije su kolone ortonormirane, a $K \in \mathbb{C}^{p \times d}$ je kontrakcija (stroga kontrakcija).

Posebno su interesantni H-neutralni potprostori jer oni nemaju svoj analogon u prostorima sa definitnim skalarnim proizvodom. Ovi potprostori se nazivaju još i *izotropni potprostori*. Jasno je da su neutralni potprostori istvremeno nepozitivni i nenegativni i obavezno degenerativni. U monografiji [33], korišćenjem identiteta

$$[x, y] = \frac{1}{4}\{[x+y, x+y] + i[x+iy, x+iy] - [x-y, x-y] - i[x-iy, x-iy]\},$$

pokazano je da je potrprostor L H-neutralan ako i samo ako je $[x, y] = 0$ za sve vektore $x, y \in L$.

Teorema 1.9 *([33]) Neka je matrica H data sa* (1.7). *Netrivijalan potprostor $M \subseteq \mathbb{C}^n$ dimenzije d je H-neutralan ako i samo ako ima oblik*

$$M = R\left(\begin{bmatrix} P \\ K \end{bmatrix}\right), \tag{1.10}$$

gde su $P \in \mathbb{C}^{p\times d}$ i $K \in \mathbb{C}^{q\times d}$ matrice čije su kolone ortonormirane.

H-semidefinitan (H-definitan, H-nutralan) potprostor je *maksimalan* ako nije sadržan ni u jednom širem H-semidefinitnom (H-definitnom, H-nutralnom) potprostoru.

Za matricu $T \in \mathbb{C}^{n\times n}$ (posmatranu kao linearnu transformaciju iz $\mathbb{C}^n$ u $\mathbb{C}^n$) potprostor $L \subseteq \mathbb{C}^n$ je invarijantan (odnosno T-invarijantan) ako je $TL \subseteq L$.

Navodimo tri teoreme koje se odnose na maksimalnu dimenziju H-semidefinitnog, odnosno H-neutralnog potprostora.

Teorema 1.10 *Maksimalna dimenzija pozitivnog ili nenegativnog potprostora u odnosu na nedefinitan skalarni proizvod* (1.2) *jednaka je broju pozitivnih sopstvenih vrednosti (sa algebarskom višestrukošću) od H.*

Sličan rezultat važi i za H - nepozitivne i H - negativne potprostore.

Teorema 1.11 *Maksimalna dimenzija negativnog ili nepozitivnog potprostora u odnosu na nedefinitan skalarni proizvod* (1.2) *jednaka je broju negativnih sopstvenih vrednosti (sa algebarskom višestrukošću) od H.*

Teorema 1.12 *Maksimalna dimenzija H-neutralnog potprostora u odnosu na nedefinitan skalarni proizvod* (1.2) *je $min(k, l)$, gde je k broj pozitivnih, a l broj negativnih sopstvenih vrednosti (sa algebarskom višestrukošću) od H.*

Jasno, maksimalna dimenzija H-pozitivnog i H-nenegativnog (H-negativnog i H-nepozitivnog, respektivno) potprostora su jednake.

Ermitske, unitarne i normalne matrice imaju svoje odgovarajuće analogne pojmove u prostorima sa nedefinitnim skalarnim proizvodom. H-samoadjungovane, H-unitarne i H-normalne matrice definisane su, redom, sa:

$$A^{[*]} = A, \quad A^{[*]} = A^{-1} \ \text{ i } \ A^{[*]}A = AA^{[*]}. \tag{1.11}$$

Klasa H-samoadjungovanih matrica je detaljno izučavana. Za razliku od H-normalnih matrica, za H-samoadjungovane matrice poznata je i kanonska forma za slučaj kada je H invertibilna matrica. Do ovog bitnog rezultata došli su Gohberg, Lankaster i Rodman [32].

U narednoj teoremi sa $J_p(\lambda)$ označen je Žordanov blok dimenzije $p\times p$ koji odgovara broju λ.

Teorema 1.13 *Neka je $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ H-samoadjungovana matrica. Tada postoji nesingularna matrica $P \in \mathbb{C}^{n\times n}$, takva da je*

$$P^{-1}AP = A_1 \oplus \cdots \oplus A_k \quad i \quad P^*HP = H_1 \oplus \cdots \oplus H_k, \tag{1.12}$$

gde su A_j i H_j blokovi istih dimenzija i svaki par (A_j, H_j) ima jedan i samo jednan od sledećih oblika:

(1) blokovi koji odgovaraju realnim sopstvenim vrednostima matrice A:

$$A_j = J_p(\lambda) \quad i \quad H_j = \epsilon Z_p,$$

gde je $\lambda \in \mathbb{R}$, $p \in \mathbb{N}$ i $\epsilon \in \{1, -1\}$;

(2) blokovi koji odgovaraju paru konjugovano-kompleksnih sopstvenih vrednosti:

$$A_j = \begin{bmatrix} J_p(\lambda) & 0 \\ 0 & J_p(\overline{\lambda}) \end{bmatrix} \quad i \quad H_j = \begin{bmatrix} 0 & Z_p \\ Z_p & 0 \end{bmatrix},$$

gde je $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ i $p \in \mathbb{N}$.

Neka je $H \in \mathbb{C}^{n\times n}$ invertibilna ermitska matrica. H-samoadjungovana matrica $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ je *H-nenegativna* ako je $[Ax, x] \geq 0$ za svako $x \in \mathbb{C}^n$. Matrica A je H-pozitivna ako je $[Ax, x] > 0$ za svako $x \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$. Slično se definišu H-nepozitivne i H-negativne matrice. Kako važi

$$[Ax, x] = \langle HAx, x\rangle, \text{ za svako } \ x \in \mathbb{C}^n$$

sledi da je A H-nenegativna matrica ako i samo ako je HA pozitivno semidefinitna matrica. Matrica A je H-pozitivna ako i samo ako je HA pozitivno definitna matrica.

Veći deo ove disertacije biće posvećen prostorima u kojima je nedefinitan skalarni proizvod definisan sa (1.2), pri čemu je H ermitska singularna matrica. Takav prostor je *degenerativan*. Ovaj tip prostora je manje izučavan, mada ima široku primenu, kao što je i izloženo u Predgovoru. Singularnost matrice H, između ostalog, implicira moguće nepostojanje H-adjungovane matrice $T^{[*]}$ koja bi zadovoljavala uslov (1.4). Ukoliko ovakva matrica postoji, ona ne mora biti jedinstvena. Nije teško pronaći primere kojim bi se ovo ilustrovalo. Sledeći primer preuzet je iz rada [71].

Primer 1.2 *([71]) Neka je $H = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. Direktnom proverom zaključujemo da za matricu $T = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ne postoji matrica $N \in \mathbb{C}^{2\times 2}$ takva da važi $[x, Ty] = [Nx, y]$, za sve $x, y \in \mathbb{C}^2$. Takođe, za matricu $T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ sve matrice oblika $N = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ a & b \end{bmatrix}$, gde su $a, b \in \mathbb{C}$, zadovoljavaju traženu jednakost.*

Upravo problem egzistencije H-adjungovane matrice bio je glavni motivacioni faktor da se potraži novi pristup pri uopštenju nekih klasa matrica na prostore sa degenerativnim nedefinitnim skalarnim proizvodom. Ovom problematikom bavićemo se u prvom delu Glave 2. Novi koncept koji će i ovde biti efikasno sredstvo jesu *linearne relacije* o kojima će biti više reči u narednoj sekciji.

Kako singularna matrica obavezno ima i nule kao sopstvene vrednosti, to se odražava na maksimalnost potprostora. Analogno Teoremama 1.10, 1.11 i 1.12, važi sledeći rezultat preuzet iz [68], koji se odnosi na maksimalne semidefinitne potprostore u degenerativnom slučaju.

Teorema 1.14 *Neka je M potprostor u $\mathbb{C}^n$. Tada važi:*

1. *Potprostor M je maksimalan H-nenegativan ako i samo ako je $dim\ M = i_+(H) + i_0(H)$;*
2. *Potprostor M je maksimalan H-pozitivan ako i samo ako je $dim\ M = i_+(H)$;*
3. *Potprostor M je maksimalan H-nepozitivan ako i samo ako je $dim\ M = i_-(H) + i_0(H)$;*
4. *Potprostor M je maksimalan H-negativan ako i samo ako je $dim\ M = i_-(H)$;*
5. *Potprostor M je maksimalan H-neutralan ako i samo ako je $dim\ M = min(i_+(H), i_-(H)) + i_0(H)$,*

gde je sa $i_+(H), i_-(H)$ i $i_0(H)$ obeležen broj pozitivnih, negativnih i nula sopstvenih vrednosti (sa algebarskom višestrukošću) matrice H, redom.

Opis H-nenegativnih, H-nepozitivnih i H-neutralnih potprostora za

$$H = \begin{bmatrix} Ip & 0 & 0 \\ 0 & -Iq & 0 \\ 0 & 0 & 0_r \end{bmatrix}, \tag{1.13}$$

dali su Mel, Ran i Rodman i može se naći u [68].

1.3 Linearne relacije

Definicija 1.2 *Linearna relacija (viševrednosan linearan operator) na $\mathbb{C}^n$ je linearan potprostor od $\mathbb{C}^{2n}$.*

Definicija 1.3 *Neka su T i S linearne relacije na $\mathbb{C}^n$. Tada:*

(i) $dom(T) = \left\{ x \in \mathbb{C}^n \middle| (\exists y \in \mathbb{C}^n) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in T \right\}$ *- domen od T;*

(ii) $ran(T) = \left\{ y \in \mathbb{C}^n \middle| (\exists x \in \mathbb{C}^n) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in T \right\}$ *- slika od* T*;*

(iii) $mul\ T = \left\{ y \in \mathbb{C}^n \middle| \begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix} \in T \right\}$ *- viševrednosni deo od* T*;*

(iv) $T^{-1} = \left\{ \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in T \right\}$ *- inverz od* T*;*

(v) $T + S = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y+z \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in T, \begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix} \in S \right\}$ *- suma* T *i* S*;*

(vi) $TS = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix} \middle| (\exists y \in \mathbb{C}^n) \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} \in T \ \ i \ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in S \right\}$ *- proizvod* T *i* S.

Ako je *dom* $T = \mathbb{C}^n$, tada linearna relacija T ima potpun domen.

Adjungovanu linearnu relaciju definisao je fon Nojman u [80].

Definicija 1.4 *([71]) Neka je* $H \in \mathbb{C}^{n\times n}$ *ermitska matrica koja indukuje nedefinitan skalarni proizvod* $[.,.] = \langle .,. \rangle_H$*, i neka je* T *linearna relacija u* $\mathbb{C}^n$*. Tada se linearna relacija*

$$T^{[*]_H} = \left\{ \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{2n} : [y,\omega]_H = [z,x]_H \ \text{za sve} \ \begin{pmatrix} x \\ \omega \end{pmatrix} \in T \right\} \tag{1.14}$$

naziva H*-adjungovana linearna relacija od* T*.*

Svaka matrica $T \in \mathbb{C}^{n\times n}$ može se predstaviti linearnom relacijom u $\mathbb{C}^n$ tako što se T identifikuje sa svojim grafom $\Gamma(T)$:

$$\Gamma(T) := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ Tx \end{pmatrix} : x \in \mathbb{C}^n \right\} \subseteq \mathbb{C}^{2n}. \tag{1.15}$$

Radi jednostavnijeg zapisa, a po ugledu na korišćenu literaturu sa odgovarajućom tematikom, u (1.14) uglavnom ćemo izostavljati indeks H. Tako ćemo postupati kad god nema opasnosti od zabune. Odgovarajuće indekse koristićemo kada je potrebno naglasiti o kom nedefinitnom skalarnom proizvodu je reč. Takođe, i za matricu T kao i za njenu linearnu relaciju $\Gamma(T)$ koristićemo istu oznaku: T.

Kao specijalan slučaj kada je $T \in \mathbb{C}^{n\times n}$ matrica, iz (1.14) lako se dobija da je

$$T^{[*]} = \left\{ \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{2n} : [y, Tx] = [z, x] \text{ za svaki vektor } x \in \mathbb{C}^n \right\}. \tag{1.16}$$

Poslednji izraz kojim se opisuje $T^{[*]}$ može se pojednostaviti, što je dato sledećom lemom.

Lema 1.3 *([71]) Neka je $T \in \mathbb{C}^{n\times n}$ matrica. Tada je*

$$T^{[*]} = \left\{ \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{2n} : T^* H y = H z \right\}. \tag{1.17}$$

Pritom, $T^{[*]}$ je matrica ako i samo ako je H invertibilna matrica.

Osnovne osobine linearnih relacija date su u sledećoj teoremi.

Teorema 1.15 *([44]) Neka su T i S linearne relacije na $\mathbb{C}^n$. Tada važi:*

(i) $T \subseteq S$ *implicira* $S^{[*]} \subseteq T^{[*]}$;

(ii) $T^{[*]} + S^{[*]} \subseteq (T+S)^{[*]}$;

(iii) $T^{[*]}S^{[*]} \subseteq (ST)^{[*]}$;

(iv) *mul* $T^{[*]} = (\textit{dom } T)^{[\perp]}$; *ako je T matrica, tada je mul* $T^{[*]} = N(H)$;

(v) $(T^{[*]})^{[*]} = T + (N(H) \times N(H))$.

Kako se u ovoj disertaciji izučavaju linearne transformacije na $\mathbb{C}^n$ (matrice u $\mathbb{C}^{n\times n}$), za dalji rad od suštinskog je značaja naći što jednostavniji oblik za H i T. Promenom baze prostora $\mathbb{C}^n$: $x \to Px$, za neku invertibilnu matricu $P \in \mathbb{C}^{n\times n}$, matrice H i T se mogu predstaviti u sledećoj formi:

$$H = \begin{bmatrix} H_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ i } T = \begin{bmatrix} T_1 & T_2 \\ T_3 & T_4 \end{bmatrix}, \tag{1.18}$$

gde su $H_1, T_1 \in \mathbb{C}^{m\times m}, m \leq n$, i H_1 je obavezno invertibilna matrica.

Kao direktna posledica Leme 1.3 i prethodnih činjenica dobija se sledeće tvrđenje.

Teorema 1.16 *([71]) Neka je $T \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Tada je*

$$T^{[*]} = H^{-1}T^*H,$$

gde je H^{-1} inverzna linearna relacija. Ako su matrice H i T date u formi (1.18)*, tada*

$$T^{[*]} = \left\{ \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ {T_1}^{[*]_{H_1}} y_1 \\ z_2 \end{pmatrix} : {T_2}^* H_1 y_1 = 0 \right\}. \tag{1.19}$$

Štaviše, dom$T^{[*]} = \mathbb{C}^n$ ako i samo ako je $T_2 = 0$.

U ovoj disertaciji često ćemo koristiti linearne relacije $TT^{[*]}$ i $T^{[*]}T$. Stoga dajemo njihov oblik za slučaj kada su matrice H i T u obliku (1.18):

$$TT^{[*]} = \left\{ \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ T_1 {T_1}^{[*]} y_1 + T_2 z_2 \\ T_3 {T_1}^{[*]} y_1 + T_4 z_2 \end{pmatrix} : {T_2}^* H_1 y_1 = 0 \right\}$$

i

$$T^{[*]}T = \left\{ \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ T_1^{[*]} T_1 y_1 + {T_1}^{[*]} T_2 y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} : {T_2}^* H_1 T_1 y_1 + {T_2}^* H_1 T_2 y_2 = 0 \right\}.$$

Jasno, domen od $TT^{[*]}$ je potpun ako i samo ako je $T_2 = 0$ (kao i kod $T^{[*]}$), dok $T^{[*]}T$ ima potpun domen ako i samo ako važi

$${T_2}^* H_1 T_1 = 0 \quad \text{i} \quad {T_2}^* H_1 T_2 = 0.$$

U sledećoj glavi biće reči o nekim klasama matrica u prostorima sa nedefinitnim skalarnim proizvodom. Neke od njih biće uopštene (normalne, a samim tim i samoadjungovane i unitarne) do kvazihiponormalnih matrica. Ukratko prikazujemo bitne rezultate vezane za H-simetrične matrice i linearne relacije. One će biti od krucijalnog značaja u Glavama 2 i 3.

H-simetrične i H-izometrične matrice i linearne relacije u degenerativnim prostorima uveo je 1982. godine Ritsner u radu [90]. One predstavljaju uopštenje H-samoadjungovanih, odnosno H-unitarnih matrica u nedegenerativnim prostorima i definišu se na sledeći način:

Definicija 1.5 *([90]) Linearna relacija T na $\mathbb{C}^n$ je H-simetrična ako važi $T \subseteq T^{[*]}$.*

Teorema 1.17 *([44]) Neka je $T \in \mathbb{C}^{n\times n}$ matrica. Sledeća tvrđenja su ekvivalentna.*

(1) T je H-simetrična linearna relacija, tj. $T \subseteq T^{[*]}$;

(2) $T^*H = HT$;

(3) $T^{[*]} = (T^{[*]})^{[*]}$;

(4) $T^{[*]} = T + (N(H) \times N(H))$.

Ako je neki od uslova zadovoljen, tada je $N(H)$ T-invarijantan potprostor. Specijalno, ako su H i T dati u formi (1.18), tada važi:

$$T \text{ je } H\text{-simetrična linearna relacija ako i samo ako je}$$

$$T_1 \quad H_1 - \text{samoadjungovana matrica i } T_2 = 0.$$

Definicija 1.6 *([90]) Linearna relacija U na $\mathbb{C}^n$ je H-izometrična ako važi $U^{-1} \subseteq U^{[*]}$.*

U ovoj definiciji U^{-1} je inverzna linearna relacija od U. Za slučaj kada je $U \in \mathbb{C}^{n\times n}$ matrica dobija se sledeći rezultat.

Teorema 1.18 *([71]) Neka je $U \in \mathbb{C}^{n\times n}$ matrica. Sledeća tvrđenja su ekvivalentna:*

(1) U je H-izometrična linearna relacija, tj. $U^{-1} \subseteq U^{[*]}$;

(2) $U^*HU = H$.

Ako je neki od uslova zadovoljen, tada je $N(H)$ U-invarijantan potprostor. Specijalno, ako su U i H dati u formi (1.18), tada važi:

$$U \text{ je } H\text{-izometrična linearna relacija ako i samo ako je}$$

$$U_1 \quad H_1 - \textit{unitarna matrica i } U_2 = 0.$$

H-nenegativnost linearnih relacija bazira se na H-simetričnosti i definisana je u [44].

Definicija 1.7 *Linearna relacija T na $\mathbb{C}^n$ je H-nenegativna ako je T H-simetrična linearna relacija i ako važi $[y, x] \geq 0$ za svako $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in T$.*

Više o linearnim relacijama može se naći u [19, 20, 21, 32, 33, 34, 53, 58].

2 Kvazihipnormalne matrice i linearne relacije

2.1 Klase linearnih transformacija

Rezultati dobijeni na prostorima sa nedefinitnim skalarnim proizvodom imaju veliku primenu u mehanici, statistici, a naročito u fizici. Razvoj ovih nauka zahtevao je poznavanje specifične strukture nedefinitnih prostora i linearnih transformacija u njima. Tako su različite klase matrica u prostorima sa nedefinitnim skalarnim proizvodom postale bitan i čest predmet proučavanja poslednjih godina. Osobine, kao i kanonska forma za neke od ovih klasa potpuno su izučene. H-samoadjungovane, H-kosoadjungovane i H-unitarne matrice na nedegenerativnim prostorima detaljno su opisane u monografiji [33]. Takođe, pogodan materijal predstavljaju i radovi [32, 69].

H-normalne matrice, koje predstavljaju širu klasu od pomenutih, intenzivno su izučavane i to sa različitih aspekata. Klasifikacija H-normalnih matrica tretirana je u radovima [32, 34, 35, 36, 46, 47, 48, 65], dok se rezultati o numeričkom rangu mogu pronaći u [60, 61]. Izučavana je i polarna dekompozicija H-normalnih matrica [15, 62].

Uopštenje klase H-normalnih matrica na prostore sa degenerativnim nedefinitnim skalarnim proizvodom izvršili su Mel i Trank u [71]. Za ove matrice jezgro matrice H je invarijantno. Uopštavajući pojam hiponormalnosti na degenerativne prostore, Hen, Mel i Trank definisali su klasu matrica koja će sadržati H-normalne matrice i imati svojstvo da je jezgro matrice H sadržano u nekom invarijantnom H-neutralnom potprostoru. Tako se u [44] dolazi do H-hiponormalnih i jako H-hiponormalnih matrica. U sekcijama 2.2 i 2.3 predstavljeni su originalni rezultati iz zajedničkog rada sa D. S. Đorđevićem [85]. Pokazano je da slični rezultati važe i za širu klasu H-kvazihiponormalnih matrica.

Neke od važnih klasa matrica u *nedegenerativnim* slučaju su:

(i) H-samoadjungovane matrice: $T^{[*]} = T$;

(ii) H-kosoadjungovane matrice: $T^{[*]} = -T$;

(iii) H-unitarne matrice: $T^{[*]} = T^{-1}$, kada je matrica T invertibilna;

(iv) H-disipativne matrice: $Im[Tx, x] = \langle \frac{1}{2i}(HT - T^*H)x, x\rangle \geq 0$ za svako $x \in \mathbb{C}^n$;

(v) H-ekspanzivne matrice: $[Tx, Tx] \geq [x, x]$ za svako $x \in \mathbb{C}^n$;

(vi) H-normalne matrice: $T^{[*]}T = TT^{[*]}$.

Ako je T matrica koja pripada nekom od pomenutih tipova, tada struktura para (T, H) ostaje invarijantna pod transformacijom:

$$(T, H) \longrightarrow (P^{-1}TP, P^*HP),$$

za neku invertibilnu matricu P. Preciznije, važi sledeća teorema.

Teorema 2.1 *([33], Teorema 4.1.3) Neka ermitske invertibilne matrice H_1 i H_2 definšu nedefinitne skalarne proizvode na $\mathbb{C}^n$ i neka je $H_2 = P^* H_1 P$ za neku invertibilnu matricu P. Tada važi: matrica T_1 je H_1-samoadjungovana (H_1-unitarna, H_1-normalna) ako i samo ako je matrica $T_2 = P^{-1} T_1 P$ H_2-samoadjungovana (H_2-unitarna, H_2-normalna, respektivno).*

Dokaz. Dokaz dajemo samo za H-samoadjungovane matrice, dok se za H-unitarne i H-normalne matrice dokaz slično izvodi.

(:⇒) Pretpostavimo da je T_1 H_1-samoadjungovana matrica. Iz (1.4) sledi da važi $H_1 T_1 = {T_1}^* H_1$. Sada je

$$\begin{aligned} H_2 T_2 &= (P^* H_1 P)(P^{-1} T_1 P) = P^* H_1 T_1 P \\ &= P^* {T_1}^* H_1 P = (P^* {T_1}^* {P_1}^{*-1})({P_1}^* H_1 P) = {T_2}^* H_2, \end{aligned}$$

čime je pokazano da je matrica T_2 H_2-samoadjungovana.

Drugi smer dokazuje se analogno. □

Pre nego što damo uopštenje klase H-normalnih matrica (i njenih potklasa H-samoadjungovanih, H-kosoadjungovanih i H-unitarnih matrica) na prostore sa degenerativnim nedefinitnim skalarnim proizvodom, iznećemo neka zapažanja do kojih su došli autori u radu [71]. U nedegenerativnom slučaju, korišćenjem zapisa $T^{[*]} = H^{-1} T^* H$ klase (i), (ii) i (iii) mogu se predstaviti i kao:

$$T^* H = HT, \qquad T^* H = -HT \quad \text{i} \quad T^* HT = H, \text{ respektivno.}$$

Jasno, na ovaj način se lako izbegava upotreba inverzne matrice H^{-1}. Upravo to jeste i glavno sredstvo koje omogućava uopštenje na degenerativan slučaj. Pri definisanju potrebnih i dovoljnih uslova za H-normalnost matrica ove matrice su imale značajno mesto u radu [69]. Unija ove tri klase nazvana je *trivijalno H-normalnim matricama.*

Matrica $T \in \mathbb{C}^{n \times n}$ je H-normalna ako komutira sa $T^{[*]}$, tj. ako važi $TT^{[*]} = T^{[*]} T$. Poslednja jednakost se može zapisati i kao

$$TH^{-1} T^* H = H^{-1} T^* HT,$$

imajući u vidu definiciju H-adjungovane matrice i invertibilnost matrice H koja indukuje nedefinitan skalarni proizvod. Jasno je da nikakvim transformacijama ovog izraza ne možemo ukloniti H^{-1}. Pokušaj uopštenja ove klase matrica išao je u dva pravca.

Prva ideja, koju su koristili autori u [14, 61, 68, 71], sastojala se u korišćenju Mur-Penrouzovog uopštenog inverza za singularnu matricu H, koji označavamo sa $H^\dagger$. Tako je H-normalna matrica definisana u degenerativnom slučaju kao matrica T za koju važi:

$$HTH^\dagger T^* H = T^* HT. \tag{2.1}$$

Tek su 2006. u radu [71] ove matrice nazvane *Mur-Penrouz H-normalnim matricama*, kako bi se naglasio tip inverza matrice H u ovoj definiciji. Taj termin ćemo i ovde koristiti.

U Uvodu je navedeno da H-samoadjungovane matrice imaju osobinu da je jezgro $N(H)$ uvek T-invarijantno (Teorema 1.17). Ovu osobinu takođe imaju i H-kosoadjungovane i H-unitarne matrice. Sledećim primerom pokazaćemo da za Mur-Penrouz H-normalne matrice $N(H)$ ne mora da bude T-invarijantan potprostor.

Primer 2.1 *Neka su* $T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ *i* $H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. *Tada je* $H^\dagger = H$ *i* (2.1) *je zadovoljeno pa matrica T jeste Mur-Penrouz H-normalna. Lako se proverava da jezgro* $N(H) = Span\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ *nije T-invarijantan potprostor.*

Ako su matrice T i H date u formi (1.18), tada važi sledeća teorema.

Teorema 2.2 *([71]) Neka su matrice T i H u formi* (1.18). *Tada je Mur-Penrouzov inverz od H dat sa*

$$H^\dagger = \begin{bmatrix} {H_1}^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Matrica T je Mur-Penrouz H-normalna ako i samo ako važi

$$\begin{bmatrix} {T_1}^* H_1 T_1 & {T_1}^* H_1 T_2 \\ {T_2}^* H_1 T_1 & {T_2}^* H_1 T_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_1 T_1 {H_1}^{-1} {T_1}^* H_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Jasno je da je matrica T Mur-Penrouz H-normalna ako i samo ako važi

$$T_2^* H_1 T_2 = 0,\ T_2^* H_1 T_1 = 0 \ \text{ i } \ T_1 \text{ je } H_1\text{-normalna}.$$

Mur-Penrouz H-normalne matrice izučavane su u radovima [61, 68, 71].

Kao što je objašnjeno u [71], korišćenje Mur-Penrouzovog inverza može biti manje pogodno u teoriji degenerativnih nedefinitnih skalarnih proizvoda. Na primer, za neku matricu T može biti zadovoljeno $T = H^\dagger T^* H$, dok $HT = T^* H$ ne važi ili obrnuto. Tako bismo došli do zabune da li matricu T treba smatrati H-samoadjungovanom ili ne.

Drugi pristup kod uopštenja klase H-normalnih matrica (i njihovih potklasa H-samoadjungovanih i H-unitarnih matrica) na prostore sa degenerativnim skalarnim proizvodom zasniva se na teoriji linearnih relacija. H-normalne metrice i linearne relacije definisane su na sledeći način:

Definicija 2.1 *([71]) Linearna relacija T na $\mathbb{C}^n$ je H-normalna ako važi*

$$TT^{[*]} \subseteq T^{[*]}T.$$

Kod definicije H-normalnosti imamo baš ovu inkluziju jer bi, u protivnom, postojala H-simetrična linearna relacija koja nije H-normalna.

Teorema 2.3 *([71]) Neka je $T \in \mathbb{C}^{n\times n}$ H-normalna matrica. Tada je $N(H)$ T-invarijantan potprostor. Specijalno, ako su matrice T i H date u formi* (1.18)*, tada važi:*

$$T \text{ je } H\text{-normalna matrica ako i samo ako je}$$

$$T_1 \ H_1\text{-normalna matrica i } T_2 = 0.$$

Sledi da je klasa H-normalnih matrica prava potklasa Mur-Penrouz H-normalnih matrica za koju je jezgro od H invarijantan potprostor.

2.2 Definicija i karakterizacija H-kvazihiponormalnih matrica

Po analogiji sa definicijom hiponormalnih operatora u Hilbertovim prostorima, u radu [67] definisane su H-hiponormalne matrice u nedegenerativnim prostorima sa nedefinitnim skalarnim proizvodom na sledeći način.

Definicija 2.2 *([67]) Matrica $T \in \mathbb{C}^{n\times n}$ je H-hiponormalna ako važi*

$$H(T^{[*]}T - TT^{[*]}) \geq 0.$$

Ako je matrica H negativno semidefinitna, klasa H-hiponormalnih matrica poklapa se sa klasom H-normalnih matrica. U slučaju da matrica H nedefintna, onda je klasa H-hiponormalnih matrica prava natklasa klase H-normalnih matrica.

Generalizacija rezultata vezanih za H-hiponormalne matrice na degenerativne prostore iziskivala je da se H-nenegativnost od $T^{[*]}T - TT^{[*]}$ posmatra u smislu linearnih relacija. Prema Definiciji 1.7, a vodeći računa da novodefinisana klasa obuhvati i H-normalne kao i Mur-Penrouz H-normalne matrice, u radu [44] data je definicija H-hiponormalnih matrica i linearnih relacija u prostorima sa (potencijalno degenerativnim) nedefinitnim skalarnim proizvodom. Takođe, data je teorema koja omogućava operativniji rad sa H-hiponormalnim matricama.

Definicija 2.3 *([44]) Linearna relacija T na $\mathbb{C}^n$ je H-hiponormalna ako $T^{[*]}T$ ima potpuni domen i ako je $T^{[*]}T - TT^{[*]}$ H-nenegativna linearna relacija.*

Teorema 2.4 *([44]) Neka su matrice $T, H \in \mathbb{C}^{n\times n}$ date u formi* (1.18)*. Tada važi: matrica T je H-hiponormalna ako i samo ako $T^{[*]}T$ ima potpun domen i ako važi*

$$y_1{}^* H_1 (T_1{}^{[*]} T_1 - T_1 T_1{}^{[*]}) y_1 \geq 0$$

za svaki vektor y_1 odgovarajuće dimenzije, koji zadovoljava uslov $T_2{}^* H_1 y_1 = 0$.

Ova teorema zapravo je direktna posledica opštijeg rezultata koji ovde navodimo sa dokazom.

Teorema 2.5 *([44]) Neka su $T, H \in \mathbb{C}^{n\times n}$ date u formi* (1.18)*. Tada je $T^{[*]}T - TT^{[*]}$ H-nenegativna linearna relacija ako i samo ako važi:*

$$y_1{}^* H_1 (T_1{}^{[*]} T_1 - T_1 T_1{}^{[*]}) y_1 \geq y_2{}^* T_2{}^* H_1 T_2 y_2$$

za sve vektore y_1 i y_2 odgovarajućih dimenzija za koje važi $T_2{}^* H_1 (T_1 y_1 + T_2 y_2) = 0$ i $T_2{}^* H_1 y_1 = 0$.

Dokaz. Linearna relacija $T^{[*]}T - TT^{[*]}$ je H-simetrična prema Lemi 3.2 iz [44] i ima oblik:

$$\left\{ \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ (T_1^{[*]} T_1 - T_1 T_1^{[*]}) y_1 + T_1^{[*]} T_2 y_2 - T_2 y_2 \\ \omega_2 - T_3 T_1^{[*]} y_1 - T_4 y_2 \end{pmatrix} : \begin{array}{c} T_2^* H_1 y_1 = 0 \\ T_2^* H_1 (T_1 y_1 + T_2 y_2) = 0 \end{array} \right\}.$$

Prema tome, $T^{[*]}T - TT^{[*]}$ je H-nenegativna linearna relacija ako i samo ako je

$$y_1{}^* H_1 (T_1^{[*]} T_1 - T_1 T_1^{[*]}) y_1 + y_1{}^* H_1 T_1{}^{[*]} T_2 y_2 - y_1{}^* H_1 T_2 y_2 \geq 0, \tag{2.2}$$

za sve y_1 i y_2 koji zadovoljavaju uslov $T_2{}^* H_1 y_1 = 0$ i $T_2{}^* H_1 (T_1 y_1 + T_2 y_2) = 0$.

Iz ovih uslova sledi:

$$y_1{}^* H_1 T_2 y_2 = 0 \quad \text{i} \quad y_1{}^* H_1 T_1^{[*]} T_2 y_2 = y_1{}^* T_1{}^* H_1 T_2 y_2 = -y_2{}^* T_2{}^* H_1 T_2 y_2.$$

Sada se (2.2) redukuje na

$$y_1{}^* H_1 (T_1{}^{[*]} T_1 - T_1 T_1{}^{[*]}) y_1 \geq y_2{}^* T_2{}^* H_1 T_2 y_2.$$

□

Na sličan način u radu [85] definisali smo H-kvazihiponormalne matrice na prostorima sa nedegenerativnim nedefinitnim skalarnim proizvodom:

Definicija 2.4 *Neka je $H \in \mathbb{C}^{n\times n}$ invertibilna ermitska matrica. Matrica $T \in \mathbb{C}^{n\times n}$ je H-kvazihiponormalna ako važi*

$$HT^{[*]}(T^{[*]}T - TT^{[*]})T \geq 0,$$

tj. ako je matrica $T^{[*]}(T^{[*]}T - TT^{[*]})T$ H-nenegativna.

Ovako definisana klasa matrica obuhvata klasu H-hiponormalnih matrica, što pokazujemo sledećom teoremom.

Teorema 2.6 *Neka je $H \in \mathbb{C}^{n\times n}$ invertibilna ermitska matrica. Ako je $T \in \mathbb{C}^{n\times n}$ H-hiponormalna matrica, tada je T i H-kvazihiponormalna matrica.*

Dokaz. Kako je $H(T^{[*]}T - TT^{[*]}) \geq 0$, dokaz sledi jednostavno iz:

$$\begin{aligned} HT^{[*]}(T^{[*]}T - TT^{[*]})T &= HH^{-1}T^*H(T^{[*]}T - TT^{[*]})T \\ &= T^*H(T^{[*]}T - TT^{[*]})T \geq 0. \end{aligned}$$

□

Pri uopštenju ove klase matrica na degenerativan slučaj (matrica H je singularna), takođe ćemo zahtevati H-nenegativnost datog izraza koji ćemo posmatrati kao linearnu relaciju. Korišćenjem drugačijeg zapisa ispitivaćemo H-nenegativnost linearne relacije $(T^{[*]})^2T^2 - (T^{[*]}T)^2$. Iz Definicije 1.7 sledi da je pre svega neophodno dokazati tvrđenje o H-simetričnosti ove linearne relacije.

Teorema 2.7 *Neka je T linearna relacija na $\mathbb{C}^n$. Tada je $(T^{[*]})^2T^2 - (T^{[*]}T)^2$ H-simetrična linearna relacija, tj. važi*

$$(T^{[*]})^2T^2 - (T^{[*]}T)^2 \subseteq ((T^{[*]})^2T^2 - (T^{[*]}T)^2)^{[*]}.$$

Dokaz. U radu [44] dokazano je da su $T^{[*]}T$ i $TT^{[*]}$ H-simetrične linearne relacije. Stoga važi:

$$(T^{[*]}T)^2 = T^{[*]}TT^{[*]}T \subseteq (T^{[*]}T)^{[*]}(T^{[*]}T)^{[*]} \subseteq \left(T^{[*]}TT^{[*]}T\right)^{[*]} = \left((T^{[*]}T)^2\right)^{[*]}.$$

Kako je još

$$T^2 \subseteq ((T^{[*]})^2)^{[*]} \text{ i } (T^{[*]})^2 \subseteq (T^2)^{[*]},$$

korišćenjem osobina linearnih relacija dobijamo konačno

$$(T^{[*]})^2T^2 - (T^{[*]}T)^2 \subseteq \left((T^2)^{[*]}T^2 - (T^{[*]}T)^2\right)^{[*]},$$

tj. $(T^{[*]})^2T^2 - (T^{[*]}T)^2$ je H-simetrična linearna relacija.

□

Pre nego što okarakterišemo linearnu relaciju $(T^{[*]})^2T^2 - (T^{[*]}T)^2$, utvrdićemo njen oblik. Kao u najvećem delu ove disertacije, podrazumevaćemo da su matrice T i H date u formi (1.18). U tom slučaju forma linearne relacije $(T^{[*]}T)^2$ je:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ T_1^{[*]}T_1T_1^{[*]}(T_1y_1 + T_2y_2) + T_1^{[*]}T_2z_2 \\ \omega_2 \end{pmatrix},$$

gde su vektori y_1, y_2, z_2 i ω_2 odgovarajućih dimenzija, za koje važi:

$$T_2^*H_1(T_1y_1 + T_2y_2) = 0 \text{ i}$$

$$T_2^*H_1T_1T_1^{[*]}(T_1y_1 + T_2y_2) + T_2^*H_1T_2z_2 = 0.$$

Kako bismo izbegli trivijani slučaj pri čemu je domen ove linearne relacije prazan, pretpostavićemo da važi uslov ${T_2}^*H_1T_2 = 0$. Pod ovim dodatnim uslovom biće:

$$(T^{[*]}T)^2 = \left\{ \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ T_1^{[*]}T_1T_1^{[*]}(T_1y_1 + T_2y_2) + T_1^{[*]}T_2z_2 \\ \omega_2 \end{pmatrix} : \begin{array}{c} T_2^*H_1T_1y_1 = 0 \\ T_2^*H_1T_1T_1^{[*]}(T_1y_1 + T_2y_2) = 0 \end{array} \right\}.$$

Slično, pod uslovom $T_2^*H_1T_2 = 0$, dobijamo da je $(T^{[*]})^2T^2$ linearna relacija:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ ({T_1}^{[*]})^2({T_1}^2 + T_2T_3)y_1 + ({T_1}^{[*]})^2(T_1T_2 + T_2T_4)y_2 \\ z_2 \end{pmatrix},$$

gde su

$${T_2}^*H_1T_1(T_1y_1 + T_2y_2) = 0 \text{ i}$$

$${T_2}^*H_1{T_1}^{[*]}T_1(T_1y_1 + T_2y_2) + {T_2}^*H_1{T_1}^{[*]}T_2(T_3y_1 + T_4y_2) = 0.$$

Konačno, linearna relacija $(T^{[*]})^2T^2 - (T^{[*]}T)^2$ ima oblik:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ {T_1}^{[*]}({T_1}^{[*]}T_1 - T_1{T_1}^{[*]})(T_1y_1 + T_2y_2) + ({T_1}^{[*]})^2T_2(T_3y_1 + T_4y_2) - {T_1}^{[*]}T_2z_2 \\ \omega_2 \end{pmatrix},$$

gde su y_1, y_2, z_2 i ω_2 vektori za koje važi:

$$ {T_2}^*H_1T_1y_1 = 0, $$

$$ \begin{aligned} {T_2}^*H_1T_1(T_1y_1 + T_2y_2) &= 0, \\ {T_2}^*H_1T_1{T_1}^{[*]}(T_1y_1 + T_2y_2) &= 0, \\ {T_2}^*H_1{T_1}^{[*]}T_1(T_1y_1 + T_2y_2) + {T_2}^*H_1{T_1}^{[*]}T_2(T_3y_1 + T_4y_2) &= 0. \end{aligned} $$

Teorema 2.8 *Neka je $T \in \mathbb{C}^{n\times n}$ matrica takva da su T i H u formi* (1.18) *i važi ${T_2}^*H_1T_2 = 0$. Tada $(T^{[*]})^2T^2 - (T^{[*]}T)^2$ je H-nenegativna linearna relacija ako i samo ako je*

$$(T_1y_1 + T_2y_2)^*H_1(T_1^{[*]}T_1 - T_1T_1^{[*]})(T_1y_1 + T_2y_2) \geq 0,$$

za sve vektore y_1 i y_2 koji zadovoljavaju sledeće uslove:

(1) $T_2^*H_1T_1y_1 = 0,$

(2) $T_2^*H_1T_1(T_1y_1 + T_2y_2) = 0,$

(3) $T_2^*H_1T_1{T_1}^{[*]}(T_1y_1 + T_2y_2) = 0,$

(4) $T_2^*H_1{T_1}^{[*]}T_1(T_1y_1 + T_2y_2) + T_2^*H_1{T_1}^{[*]}T_2(T_3y_1 + T_4y_2) = 0.$

Dokaz. Prema prethodnoj teoremi linearna relacija

$$(T^{[*]})^2T^2 - (T^{[*]}T)^2$$

je H-simetrična. Na osnovu njenog oblika i Definicije 1.7 proizilazi da važi:

$$(T^{[*]})^2T^2 - (T^{[*]}T)^2 \text{ je } H\text{-nenegativna ako i samo ako je}$$

$$\begin{aligned} &{y_1}^*H_1{T_1}^{[*]}({T_1}^{[*]}T_1 - T_1{T_1}^{[*]})(T_1y_1 + T_2y_2) \\ &+{y_1}^*H_1({T_1}^{[*]})^2T_2(T_3y_1 + T_4y_2) - {y_1}^*H_1{T_1}^{[*]}T_2z_2 \geq 0, \end{aligned}$$

pod uslovima (1) – (4).

Iz uslova (1) sledi da je ${y_1}^*H_1{T_1}^{[*]}T_2z_2 = 0$, dok uslov (2) implicira

$$y_1{}^*T_1{}^*T_1{}^*H_1T_2 = -y_2{}^*T_2{}^*T_1{}^*H_1T_2.$$

Prema tome, važi

$$y_1{}^*H_1(T_1{}^{[*]})^2T_2(T_3y_1 + T_4y_2) = -y_2{}^*T_2{}^*T_1{}^*H_1T_2(T_3y_1 + T_4y_2).$$

Iz poslednje jednakosti i uslova (4) dobijamo

$$y_1{}^*T_1{}^*H_1(T_1{}^{[*]}T_1 - T_1T_1{}^{[*]})(T_1y_1 + T_2y_2) + y_2{}^*T_2{}^*T_1{}^*H_1T_1(T_1y_1 + T_2y_2) \geq 0.$$

Nakon kraćeg računanja gornja jednakost postaje

$$\begin{aligned}(T_1y_1 + T_2y_2)^*H_1T_1{}^{[*]}T_1(T_1y_1 + T_2y_2) - (T_1y_1 + T_2y_2)^*H_1T_1T_1{}^{[*]}(T_1y_1 + T_2y_2)\\ +y_2{}^*T_2{}^*H_1T_1T_1{}^{[*]}(T_1y_1 + T_2y_2) \geq 0.\end{aligned}$$

Konačno, imajući u vidu (3), sledi

$$(T_1y_1 + T_2y_2)^*H_1(T_1{}^{[*]}T_1 - T_1T_1{}^{[*]})(T_1y_1 + T_2y_2) \geq 0.$$

$\square$

Ukoliko je matrica H invertibilna, iz definicija hiponormalnosti i kvazihiponormalnosti lako je zaključiti da H-kvazihiponormalnost neke matrice T implicira H-hiponormalnost te matrice na $R(T)$. Upravo zahtev da važi sličan rezultat i u degenerativnom slučaju (pod nešto jačim uslovom domena), pokazuje da H-nenegativnost linearne relacije iz prethodne teoreme, čak i pod uslovom $T_2^*H_1T_2 = 0$, nije dovoljna da definiše H-kvazihiponormalne matrice, što se lako pokazuje sledećim primerom.

Primer 2.2 *Neka su* $T = \left[\begin{array}{c|c} T_1 & T_2 \\ \hline T_3 & T_4 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$ *i* $H = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$.
Lako se proverava da je $T_2^*H_1T_2 = 0$. *Vektor* $y = \left(\begin{array}{c} y_{11} \\ y_{12} \\ \hline y_2 \end{array}\right)$ *pripada domenu linearne relacije* $T^{[*]}(T^{[*]}T - TT^{[*]})T$ *ako i samo ako je* $y = \left(\begin{array}{c} y_{11} \\ -y_{11} \\ \hline y_2 \end{array}\right)$.

Za takav vektor y dobijamo da je

$$(T_1y_1 + T_2y_2)^*H_1(T_1^{[*]}T_1 - T_1T_1^{[*]})(T_1y_1 + T_2y_2) = 0,$$

odakle, prema prethodnoj teoremi, sledi da je $(T^{[*]})^2T^2 - (T^{[*]}T)^2$ *H-nenegativna linearna relacija.*

S druge strane, jasno je da matrica T nije H-hiponormalna ni na jednom potprostoru od $\mathbb{C}^n$ jer uslov $T_2^*H_1T_1 = 0$ nije zadovoljen.

U cilju definisanja H-kvazihiponormalnih matrica (i linearnih relacija), imajući u vidu prethodni primer, zahtevaćemo da $T^{[*]}T$ ima potpuni domen. Konačno dajemo sledeću definiciju H-kvazihiponormalnosti.

Definicija 2.5 *Linearna relacija T na $\mathbb{C}^n$ je H-kvazihiponormalna ako $T^{[*]}T$ ima potpun domen i ako je $(T^{[*]})^2T^2 - (T^{[*]}T)^2$ H-nenegativna linearna relacija.*

Sledećom teoremom dajemo karakterizaciju H-kvazihiponormalnih matrica.

Teorema 2.9 *Neka su $T, H \in \mathbb{C}^{n\times n}$ date u formi* (1.18). *Tada je matrica T H-kvazihiponormalna ako i samo ako $T^{[*]}T$ ima potpun domen i ako važi*

$$y_1^*T_1^*H_1({T_1}^{[*]}T_1 - T_1{T_1}^{[*]})T_1y_1 \geq y_2^*T_2^*T_1^*H_1T_1T_2y_2 \tag{2.3}$$

za sve vektore y_1, y_2 odgovarajućih dimenzija koji zadovoljavaju uslov

$$T_2^*T_1^*H_1T_1(T_1y_1 + T_2y_2) = 0.$$

Dokaz. Neka linearna relacija $T^{[*]}T$ ima potpun domen, tj. neka važi

$$T_2^*H_1T_1 = 0 \quad \text{i} \quad T_2^*H_1T_2 = 0.$$

Prema Teoremi 2.8 sledi: $(T^{[*]})^2T^2 - (T^{[*]}T)^2$ je H-nenegativna ako i samo ako

$$(T_1y_1 + T_2y_2)^*H_1(T_1^{[*]}T_1 - T_1T_1^{[*]})(T_1y_1 + T_2y_2) \geq 0 \tag{2.4}$$

za sve vektore y_1, y_2 koji zadovoljavaju uslov $T_2^*H_1T_1^{[*]}T_1(T_1y_1 + T_2y_2) = 0$.

Poslednju nejednakost možemo zapisati na sledeći način:

$$\begin{gathered}
y_1^*T_1^*H_1T_1^{[*]}T_1T_1y_1 + y_1^*T_1^*H_1T_1^{[*]}T_1T_2y_2 - y_1^*T_1^*H_1T_1T_1^{[*]}T_1y_1 \\
-y_1^*T_1^*H_1T_1T_1^{[*]}T_2y_2 + y_2^*T_2^*H_1T_1^{[*]}T_1(T_1y_1 + T_2y_2) \\
-y_2^*T_2^*H_1T_1T_1^{[*]}(T_1y_1 + T_2y_2) \geq 0.
\end{gathered}$$

Kako je $T_2^*H_1T_1 = 0$ (samim tim i $T_1^{[*]}T_2 = 0$) sledi

$$y_1^*T_1^*H_1T_1T_1^{[*]}T_2y_2 = 0 \quad \text{i} \quad y_2^*T_2^*H_1T_1T_1^{[*]}(T_1y_1 + T_2y_2) = 0.$$

Iz uslova $T_2^*H_1T_1^{[*]}T_1(T_1y_1 + T_2y_2) = 0$ proizilazi

$$y_2^*T_2^*H_1T_1^{[*]}T_1(T_1y_1 + T_2y_2) = 0 \quad \text{i} \quad y_1^*T_1^*H_1T_1^{[*]}T_1T_2y_2 = -y_2^*T_2^*H_1T_1^{[*]}T_1T_2y_2.$$

Na taj način (2.4) se redukuje na

$$y_1^*T_1^*H_1({T_1}^{[*]}T_1 - T_1{T_1}^{[*]})T_1y_1 \geq y_2^*T_2^*T_1^*H_1T_1T_2y_2.$$

□

U nastavku pokazujemo da je ovako definisana klasa H-kvazihiponormalnih matrica prava natklasa H-hiponormalnih matrica. Za invertibilnu ermitsku matricu H ovaj rezultat dat je u vidu Teoreme 2.6. Sledećom teoremom dokazujemo da je svaka H-hiponormalna matrica ujedno i H-kvazihiponormalna i u degenerativnom slučaju, dok Primer 2.3 ilustruje da se ove dve klase razlikuju.

Teorema 2.10 *Svaka H-hiponormalna matrica je H-kvazihiponormalna matrica.*

Dokaz. Neka je $T \in \mathbb{C}^{n\times n}$ H-hiponormalna matrica. Bez gubljenja opštosti možemo pretpostaviti da su matrice $T, H \in \mathbb{C}^{n\times n}$ date u formi (1.18). Prema Teoremi 2.4, važi da $T^{[*]}T$ ima potpun domen, kao i da je $y_1{}^*H_1(T_1{}^{[*]}T_1 - T_1T_1{}^{[*]})y_1 \geq 0$, za svaki vektor y_1 za koji je $T_2{}^*H_1y_1 = 0$.

Neka su vektori z_1, z_2 odgovarajućih dimenzija koji zadovoljavaju uslov

$$T_2^*H_1T_1^{[*]}T_1(T_1z_1 + T_2z_2) = 0.$$

Kako je $T_2^*H_1T_1 = 0$ i $T_2^*H_1T_2 = 0$, za $y_1 = T_1z_1 + T_2z_2$ važi

$$T_2{}^*H_1y_1 = T_2{}^*H_1(T_1z_1 + T_2z_2) = 0,$$

odnosno, vektor $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ pripada domenu H-hiponormalnih matrica, za proizvoljan vektor y_2. Stoga je:

$$(T_1z_1 + T_2z_2)^*H_1(T_1{}^{[*]}T_1 - T_1T_1{}^{[*]})(T_1z_1 + T_2z_2) \geq 0.$$

Prema Teoremi 2.9 sledi da je T H-kvazihiponormalna matrica.

□

Primer 2.3 *Neka su*

$$T = \left[\begin{array}{c|c} T_1 & T_2 \\ \hline T_3 & T_4 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \; i \; H = \left[\begin{array}{c|c} H_1 & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Domen za $T^{[*]}T$ je potpun, što se lako proverava. Neka je $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ gde su $y_1 = (y_{11}, y_{12}, y_{13}, y_{14})^T$, $y_{1i}, y_2 \in \mathbb{C}$ za $i \in \{1,2,3,4\}$. Tada

$$y \in dom\left(T^{[*]}(T^{[*]}T - TT^{[*]})T\right)$$

ako i samo ako je $y = (y_{11}, -y_2, y_{13}, y_{14}, y_2)^T$.

Nakon kraćeg izračunavanja proizilazi

$$(T_1y_1+T_2y_2)^*H_1(T_1^{[*]}T_1-T_1T_1^{[*]})(T_1y_1+T_2y_2)=\overline{y_2}y_2\geq 0.$$

Prema tome, T je H-kvazihiponormalna matrica.

S druge strane, vektor $y=(y_1,y_2)^T=(1,3,0,0,y_2)^T\in dom\left(T^{[*]}T-TT^{[*]}\right)$, jer je $T_2^*H_1y_1=0$. Međutim, za takvo y_1 biće

$$y_1^*H_1(T_1^{[*]}T_1-T_1T_1^{[*]})y_1=-5<0$$

odakle sledi da T nije H-hiponormalna matrica.

Sledeća posledica pokazuje da klasa matrica iz Teoreme 2.9 zaista ima zahtevanu osobinu, tj. H-kvazihiponormalnost matrice T implicira H-hiponormalnost matrice na nekom potprostoru slike matrice T.

Posledica 2.1 *Neka su $T,H\in\mathbb{C}^{n\times n}$. Ako je T H-kvazihiponormalna matrica tada je T H-hiponormalna matrica na $R(T)\cap dom\,(T^{[*]})^2T$.*

Dokaz. Pretpostavimo da je $T\in\mathbb{C}^{n\times n}$ H-kvazihiponormalna matrica. Tada važi da je $T_2^*H_1T_2=0$, $T_2^*H_1T_1=0$ i

$$(T_1y_1+T_2y_2)^*H_1(T_1^{[*]}T_1-T_1T_1^{[*]})(T_1y_1+T_2y_2)\geq 0$$

za sve vektore y_1 i y_2 za koje je $T_2^*H_1T_1^{[*]}T_1(T_1y_1+T_2y_2)=0$.

Kako $T^{[*]}T$ ima potpun domen, sledi da $z=\begin{pmatrix} z_1\\ z_2\end{pmatrix}\in R(T)\cap \mathrm{dom}\,(T^{[*]})^2T$ ako i samo ako je $T_2^*H_1T_1^{[*]}T_1z_1=0$, pri čemu je $z_1=T_1y_1+T_2y_2$. Odavde sledi

$$T_2^*H_1z_1=T_2^*H_1(T_1y_1+T_2y_2)=0.$$

Za takav vektor z važi:

$$z_1^*H_1(T_1^{[*]}T_1-T_1T_1^{[*]})z_1=(T_1y_1+T_2y_2)^*H_1(T_1^{[*]}T_1-T_1T_1^{[*]})(T_1y_1+T_2y_2)\geq 0.$$

Prema tome, T je H-hiponormalna matrica na $R(T)\cap\mathrm{dom}(T^{[*]})^2T$.

□

Klasa H-kvazihiponormalnih matrica uopštava klase H-normalnih, Mur-Penrouz H-normalnih i H-hiponormalnih matrica. U radu [44] pokazano je da su u slučaju negativno semidefinitne matrice H, klase H-hiponormalnih i H-normalnih matrica ekvivalentne.

Posledica 2.2 *([44]) Neka je $H\in\mathbb{C}^{n\times n}$ negativno semidefinitna matrica i neka je $T\in\mathbb{C}^{n\times n}$ H-hiponormalna matrica. Tada je matrica T H-normalna.*

Uslov da je matrica H-negativno semidefinitna ne obezbeđuje ekvivalenciju klasa H-normanih i H-kvazihiponormalnih matrica. To se može prikazati sledećim primerom.

Primer 2.4 *Neka je*

$$T = \left[\begin{array}{c|c} T_1 & T_2 \\ \hline T_3 & T_4 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc|c} -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \quad i \quad H = \left[\begin{array}{c|c} H_1 & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc|c} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Očigledno je $T_2 = 0$ pa je $T_2^* H_1 y_1 = 0$ i $T_2^* H_1 T_1^{[*]} T_1 (T_1 y_1 + T_2 y_2) = 0$ za sve vektore y_1 i y_2 odgovarajućih dimenzija.

Takođe $H_1 T_1^{[*]} (T_1^{[*]} T_1 - T_1 T_1^{[*]}) T_1 = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \geq 0$, pa je T H-kvazihiponormalna matrica.

S druge strane, ${T_1}^{[*]} T_1 \neq T_1 {T_1}^{[*]}$ pa matrica T nije H-normalna. Treba napomenuti, a lako se i pokazuje, da matrica T nije ni H-hiponormalna.

2.3 Jako H-kvazihiponormalne matrice

U Sekciji 2.1 rečeno je da je za H-normalnu matricu T jezgro od H T-invarijantan potprostor. Mur-Penrouz H-normalne matrice nemaju ovu osobinu, što je ilustrovano Primerom 2.1. Međutim, za njih važi da je jezgro matrice H uvek sadržano u nekom invarijantnom H-neutralnom potprostoru. Ovu značajnu osobinu koristili su autori u radu [68], dokazujući egzistenciju maksimalnog invarijantnog H-nenegativnog potprostora za Mur-Penrouz H-normalne matrice.

Teorema 2.11 *([68], Teorema 6.6) Neka je $T \in \mathbb{C}^{n \times n}$ Mur-Penrouz H-normalna matrica. Tada postoji H-nenegativan invarijantan potprostor M takav da je dim $M = i_+(H) + i_0(H)$.*

H-hiponormalne matrice definisane u degenerativnim prostorima nemaju ovu osobinu, što otežava dolazak do sličnih rezultata. Uzrok leži u tome što je klasa H-hiponormalnih matrica suviše široka. Zato je u radu [44] definisana nova klasa matrica koja će biti njihova prava potklasa, dovoljno velika da sadrži i H-normalne i Mur-Penrouz H-normalne matrice, ali istovremeno i dovoljno mala da zadrži željenu osobinu da je $N(H)$ sadržano u nekom invarijantnom H-neutralnom potprostoru. Definisane su tzv. *jako H-hiponormalne matrice.* Definicija je opštija i odnosi se i na linearne relacije.

Definicija 2.6 *([44]) Neka je T linearna relacija na $\mathbb{C}^n$.*

(1) T je jako H-hiponormalna linearna relacija stepena $k \in \mathcal{N}$ ako je T H-hiponormalna i ako $(T^{[*]})^i T^i$ ima potpun domen za svako $i = 1, 2, \dots k$.

(2) T je jako H-hiponormalna linearna relacija ako je T jako H-hiponormalna stepena k za svako $k \in \mathcal{N}$.

Sada predstavljamo originalni rezultat kojim smo pokazali da postoji i šira klasa od jako H-hiponormalnih matrica koja će imati ovu osobinu. Takve matrice ćemo nazivati *jako H-kvazihiponormalnim matricama.*

Kao što smo pokazali u prethodnoj sekciji, klasa H-kvazihiponormalnih matrica je šira od klase H-hiponormalnih matrica, pa očigledno da i za njih u opštem slučaju jezgro matrice H nije sadržano u invarijantnom H-neutralnom potprostoru. Na sličan način, sužavanjem domena H-kvazihiponormalnih matrica (linearnih relacija), dolazimo do definicije jako H-kvazihiponormalnih matrica (linearnih relacija).

Definicija 2.7 *Neka je T linearna relacija na $\mathbb{C}^n$.*

(1) T je jako H-kvazihiponormalna linearna relacija stepena $k \in \mathcal{N}$ ako je T H-kvazihiponormalna i ako $(T^{[*]})^i T^i$ ima potpun domen za svako $i = 1, 2, \dots k$.

(2) T je jako H-kvazihiponormalna linearna relacija ako je T jako H-kvazihiponormalna stepena k za svako $k \in \mathcal{N}$.

Kao i kod jako H-hiponormalnih, i kod jako H-kvazihiponormalnih matrica nije neophodno pokazati da $(T^{[*]})T^k$ ima potpun domen za svako $k \in \mathcal{N}$, već je dovoljno to učiniti za $k \le r(H)$. Sledeće tvrđenje je direktna posledica odgovarajućeg tvrđenja iz rada [44], pa je i dokaz analogan. U njemu će biti iskorišćen rezultat da su sledeća tvrđenja ekvivalentna:

$$\begin{array}{ll} (1) & (T^{[*]})^i T^i \text{ ima potpun domen za } 1 \le \ i \ \le k, \text{ i} \\ (2) & T_2^* H_1 (T_1^{[*]})^{i-1} T_1^{i-1} T_1 = 0 \ \text{ i } \ T_2^* H_1 (T_1^{[*]})^{i-1} T_1^{i-1} T_2 = 0 \text{ za } 1 \le i \le k \end{array} \tag{2.5}$$

Teorema 2.12 *Neka je $T \in \mathbb{C}^{n \times n}$ kompleksna matrica. Ako je T jako H-kvazihiponormalna matrica stepena $k = r(H)$, tada je T jako H-kvazihiponormalna matrica.*

Dokaz. Treba dokazati da $(T^{[*]})^k T^k$ ima potpun domen za svako $k \in \mathcal{N}$. Dokaz izvodimo svođenjem na kontradikciju.

Pretpostavimo da matrica T nije jako H-kvazihiponormalna. Tada postoji prirodan broj $k \ge r(H)$ takav da je matrica T jako H-kvazihiponormalna stepena k, ali ne i stepena $k+1$. Bez gubljenja opštosti možemo pretpostaviti i da su matrice T i H u formi (1.18). Kako je prema pretpostavci T jako H-kvazihiponormalna stepena k, tada važi:

$$T_2{}^* H_1 (T_1^{[*]})^{i-1} T_1{}^{i-1} T_1 = 0 \quad \text{and} \quad T_2{}^* H_1 (T_1^{[*]})^{i-1} T_1{}^{i-1} T_2 = 0 \quad \text{za} \quad 1 \le i \le k.$$

Cilj je da dokažemo da $(T^{[*]})^{k+1}T^{k+1}$ ima potpun domen, čime dolazimo do kontradikcije sa pretpostavkom da T nije jako H-kvazihiponormalna stepena $k+1$. Pokazaćemo da je

$$T_2^* H_1(T_1^{[*]})^k T_1^k T_1 = 0 \quad \text{and} \quad T_2^* H_1(T_1^{[*]})^k T_1^k T_2 = 0. \tag{2.6}$$

Očigledno je T_1 podmatrica dimenzije $m \times m$, gde je $m = r(H)$. Prema Teoremi Kejli-Hamiltona postoje kompleksni brojevi $\alpha_0, \ldots, \alpha_{m-1} \in \mathbb{C}$ takvi da važi $(T_1^{[*]})^m = \sum_{i=0}^{m-1} \alpha_i (T_1^{[*]})^i$. Sada važi $(T_1^{[*]})^k = (T_1^{[*]})^{k-m} \sum_{i=0}^{m-1} \alpha_i (T_1^{[*]})^i$.

Prema tome,

$$\begin{aligned} {T_2}^* H_1(T_1^{[*]})^k {T_1}^k T_1 &= \sum_{i=0}^{m-1} \alpha_i {T_2}^* H_1 (T_1^{[*]})^{k-m+i} {T_1}^k T_1 \\ &= \sum_{i=0}^{m-1} \alpha_i {T_2}^* H_1 (T_1^{[*]})^{k-m+i} {T_1}^{k-m+i} T_1 {T_1}^{m-i} = 0 \end{aligned}$$

i

$$\begin{aligned} {T_2}^* H_1(T_1^{[*]})^k {T_1}^k T_2 &= \sum_{i=0}^{m-1} \alpha_i {T_2}^* H_1 (T_1^{[*]})^{k-m+i} {T_1}^k T_2 \\ &= \sum_{i=0}^{m-1} \alpha_i {T_2}^* H_1 (T_1^{[*]})^{k-m+i} {T_1}^{k-m+i} T_1 {T_1}^{m-i+1} T_2 = 0, \end{aligned}$$

što je kontradikcija sa pretpostavkom. Stoga je T jako H-kvazihiponormalna matrica.

□

Sledećom teoremom dajemo karakterizaciju jako H-kvazihiponormlalnih matrica.

Teorema 2.13 *Matrica T je jako H-kvazihiponormalna ako i samo ako je*

$$ {y_1}^* {T_1}^* H_1({T_1}^{[*]} T_1 - T_1 {T_1}^{[*]}) T_1 y_1 \geq 0$$

za sve y_1, pri čemu je

$$ {T_2}^* H_1 (T_1^{[*]})^{i-1} {T_1}^{i-1} T_1 = 0 \qquad i \quad {T_2}^* H_1 (T_1^{[*]})^{i-1} {T_1}^{i-1} T_2 = 0$$

za svako $1 \leq i \leq k$, gde je $k = r(H)$.

Dokaz. Dokaz sledi iz Teoreme 2.9 o karakterizaciji H-kvazihiponormalnih matrica, Teoreme 2.13 i ekvivalencije uslova (2.5).

□

Klasa jako H-hiponormalnih matrica je potklasa jako H-kvazihiponormalnih matrica. Ove dve klase se ne poklapaju, što se može pokazati sledećim primerom.

Primer 2.5 *Neka su*

$$T = \left[\begin{array}{c|c} T_1 & T_2 \\ \hline T_3 & T_4 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc|c} -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \quad i \quad H = \left[\begin{array}{c|c} H_1 & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Kako je $T_2 = 0$, sledi

$$T_2{}^* H_1 (T_1^{[*]})^{i-1} T_1{}^{i-1} T_1 = 0 \quad i \quad T_2{}^* H_1 (T_1^{[*]})^{i-1} T_1{}^{i-1} T_2 = 0 \text{ za sve } i = 1, 2,$$

tako da $(T^{[*]})^2 T^2$ ima potpun domen.

Takođe, $T_2^* H_1 T_1^{[*]} T_1 (T_1 y_1 + T_2 y_2) = 0$ važi za sve vektore y_1 i y_2 odgovarajućih dimenzija.

Sada je

$$T_1^{[*]} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \quad i \quad H_1(T_1^{[*]} T_1 - T_1 T_1^{[*]}) = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Na osnovu Teoreme 2.13 važi

$$(T_1 y_1 + T_2 y_2)^* H_1 (T_1^{[*]} T_1 - T_1 T_1^{[*]})(T_1 y_1 + T_2 y_2)$$

$$= y_1^* \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} y_1 = y_1^* \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} y_1$$

$$= \begin{pmatrix} y_{11}^* & y_{12}^* \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} y_{11} \\ y_{12} \end{pmatrix} = (2y_{11} - y_{12})^* (2y_{11} - y_{12}) \geq 0,$$

čime se pokazuje da je T jako H-kvazihiponormalna matrica.

S druge strane, $T_2^* H_1 y_1 = 0$ za sve y_1, ali $H_1(T_1^{[*]} T_1 - T_1 T_1^{[*]}) = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ što nije nenegativno, tj. T nije jako H-hiponormalna matrica.

Takođe, klasa jako H-kvazihiponormalnih matrica ne poklapa se sa klasom H-kvazihiponormalnih matrica. Kao ilustraciju ove činjenice možemo uzeti Primer 2.3. U ovom primeru pokazano je da je data matrica T H-kvazihiponormalna. Ova matrica nije i jako H-kvazihiponormalna što sledi iz $T_2^* H_1 T_1^{[*]} T_1 T_1 \neq 0$.

Sledećom teoremom dajemo vezu između Mur-Penrouz H-normalnih matrica, H-kvazihiponormalnih i jako H-kvazihiponormalnih matrica. Sličan rezultat za Mur-Penrouz H-normalne matrice i (jake) hiponormalnosti može se naći u [44].

Teorema 2.14 *Neka su $T, H \in \mathbb{C}^{n\times n}$ date u formi* (1.18). *Sledeća tvrđenja su ekvivalentna:*

(i) T je Mur-Penrouz H-normalna matrica;

(ii) T je jako H-kvazihiponormalna matrica i T_1 je H_1-normalna;

(iii) T je H-kvazihiponormalna matrica i T_1 je H_1-normalna.

Dokaz. $(i) \Rightarrow (ii)$ Pokazano je da ako je T Mur-Penrouz H-normalna matrica tada je T_1 H_1-normalna matrica i T je jako H-hiponormalna, pa samim tim i jako H-kvazihiponormalna matrica.

$(ii) \Rightarrow (iii)$ Implikacija sledi iz definicije jako H-kvazihiponormalnih matrica.

$(iii) \Rightarrow (i)$ Neka je T H-kvazihiponormalna matrica. Tada je ${T_2}^*H_1T_2 = 0$ i $T_2^*H_1T_1 = 0$. Uz uslov da je T_1 H_1-normalna matrica i Leme 5.1. u [44], sledi (i).

$\square$

Iz Teoreme 2.14 i prethodnog razmatranja sledi da u specijalnom slučaju kada je T_1 H_1-normalna matrica, važi sledeća posledica.

Posledica 2.3 *Neka su $T, H \in \mathbb{C}^{n\times n}$ date u formi* (1.18)*, pri čemu je T_1 H_1-normalna matrica. Tada su sledeća tvrđenja ekvivalentna:*

(1) T je Mur-Penrouz H-normalna matrica;

(2) T je H-hiponormalna matrica;

(3) T je jako H-hiponormalna matrica;

(4) T je H-kvazihiponormalna matrica;

(5) T je jako H-kvazihiponormalna matrica.

2.4 Invarijantni semidefinitni potprostori za H-kvazihiponormalne matrice

Poznata je teorema koji daje uslove kada se za neku H-normalnu matricu H-nenegativan invarijantan potprostor može proširiti do maksimalnog. Ovaj rezultat se može naći u radu [3].

Teorema 2.15 *([3])Neka je $T \in \mathbb{C}^{n\times n}$ H-normalna matrica i $M_0 \subseteq \mathbb{C}^n$ T-invarijantan H-nenegativan potprostor koji je invarijantan i za $T^{[*]}$. Tada postoji T-invarijantan maksimalan H-nenegativan potprostor M koji sadrži M_0.*

U opštem slučaju za neku H-normalnu matricu T, T-invarijantan potprostor *ne mora* biti invarijantan i za $T^{[*]}$. Kao što je pokazano sledećom teoremom preuzetom iz rada [67], ovo jeste slučaj ukoliko je H-nenegativan potprostor koji se posmatra i *maksimalan.*

Teorema 2.16 *([67]) Neka je $H \in \mathbb{C}^{n\times n}$ ermitska invertibilna i $T \in \mathbb{C}^{n\times n}$ H-normalna matrica. Ako je $M \subseteq \mathbb{C}^n$ T-invarijantan maksimalan H-nenegativan potprostor, tada je M $T^{[*]}$-invarijantan potprostor.*

Dokaz. Korišćenjem transformacija $T \longrightarrow P^{-1}TP$, $H \longrightarrow P^*HP$, bez gubljenja opštosti, možemo pretpostaviti da prvih m vektora razapinje potprostor M, kao i da su matrice T i H date u obliku:

$$T = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} & T_{14} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} & T_{24} \\ 0 & 0 & T_{33} & T_{34} \\ 0 & 0 & T_{43} & T_{44} \end{bmatrix} \quad \text{i} \quad H = \begin{bmatrix} I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -I \end{bmatrix}. \tag{2.7}$$

Zaista, ovaj oblik sledi iz dekompozicije potprostora $M = M_p \oplus M_0$, na H-neutralan potprostor M_0 i njegov ortogonalni komplement M_p u M, kao i odabirom nekog H-neutralnog potprostora M_{sl} koji je koso povezan za M_0. Tada je H-ortogonalan komplement od $M \dot{+} M_{sl}$ obavezno i H-negativan potprostor, s obzirom na maksimalnost potprostora M. Birajući pogodnu bazu ovih potprostora, dolazimo do odgovarajuće dekompozicije. Iz (2.7) proizilazi

$$T^{[*]} = \begin{bmatrix} {T_{11}}^* & 0 & {T_{21}}^* & 0 \\ {T_{13}}^* & {T_{33}}^* & {T_{23}}^* & -{T_{43}}^* \\ {T_{12}}^* & 0 & {T_{22}}^* & 0 \\ -{T_{14}}^* & -{T_{34}}^* & -{T_{24}}^* & {T_{44}}^* \end{bmatrix}. \tag{2.8}$$

Stoga je

$$T^{[*]}T - TT^{[*]} =$$

$$\begin{bmatrix} * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ * & {T_{12}}^*T_{12} + T_{34}{T_{34}}^* & * & * \\ * & * & * & {T_{44}}^*T_{44} - {T_{14}}^*T_{14} - {T_{24}}^*T_{34} - T_{34}^*T_{24} - T_{44}{T_{44}}^* \end{bmatrix}. \tag{2.9}$$

Pošto je T H-normalna matrica, tj. važi da je $T^{[*]}T - TT^{[*]} = 0$, iz bloka na mestu 3.2 u matrici (2.9) lako se dobija da je $T_{12} = 0$, kao i da je $T_{34} = 0$. Sada će blok 4.4 izgledati na sledeći način:

$${T_{44}}^*T_{44} - T_{44}{T_{44}}^* = {T_{14}}^*T_{14} \geq 0. \tag{2.10}$$

Na osnovu tragova matrica sa obe strane jednakosti (2.10), važi $T_{14} = 0$, čime se konačno iz (2.8) dobija da je M invarijantan potprostor i za $T^{[*]}$.

□

Na sličan način može se pokazati da Teorema 2.16 važi ako umesto maksimalnog H-nenegativnog posmatramo maksimalan H-nepozitivan potprostor. U tom slučaju ovaj rezultat važiće i za širu klasu matrica - za H-hiponormalne matrice. Preciznije, u radu [66] data je teorema koju navodimo u nastavku.

Teorema 2.17 *([66]) Neka je $H \in \mathbb{C}^{n\times n}$ ermitska invertibilna i $T \in \mathbb{C}^{n\times n}$ H-hiponormalna matrica. Ako je $M \subseteq \mathbb{C}^n$ T-invarijantan maksimalan H-nepozitivan potprostor, tada je M $T^{[*]}$-invarijantan potprostor.*

Dokaz. Dokaz se izvodi slično dokazu prethodne teoreme, s tim što se pri transformaciji matrica T i H i dekompoziciji potprostora M dobija

$$T = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} & T_{14} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} & T_{24} \\ 0 & 0 & T_{33} & T_{34} \\ 0 & 0 & T_{43} & T_{44} \end{bmatrix} \quad \text{i} \quad H = \begin{bmatrix} -I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I \end{bmatrix}, \tag{2.11}$$

kao i

$$T^{[*]} = \begin{bmatrix} {T_{11}}^* & 0 & {T_{21}}^* & 0 \\ {T_{13}}^* & {T_{33}}^* & {T_{23}}^* & -{T_{43}}^* \\ {T_{12}}^* & 0 & {T_{22}}^* & 0 \\ -{T_{14}}^* & -{T_{34}}^* & -{T_{24}}^* & {T_{44}}^* \end{bmatrix}.$$

Imajući u vidu da je T H-hiponormalna matrica, iz uslova $H(T^{[*]}T - TT^{[*]}) \geq 0$ sledi da je $T_{12} = 0$, $T_{14} = 0$ i $T_{34} = 0$, čime je tvrđenje dokazano.

□

U nastavku pokazujemo da ovaj rezultat ne važi za H-kvazihiponormalne matrice. To ilustrujemo originalnim rezultatom iz neobjavljenog rada [92], u vidu sledećeg primera.

Primer 2.6 *Neka su date matrice* $H = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ *i* $T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ *i potprostor* $M = Span\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$. *Matrica H je ermitska i invertibilna. Lako* *se izračunava da je* $T^{[*]} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. *Sada je*

$$HT^{[*]}(T^{[*]}T - TT^{[*]})T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \geq 0,$$

čime se pokazuje da je T H-kvazihiponormalna matrica.
Napomenućemo još i da T nije H-hiponormalna matrica, što se jednostavno dobija iz

$$H(T^{[*]}T - TT^{[*]}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \ngeq 0$$

Potprostor M je T-invarijantan. Zaista, iz $x \in M$ sledi $x = \begin{pmatrix} a+b & b & 0 & 0 \end{pmatrix}^T$, za proizvoljne $a, b \in \mathbb{C}$, dok je $Tx = \begin{pmatrix} a+b & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^T \in M$, pa je $TM \subseteq M$.

Potprostor M je i H-nepozitivan (preciznije, u ovom slučaju on je H-negativan). Lako je proveriti da za $x = \begin{pmatrix} a+b & b & 0 & 0 \end{pmatrix}^T \in M$ važi $[x, x] = x^*Hx = -|a+b|^2$.

Sopstvene vrednosti matrice H su $\lambda_1 = 1$ (sa višestrukošću 2) i $\lambda_2 = -1$ (takođe sa višestrukošću 2), pa je prema Teoremi 1.10 (1), potprostor M maksimalan.

Kako je $T^{[*]} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^T \notin M$, sledi da potprostor M nije invarijantan za $T^{[*]}$.

Pod kojim uslovima se za H-hiponormalne matrice (gde je H-invertibilna matrica) H-nepozitivan invarijantan potprostor može proširiti do maksimalnog, odgovoreno je u radu [66].

Teorema 2.18 *([66]) Neka je T H-hiponormalna matrica i M H-nepozitivan potprostor koji je invarijantan za T. Označimo sa M_0 izotropni deo od M i izvršimo dekompoziciju $M^{[\perp]}$ na sledeći način:*

$$M^{[\perp]} = M \dot{+} M_{nd}, \tag{2.12}$$

za neki nedegenerativan potprostor M_{nd}. Označimo sa T_{44} i H_4 restrikciju od T i H na M_{nd}, respektivno. Pretpostavimo da je M_0 $T^{[*]}$-invarijantno i da važi neki od sledećih uslova:

(i) $\sigma\ (T_{44} + {T_{44}}^{[*]}) \subset \mathcal{R}$;

(ii) $\sigma\ (T_{44} - T_{44}{}^{[*]}) \subset i\mathcal{R}$;

(iii) T_{44} *je* H_4*-normalna matrica.*

Tada se M *može proširiti do maksimalnog* H*-nepozitivnog potprostora* M_- *koji je invarijantan i za* T *i za* $T^{[*]}$. *Uslovi (i) – (iii) ne zavise od izbora nedegenerativnog potprostora* M_{nd} *u* (2.12).

U radu [44] autori su dali dovoljne uslove pod kojima se za jako H-hiponormalnu matricu T može naći T-invarijantan potprostor koji će sadržati jezgro matrice H, a zatim i kako se takav potprostor može proširiti do maksimalnog H-nepozitivnog potprostora. Sledećom teoremom pokazuje se da je za jako H-hiponormalnu matricu T, jezgro od H uvek sadržano u T-invarijantnom H-neutralnom potprostoru.

Teorema 2.19 *([44]) Neka je* $T \in \mathbb{C}^{n\times n}$ *jako* H*-hiponormalna matrica. Neka je* M *najmanji* T*-invarijantan potprostor koji sadrži jezgro matrice* H*. Tada je potprostor* M H*-neutralan. Specijalno, ako su* T *i* H *date u formi* 1.18, *tada važi dekompozicja*

$$M = M_0[\dot{+}]N(H)$$

gde je M_0 *(kanonički identifikovan sa potprostorom od* $\mathbb{C}^m$*)* H_1*-neutralan i najmanji* T_1*-invarijantan potprostor koji sarži sliku od* T_2.

Dokaz. Bez gubljenja opštosti možemo pretpostaviti da su matrice T i H date u formi (1.18), gde su $T_1 \in \mathbb{C}^{m\times m}$ i $T_2 \in \mathbb{C}^{m\times(n-m)}$. Neka je

$$X = [\ T_2 \quad T_1T_2 \quad \dots \quad T_1{}^{m-1}T_2\ ] \qquad \text{i} \qquad M_0 = ImX,$$

tj. M_0 je kontrolisani potprostor za par (T_1, T_2). M_0 dobijen na taj nav cin predstavlja najmanji T_1-invarijantni potprostor koji sadrži sliku od T_2. Odatle sledi da postoje matrice B i C odgovarajućih dimenzija takve da važi:

$$T_1X = XB \quad \text{i} \quad T_2 = XC.$$

Sada identifikujemo M_0 sa potprostorom od $\mathbb{C}^n$ i definišemo

$$\widetilde{M} := M_0\dot{+}kerH = Im\begin{bmatrix} X & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \subseteq \mathbb{C}^n.$$

Tada $\widetilde{M}$ sadrži $kerH$ i iz

$$T\begin{bmatrix} X & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_1X & T_2 \\ T_3X & T_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}\begin{bmatrix} B & C \\ T_3X & T_4 \end{bmatrix}$$

sledi da je $\widetilde{M}$ T-invarijantan potprostor. Štaviše, kako je

$$T(N(H)) = Im\begin{bmatrix} T_2 \\ T_4 \end{bmatrix}$$

$\widetilde{M}$ je najmanji T-invarijantan potprostor koji sadrži $N(H)$. Prema tome, svaki T-invarijantan potprostor koji sadrži $N(H)$ mora da sadrži i M_0. Ostaje da se pokaže da je $\widetilde{M} = M$ H-neutralan potprostor, ili (što je ekvivalentno) da je M_0 H_1-neutralan potprostor. Neka je $x \in \mathbb{C}^{(n-m)}$ i $\alpha_i \in \mathbb{C}$, $i = 1, \ldots, m$ takvi da je

$$x = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i {T_1}^{i-1} T_2 x_i.$$

Koristeći činjenicu da $({T_1}^{[*]})^i {T_1}^i$ ima potpun domen za svako i, tj. da važi

$${T_2}^* H_1 ({T_1}^{[*]})^{i-1} {T_1}^{i-1} T_1 = 0 \;\; \text{i} \;\; {T_2}^* H_1 ({T_1}^{[*]})^{i-1} {T_1}^{i-1} T_2 = 0, \text{ za svako i, dobijamo}$$

$$\begin{aligned} x^* H_1 x &= \sum_{i,j=1}^{m} \alpha_i \overline{\alpha_j} {x_j}^* {T_2}^* H_1 ({T_1}^{[*]})^{j-1} {T_1}^{i-1} T_2 x_i \\ &= \sum_{i,j=1}^{m} \alpha_i \overline{\alpha_j} {x_j}^* ({T_2}^* H_1 ({T_1}^{[*]})^{i-1} {T_1}^{j-1} T_2)^* x_i = 0, \end{aligned}$$

odakle sledi da je M_0 H_1-neutralan potprostor.

□

Teorema 2.20 *([44]) Neka je T jako H-hiponormalna matrica i neka je M najmanji T-invarijsntan potprostor koji sadrži $N(H)$ (koji je H-neutralan prema Teoremi 2.19). Neka je data dekompozicija potprostora $M^{[\perp]}$ na sledeći način:*

$$M^{[\perp]} = M \dot{+} M_{nd}, \tag{2.13}$$

za neki nedegenerativan potprostor M_{nd}. Označimo sa $\widetilde{T}_{33}$ i $\widetilde{H}_3$ restrikciju T i H na M_{nd}, respektivno. Tada je $\widetilde{H}_3$ invertibilna matrica. Pretpostavimo da je M invarijantan potprostor za $T^{[*]}$ i da važi neki od sledećih uslova:

(i) $\sigma\ (\widetilde{T}_{33} + \widetilde{T}_{33}^{[*]}) \subset \mathcal{R}$;

(ii) $\sigma\ (\widetilde{T}_{33} - \widetilde{T}_{33}^{[*]}) \subset i\mathcal{R}$;

(iii) $\widetilde{T}_{33}$ *je H_3-normalna matrica.*

Tada se M može proširiti do maksimalnog H-nepozitivnog potprostora M^-, koji je invarijantan za T. Uslovi (i) – (iii) ne zavise od izbora nedegenerativnog potprostora M_{nd} u (2.13).

Da bismo izvršili slična uopštenja i za jako H-kvazihiponormalne matrice, trebalo bi dati odgovarajuće rezultate za H-kvazihiponormalne matrice u nedegenerativnom slučaju. Neke od teorema koje su važne za dokazivanje ovakvih rezultata zahtevaju dodatne uslove kada su u pitanju H-kvazihiponormalne matrice. Jedna od takvih je i sledeća teorema (preuzeta iz [67]), za koju Primerom 2.7 pokazujemo da ne važi ako H-hiponormalnost matrice zamenimo H-kvazihiponormalnošću.

Teorema 2.21 *([67]) Neka je T H-hiponormalna matrica pri čemu je sa $A = \frac{1}{2}(T + T^{[*]})$ i $S = \frac{1}{2}(T - T^{[*]})$ označen njen H-samoadjungovan i H-kosoadjungovan deo, respektivno.*

1. *Ako spektralni potprostor od A, pridružen realnom delu spektra od A nije H-negativan (nije H-pozitivan, respektivno), tada postoji zajednički sopstveni vektor za A i S koji odgovara realnoj sopstvenoj vrednosti od A koji je H-nenegativan (H-nepozitivan, respektivno).*

2. *Ako spektralni potprostor od S, pridružen imaginarnom delu spektra (koji potencijalno uključuje i nulu) od S nije H-negativan (nije H-pozitivan, respektivno), tada postoji zajednički sopstveni vektor za A i S koji odgovara imaginarnoj sopstvenoj vrednosti od S i koji je H-nenegativan (H-nepozitivan, respektivno).*

Primer 2.7 *Neka je $T = \begin{bmatrix} 0 & 1-ib & 0 \\ -ib & 0 & 1-ib \\ 0 & -ib & 0 \end{bmatrix}$, gde je b proizvoljni realan broj i neka je $H = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. Tada je*

$$T^{[*]} = \begin{bmatrix} 0 & 1+ib & 0 \\ ib & 0 & 1+ib \\ 0 & ib & 0 \end{bmatrix}$$

i očigledno važi

$$HT^{[*]}(T^{[*]}T - TT^{[*]})T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4b^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \geq 0,$$

pa je T H-kvazihiponormalna matrica. Njen H-samoadjungovani i H-kosoadjungovani deo respektivno biće

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad i \qquad S = \begin{bmatrix} 0 & -ib & 0 \\ -ib & 0 & -ib \\ 0 & -ib & 0 \end{bmatrix}.$$

Spektralni potprostor od A koji odgovara realnom spektru je $U = Span\{e_1\}$ i on nije H-negativan. Jedini sovstveni vektor od A je e_1, koji je istovremeno i sopstveni vektor od S samo u slučaju kada je $b = 0$.

Dakle, za $b \neq 0$, A i S nemaju zajednički sopstveni vektor.

Za $b = 0$, matrica T je i H-hiponormalna i u tom slučaju A i S zaista imaju zajednički sopstveni vektor.

Možemo generalizovati rezultat dat Teoremom 2.19 i na jako H-kvazihiponormalne matrice. Tehnika i uslovi koji su bili zadati za jako H-hiponormane matrice mogu se i ovde primeniti. Bitan uslov pri dokazivanju ove teoreme jeste potpunost domena za $({T_1}^{[*]})^i {T_1}^i$, za svako $i \in \mathcal{N}$. Jasno, kako je ovaj uslov isti i za jako H-hiponormalne matrice i za jako H-kvazihiponormalne matrice, dokaz bi bio potpuno isti kao i dokaz Teoreme 2.19, pa ga zato izostavljamo.

Teorema 2.22 *Neka je $T \in \mathbb{C}^{n\times n}$ jako H-kvazihiponormalna matrica. Neka je M najmanji T-invarijantan potprostor koji sadrži jezgro matrice H. Tada je potprostor M H-neutralan. Specijalno, ako su T i H date u formi* (1.18)*, tada važi dekompozicja*

$$M = M_0[\dot{+}]N(H),$$

gde je M_0 (kanonički identifikovan sa potprostorom od $\mathbb{C}^m$) H_1-neutralan i najmanji T_1-invarijantan potprostor koji sarži sliku od T_2.

3 Mur-Penrouzov inverz

3.1 Uopšteni inverzi

Matrica $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ je regularna ako je $r(A) = n$. Tada za nju postoji jedinstveno određena matrica $B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ takva da je $AB = BA = I_n$. U tom slučaju matricu B nazivamo inverzom matrice A i označavamo je sa A^{-1}.

Osobine inverzne matrice dobro su poznate i date su u sledećoj teoremi.

Teorema 3.1 *Neka su $A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ regularne matrice. Tada važi:*

(i) $(A^{-1})^{-1} = A$;

(ii) A^T *je regularna i važi* $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$;

(iii) A^* *je regularna i važi* $(A^*)^{-1} = (A^{-1})^*$;

(iv) AB *i* BA *su regularne i važi* $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

Kod mnogih matematičkih problema od interesa nam je da posmatramo samo neke (a ne sve) osobine inverzne matrice. Tako možemo doći do neke vrste inverza za matrice koje nisu kvadratne, a samim tim ni invertibilne.

Uopšteni (generalisani) inverz ili pseudoinverz neke matrice predstavlja matricu koja zadovoljava neke bitne osobine, kao npr.

(1) postoji za klasu matrica koja je šira od klase invertibilnih matrica,

(2) poseduje neka svojstva običnog inverza,

(3) ako je matrica invertibilna, poklapa se sa običnim inverzom.

Uopšteni inverzi su nastali iz potrebe da se reše praktični problemi vezani za integralne i diferencijalne jednačine. Pojam "pseudoinverz" prvo se javio u teoriji operatora, a tek kasnije je počeo da se izučava kod matrica, što je u matematici vrlo redak slučaj. Prvi put se pominju početkom, dok ozbiljna teorija uopštenih inverza počinje ubrzano da se razvija od sredine dvadesetog veka. Švedski matematičar E. I. Fredholm 1903. godine u radu [31] uveo je pojam "pseudoinverz" za integralne operatore. Godinu dana kasnije, nemački matematičar D. Hilbert pominje generalisani inverz diferencijalnih operatora [45]. U narednim godinama uopšteni inverzi bili su predmet proučavanja manjeg broja matematičara, od kojih je značajniji doprinos u ovoj oblasti dao Hurvic (Hurwitz, 1912).

Američki matematičar E. H. Mur (E. H. Moore, 1862–1932) intenzivno je izučavao uopštene inverze na matricama u drugoj deceniji dvadesetog veka. Godine 1920. na skupu Američkog matematičkog društva, Mur predstavlja rezultate vezane za ovaj inverz, koji je on nazvao "*general reciprocal*". U radovima [75, 76] pokazao je egzistenciju i jedinstvenost, kao i osobine takvog inverza za singularne kvadratne matrice. Takođe, ukazao je i na mogućnost primene istih kod rešavanja linearnih jednačina. Ipak, njegov rad dugo je ostao nezapažen. Smatra se da je uzrok tome vrlo komplikovana notacija koju je pritom koristio. Vezom između Murovog inerza i rešenja linearnih jednačina uspešno se bavio A. Bjerhamar (A. Bjerhammar) u radovima [9, 10] iz 1951, kao i [11] iz 1958. godine.

Konačno je 1955. godine R. Penrouz (R. Penrose), engleski matematičar i fizičar, u [81] nezavisno od Mura, dao novu definiciju i potpuno algebarsku karakterizaciju ovog inverza. U modernoj teoriji uopštenih inverza ovaj inverz se naziva *Mur-Penrouzov inverz.*

Mur-Penrouzov inverz kompleksne matrice dimenzije $m \times n$ uvodi se na sledeći način:

Definicija 3.1 *Neka je $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$. Matrica $X \in \mathbb{C}^{n\times m}$ koja zadovoljava jednakosti*

$$AXA = A, \tag{1}$$

$$XAX = X, \tag{2}$$

$$(AX)^* = AX, \tag{3}$$

$$(XA)^* = XA, \tag{4}$$

naziva se Mur-Penrouzov inverz matrice A i označava sa $X = A^\dagger$.

Jednačine (1)–(4) iz Definicije 3.1 nazivamo *Penrouzovim jednačinama.* Poznato je da za svaku matricu $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$ postoji jedinstvena matrica $X \in \mathbb{C}^{n\times m}$ koja zadovoljava ove četiri jednačine, tj. za svaku matricu postoji jedinstveni Mur-Penrouzov inverz, što je pokazao Penrouz u radu [81]. Jasno je da ukoliko je matrica $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ invertibilna, tada važi da je $A^\dagger = A^{-1}$.

Teorema 3.2 *([81]) Za proizvoljnu matricu $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$ Penrouzove jednačine $(1)-(4)$ imaju jedinstveno zajedničko rešenje.*

Osobine Mur-Penrouzovog inverza se mogu naći u literaturi. Sledećom teoremom navedene su neke od njih.

Teorema 3.3 *([8]) Za proizvoljnu matricu $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$ i $\lambda \in \mathbb{C}$ važe sledeće osobine:*

(i) $(A^\dagger)^\dagger = A$;

(ii) $(A^\dagger)^* = (A^*)^\dagger$;

(iii) $(\lambda A)^\dagger = \lambda^\dagger A^\dagger$, *gde je* $\lambda^\dagger = \begin{cases} \lambda^{-1}, & \lambda \neq 0, \\ 0, & \lambda = 0; \end{cases}$

(iv) $A^* = A^*AA^\dagger$ *i* $A^* = A^\dagger AA^*$*;*

(v) $(A^*A)^\dagger = A^\dagger(A^\dagger)^*$ *i* $(AA^*)^\dagger = (A^*)^\dagger A^\dagger$*;*

(vi) $A^\dagger = (A^*A)^\dagger A^* = A^*(AA^*)^\dagger$*;*

(vii) $A = AA^*(A^*)^\dagger$ *i* $A = (A^*)^\dagger A^*A$*;*

(viii) $(UAV)^\dagger = V^*A^\dagger U^*$ *ako i samo ako su* U *i* V *unitarne matrice.*

Ako matricu $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$ posmatramo kao liearan operator iz $\mathbb{C}^n$ u $\mathbb{C}^m$, na kojima su definisani težinski skalarni proizvodi sa:

$$\langle x, y\rangle = y^*Nx, \quad x, y \in \mathbb{C}^n, \qquad \langle x, y\rangle_M = y^*Mx, \ x, y \in \mathbb{C}^m, \tag{3.1}$$

pri čemu su matrice $N \in \mathbb{C}^{n\times n}$ i $M \in \mathbb{C}^{m\times m}$ pozitivno definitne, kao prirodno uopštenje dobija se *težinski Mur-Penrouzov inverz.*

Definicija 3.2 *([8]) Neka je* $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$ *i neka su* M *i* N *pozitivno definitne matrice reda* m *i* n*, respektivno. Težinski Mur-Penrouzov inverz matrice* A *je jedinstvena matrica* $X = A^\dagger{}_{M,N} \in \mathbb{C}^{n\times m}$ *takva da je*

(1) $AXA = A$;

(2) $XAX = X$;

(3M) $(MAX)^* = MAX$;

(4N) $(NXA)^* = NXA$.

Ako je $M = I_m$ *i* $N = I_n$*, tada je* $A^\dagger{}_{M,N} = A^\dagger$*.*

Za matricu $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$ sa $A\{i, j, \ldots, k\}$ označavamo skup svih matrica $X \in \mathbb{C}^{n\times m}$ koje zadovoljavaju Penrouzove jednačine $(i), (j), \ldots, (k)$. Matrica $X \in A\{i, j, \ldots, k\}$ se naziva $\{i, j, \ldots, k\}$-inverz od A i često se označava sa $A^{(i,j,\ldots,k)}$. Pored Mur-Penrouzovog inverza matrice $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$ koji zadovoljava sve četiri jednačine, bitno je pomenuti i sledeće inverze. Matrica $X \in \mathbb{C}^{n\times m}$ je

- unutrašnji inverz (g-inverz) matrice A, ako $X \in A\{1\}$,
- spoljašni inverz matrice A, ako $X \in A\{2\}$,
- refleksivni inverz matrice A, ako $X \in A\{1, 2\}$.

Za matricu $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$ unutrašnji inverz se označava sa $A^{(1)}$. Ovaj inverz postoji za svaku matricu, ali nije jedinstven. Osobine unutrašnjeg inverza iskazane su sledećom teoremom iz [8].

Teorema 3.4 *([8]) Neka je $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$ i $\lambda \in \mathbb{C}$. Tada važi:*

(1) $(A^{(1)})^* \in A^*\{1\}$;

(2) Ako je A regularna matrica, tada je $A^{(1)} = A^{-1}$;

(3) $\lambda^\dagger A^{(1)} \in (\lambda A)\{1\}$, *gde je* $\lambda^\dagger = \begin{cases} \lambda^{-1}, & \lambda \neq 0, \\ 0, & \lambda = 0; \end{cases}$;

(4) $r((A)^{(1)}) \geq r(A)$,

(5) Ako su S i T regularne matrice, tada je $T^{-1}A^{(1)}S^{-1} \in SAT\{1\}$;

(6) $AA^{(1)}$ i $A^{(1)}A$ su idempotentne matrice koji imaju isti rang kao i matrica A. Važi još i $R(AA^{(1)}) = R(A)$ i $N(A^{(1)}A) = N(A^{(1)})$.

Egzistencija unutrašnjeg inverza povlači egzistenciju i refleksivnog ($\{1,2\}$)-inverza. Ako su Y, Z dva unutrašnja inverza, tada je $X = YAZ$ refleksivan inverz.

Teorema 3.5 *([8]) Bilo koja dva od sledeća tri tvrđenja impliciraju treće:*

$$\begin{aligned} X &\in A\{1\} \\ X &\in A\{2\} \\ r(X) &= r(A). \end{aligned}$$

Posledica 3.1 *Za proizvoljnu matricu $A^{(1,2)} \in A\{1,2\}$ važi:*

(1) matrica $AA^{(1,2)}$ je projektor na $R(A)$, paralelno sa $N(A^{(1,2)})$;

(2) matrica $A^{(1,2)}A$ je projektor na $R(A^{(1,2)})$, paralelno sa $N(A)$;

Dakle, za proizvoljnu matricu $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$ važi

$$R(A) \oplus N(A^{(1,2)}) = \mathbb{C}^m \quad \text{i} \quad R(A^{(1,2)}) \oplus N(A) = \mathbb{C}^n. \tag{3.2}$$

To znači da su slika proizvoljne matrice $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$ i jezgro nekog $\{1,2\}$-inverza te matrice komplementarni potprostori. To takođe važi za jezgro matrice A i sliku nekog $\{1,2\}$-inverza. Sledeća teorema pokazuje da važi i obrnuto, tj. ako je S potprostor koji je direktni komplement od $R(A)$ u $\mathbb{C}^m$, a T direktni komplement od $N(A)$ u $\mathbb{C}^n$, tada postoji $\{1,2\}$-inverz X matrice A takav da je $R(X) = T$ i $N(X) = S$. Takav inverz je jedinstven.

Teorema 3.6 *([8]) Neka je $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$ i neka za potprostore $S \subseteq \mathbb{C}^m$ i $T \subseteq \mathbb{C}^n$ važi $R(A) \oplus S = \mathbb{C}^m$ i $N(A) \oplus T = \mathbb{C}^n$. Tada postoji jedinstveni $\{1,2\}$-inverz X matrice A takav da je $R(X) = T$ i $N(X) = S$.*

Konkretno, za $T = R(A^*) = N(A)^{\perp}$ i $S = N(A^*) = R(A)^{\perp}$, dobijamo Mur-Penrouzov inverz matrice A. To znači da je Mur-Penrouzov inverz neke matrice $\{1,2\}$-inverz čija je slika $R(A^{\dagger}) = R(A^*)$ i jezgro $N(A^{\dagger}) = N(A^*)$, tj.

$$A^{\dagger} = A^{(1,2)}_{R(A^*),N(A^*)}.$$

Teorema 3.7 *Za matricu $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$ važi $AA^{\dagger}$ je ortogonalni projektor na $R(A)$ i $A^{\dagger}A$ je ortogonalni projektor na $R(A^*)$. Pored toga, ako je X neki $\{1,2\}$-inverz matrice A, tada je $X = A^{\dagger}$ ako i samo ako je $R(X) = R(A^*)$ i $N(X) = N(A^*)$.*

Pored Penrouzovih jednačina, bitne osobine koje generalisani (uopšteni) inverzi mogu imati su:

$$A^{k+1}X = A^k, \tag{1^k}$$

$$AX = XA, \tag{5}$$

Definicija 3.3 *Grupni inverz kvadratne matrice $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ je matrica $X \in \mathbb{C}^{n\times n}$ koja zadovoljava:*

(1) $AXA = A$;

(2) $XAX = X$;

(5) $AX = XA$.

Grupni inverz se obeležava sa $A^{\#}$.

Teorema 3.8 *([8]) Za matricu $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ postoji grupni inverz ako i samo ako je $ind(A) = 1$, tj. ako i samo ako važi*

$$r(A) = r(A^2).$$

Ako grupni inverz postoji, onda je on jedinstven.

Očigledno je da za grupni inverz X matrice A važi:

$$R(X) = R(A) \ \text{kao i} \ \ N(X) = N(A), \ \text{te je}$$

$$A^{\#} = A^{(1,2)}_{R(A),N(A)} \tag{3.3}$$

Neke od osobina grupnog inverza, pod uslovom da on postoji, date su sedećom teoremom.

Teorema 3.9 *Ako postoji grupni inverz $A^{\#}$ matrice $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ tada važi:*

(i) Ako je matrica A regularna, tada je $A^{\#} = A^{-1}$;

(ii) $A^{\#\#} = A$;

(iii) $A^{*\#} = A^{\#*}$;

(iv) $A^{T\#} = A^{\#T}$;

(v) $(A^l)^\# = (A^\#)^l$, *za svaki pozitivan celi broj* l.

Definicija 3.4 *Neka je* $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ *i* $ind(A) = k$. *Ako matrica* $X \in \mathbb{C}^{n\times n}$ *zadovoljava jednakosti*

(1^k) $A^k X A = A$;

(2) $XAX = X$;

(5) $AX = XA$,

tada se X *naziva Drazinov inverz matrice* A *i označava sa* $X = A^d$.

Kada je $ind(A) = 1$ tada se Drazinov i grupni inverz poklapaju.

Neka svojstva Drazinovog inverza data su u sledećim teoremama.

Teorema 3.10 *Neka je* $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ *i* $ind(A) = k$. *Tada važi:*

(i) $R(A^d) = R(A^l),\ l \geq k$;

(ii) $N(A^d) = N(A^l),\ l \geq k$;

(iii) $AA^d = A^d A = P_{R(A^d),N(A^d)}$;

(iv) $A^\pi = I - AA^d = I - A^d A = P_{N(A^d),R(A^d)}$.

Teorema 3.11 *Neka su* $A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}$. *Tada važi:*

(i) *Ako su* $l, m \in \mathbb{N}$ *takvi da je* $l > m > 0$, *tada je* $A^m (A^d)^l = (A^d)^{l-m}$;

(ii) *Ako su* $l, m \in \mathbb{N}$ *takvi da je* $m > 0$ *i* $l - m > ind(A)$, *tada je* $A^l (A^d)^m = A^{l-m}$,

(iii) $(A^d)^l = (A^l)^d$;

(iv) $(A^d)^* = (A^*)^d$;

(v) $(A^d)^T = (A^T)^d$;

(vi) $((A^d)^d)^d = A^d$;

(vii) *Ako je* P *regularna matrica, tada je* $A = PBP^{-1} \Longrightarrow A^d = PB^d P^{-1}$;

(viii) $AB = BA \Longrightarrow A^d B = BA^d, AB^d = B^d A$;

(ix) $AB = BA \Longrightarrow (AB)^d = B^d A^d = A^d B^d$;

(x) $(AB)^d = A((BA)^d)^2 B = A((BA)^2)^d B$;

(xi) *Ako je* A *idempotentna matrica, tada je* $A^d = A$;

(xii) *Ako je* A *nilpotentna matrica, tada je* $A^d = O$;

(xiii) $(A^d)^d = A^2 A^d$;

(xiv) $A^d = (A^2 A^d)^d$.

Drazinov inverz se naziva još i spektralni inverz jer ima neke spektralne osobine običnog inverza. Ovde se nećemo detaljnije baviti grupnim i Drazinovim inverzom pa navodimo reference u kojima se ispituju ovi inverzi: [8, 18, 38, 39], itd.

Važnu klasu matrica čine one kod kojih su Mur-Penrouzov inverz i grupni inverz isti. Kao što smo primetili

$$A^\dagger = A^{(1,2)}_{R(A^*),N(A^*)} \quad \text{i} \quad A^\# = A^{(1,2)}_{R(A),N(A)}, \tag{3.4}$$

pa je $A^\dagger = A^\#$ ako i samo ako je $R(A^*) = R(A)$ i $N(A^*) = N(A)$.

Definicija 3.5 *Matrica* $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ *je ermitrkog ranga ako je* $R(A^*) = R(A)$, *ili ekvivalentno* $N(A^*) = N(A)$.

Matrice ermitskog ranga nazivaju se i EP matrice (equal projections).

Teorema 3.12 *Matrica* $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ *je* EP *ako i samo ako je* $AA^\dagger = A^\dagger A$.

3.2 Mur-Penrouzov inverz u prostorima sa nedegenerativnim nedefinitnim skalarnim proizvodom

Mur-Penrouzov inverz matrice $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$ u prostorima sa nedegenerativnim nedefinitnim skalarnim proizvodom uveli su Kamaraj i Sivakumar u radu [54]. Veliki broj rezultata naveden je u ovom delu. Ovo uopštenje bilo je i motivacija da se slično uradi i u degenerativnom slučaju, što će biti izloženo u sledećoj sekciji. Mur-Penrouzov inverz definiše se analogno ovom inverzu u Euklidskom prostoru.

Definicija 3.6 *([54]) Neka je* $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$. *Matrica* $X \in \mathbb{C}^{n\times m}$ *koja zadovoljava jednačine*

$$AXA = A, \tag{1'}$$

$$XAX = X, \tag{2'}$$

$$(AX)^{[*]} = AX, \tag{3'}$$

$$(XA)^{[*]} = XA, \tag{4'}$$

naziva se Mur-Penrouzov inverz matrice A *i označava sa* $X = A^{[\dagger]}$.

Za razliku od Mur-Penrouzovog inverza u Euklidskim prostorima, u ovom slučaju on ne mora da postoji. Ako ovaj inverz postoji, jedinstven je.

Primer 3.1 *([54]) Neka je nedefinitni skalarni proizvod indukovan matricom* $H = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$. *Za matricu* $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ *ne postoji matrica* X *koja zadovoljava jednačine* $(1') - (4')$.

Potrebne i dovoljne uslove za egzistenciju Mur-Penrouzovog inverza, kao i tvrđenje o jedinstvenosti, isti autori dali su sledećom teoremom.

Teorema 3.13 *Neka je* $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$. *Tada Mur-Penrouzov inverz* $A^{[\dagger]}$ *postoji ako i samo ako važi*

$$r(A) = r(A^{[*]}A) = r(AA^{[*]}). \tag{3.5}$$

Ako $A^{[\dagger]}$ *postoji, onda je on jedinstven.*

Ova teorema predstavlja samo specijalni slučaj Kalmanovog rezultata iz 1976. godine koje je izložio u radu [52]. On je dao uslov da za proizvoljnu matricu A dimenzije $m \times n$ nad nekim poljem $\mathbb{F}$, Mur-Penrouzov inverz postoji ako i samo ako je

$$r(A) = r(A^*A) = r(AA^*), \tag{3.6}$$

gde je sa $*$ obeležena proizvoljna involucija na $\mathbb{F}$.

Napomena. Ovde skrećemo pažnju na poznatu činjenicu da u Euklidskom prostoru Mur-Penrouzov inverz za matrice uvek postoji (na šta je ukazano i u prethodnoj sekciji). Ovaj rezultat svakako je posledica Leme 1.2, po kojoj je Kalmanov uslov (3.6) uvek zadovoljen.

Poznato je da su mnogi matematičari izučavali težinski inverz [89], čija je definicija data u prethodnom poglavlju (Definicija 3.2). Kamaraj i Sivakumar u [54] pokazuju da Mur-penrouzov inverz uopštava pojam težinskog inverza na prostore sa nedefinitnim nedegenerativnim skalarnim proizvodom.

Teorema 3.14 *Neka je* $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$. *Ako su* M *i* N *ermitske invertibilne matrice, tada je* $A^{[\dagger]} = A^{\dagger}_{M,N}$, *ukoliko ovaj inverz postoji. Takođe,* $A^{\dagger}_{M,N}$ *je jedinstven.*

Postoji analogija u osnovnim osobinama sa osobinama Mur-Penrouzovog inverza u Euklidskom prostoru.

Teorema 3.15 *([54]) Neka je* $\lambda \in \mathbb{C}$. *Ako za matricu* $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$ *postoji Mur-Penrouzov inverz* $A^{[\dagger]} \in \mathbb{C}^{n\times m}$, *tada važe sledeće osobine:*

(i) $(A^{[\dagger]})^{[\dagger]} = A$;

(ii) $(A^{[\dagger]})^{[*]} = (A^{[*]})^{[\dagger]}$;

(iii) $(\lambda A)^{[\dagger]} = \lambda^{[\dagger]} A^{[\dagger]}$, *gde je* $\lambda^{[\dagger]} = \begin{cases} \lambda^{-1}, & \lambda \neq 0, \\ 0, & \lambda = 0; \end{cases}$

(iv) $A^{[*]} = A^{[*]} A A^{[\dagger]}$ *i* $A^{[*]} = A^{[\dagger]} A A^{[*]}$*;*

(v) $(A^{[*]} A)^{[\dagger]} = A^{[\dagger]} (A^{[\dagger]})^{[*]}$ *i* $(A A^{[*]})^{[\dagger]} = (A^{[*]})^{[\dagger]} A^{[\dagger]}$*;*

(vi) $A^{[\dagger]} = (A^{[*]} A)^{[\dagger]} A^{[*]} = A^{[*]} (A A^{[*]})^{[\dagger]}$.

Teorema 3.16 *([54]) Neka je* $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$*. Ako je* $r(A^{[*]} A = r(A)$*, tada je* $(A^{[*]} A)^{(1)} \in A\{1, 2, (3)\}$ *i ako je* $r(A A^{[*]}) = r(A)$*, tada je* $A^{[*]} (A A^{[*]})^{(1)} \in A\{1, 2, (4)\}$*.*

Jaka analogija sa inverzima u prostorima sa definitnim skalarnim proizvodom ogleda se i u sledećim rezultatima. Bitnu razliku predstavlja egzistencija samog inverza, koja se u gotovo svim rezultatima mora pretpostaviti.

Teorema 3.17 *([54]) Neka je* $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$ *matrica takva da postoji* $A^{[\dagger]}$*. Tada je* $A^{[\dagger]} = A^{(1,4)} A A^{(1,3)}$*, gde su* $A^{(1,3)} \in A\{1, (3)\}$ *i* $A^{(1,4)} \in A\{1, (4)\}$*.*

Za proizvoljnu matricu $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$ potprostori $R(A)$ i $N(A^{[*]})$ jesu ortogonalni (preciznije, H-ortogonalni), ali ne moraju da budu komplementarni u $\mathbb{C}^n$. To se može ilustrovati matricom A iz Primera 3.2, za koju važi da je $R(A) = N(A^{[*]})$.

Egzistencija Mur-Penrouzovog inverza matrice $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$ je dovoljan uslov za komplementarnost potprostora $R(A)$ i $N(A^{[*]})$.

Teorema 3.18 *([54]) Neka je* $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$ *takva da postoji* $A^{[\dagger]}$*. Tada su* $R(A)$ *i* $N(A^{[*]})$ *ortogonalni i komplementarni potprostori u* $\mathbb{C}^n$*.*

Dokaz. Neka su $x \in R(A)$ i $y \in N(A^{[*]})$. Tada je za neki vektor $z \in \mathbb{C}^n$

$$[x, y] = [Az, y] = [z, A^{[*]} y] = 0,$$

čime se dokazuje da su $R(A)$ i $N(A^{[*]})$ ortogonalni. Neka je sada $x \in R(A) \cap N(A^{[*]})$. Tada je za neko $y \in \mathbb{C}^n$

$$x = Ay = AA^{[\dagger]} Ay = AA^{[\dagger]} y = (A^{[\dagger]})^{[*]} A^{[*]} x = 0.$$

Prema tome, $R(A) \cap N(A^{[*]}) = \{0\}$. Kako je $r(A) = r(A^{[*]})$, dimenzije za $N(A^{[*]})$ i $N(A)$ su jednake, pa je prema Teoremi 1.1 $R(A) \oplus N(A^{[*]}) = \mathbb{C}^n$.

$\square$

Teorema 3.19 *([54]) Ako postoji Mur-Penrouzov inverz* $A^{[\dagger]}$ *matrice* $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$*, tada je*

$$R(A^{[\dagger]}) = R(A^{[*]}) \quad i \quad N(A^{[\dagger]}) = N(A^{[*]}).$$

Važi još i

$$AA^{[\dagger]} = P_{R(A), N(A^{[*]})} \quad i \quad A^{[\dagger]} A = P_{N(A^{[*]}), R(A)}.$$

Posebnu klasu čine kvadratne matrice kod kojih se (ukoliko postoje) Mur-Penrouzov inverz i grupni inverz poklapaju. Takve matrice nazivaju se matricama H - *ermitskog ranga* ili H - *EP matricama* (skraćenica od *equal projection matrix*).

Definicija 3.7 *([54]) Matrica $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ je H-ermitskog ranga ako je $R(A) = R(A^{[*]})$.*

Poznato je da u Euklidskom prostoru važi da je $AA^\dagger = A^\dagger A$ ako i samo ako je $R(A) = R(A^*)$. Analogni rezultat važi u prostorima sa nedegenerativnim nedefinitnim skalarnim proizvodom.

Teorema 3.20 *Neka je $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ matrica takva da $A^{[\dagger]}$ postoji. Tada je $R(A) = R(A^{[*]})$ ako i samo ako je $AA^{[\dagger]} = A^{[\dagger]}A$.*

Dokaz. Neka je $R(A) = R(A^{[*]})$. Mur-Penrouzov inverz matrice A postoji, te prema Teoremi 3.6 važi
$$AA^{[\dagger]} = P_{R(A),N(A^{[*]})} = P_{R(A^{[*]}),N(A)} = A^{[\dagger]}A.$$
S druge strane, ako važi $AA^{[\dagger]} = A^{[\dagger]}A$, biće
$$R(A) = R(AA^{[\dagger]}) = R(A^{[\dagger]}A) = R(A^{[\dagger]}) = R(A^{[*]}).$$
□

Teorema 3.21 *([54]) Neka je $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ H-normalna matrica. Ako postoji Mur-Penrouzov inverz $A^{[\dagger]}$, tada je matrica A H-ermitskog ranga.*

3.3 Mur-Penrouzov inverz u prostorima sa nedefinitnim skalarnim proizvodom

U prethodnom poglavlju predstavili smo poznate rezultate uopštenja Mur-Penrouzovog inverza na prostore sa nedefinitnim skalarnim proizvodom. U svim rezultatima koji su prikazani sam skalarni proizvod bio je nedegenerativan. U ovoj sekciji predstavljamo originalne rezultate iz zajedničkog rada sa D. S. Đorđevićem [84]. Oni se odnose na uopštenje Mur-Penrouziovog inverza na degenerativan slučaj, tj. definisaćemo ovaj inverz i pokazati neke bitne osobine za kvadratne matrice, pri čemu će matrica H koja indukuje nedefinitni skalarni proizvod biti potencijalno singularna. Videćemo da je u ovom slučaju potrebno sagledati inverz u širem kontekstu od matrica. Kao i u drugoj glavi ove disertacije, to će biti učinjeno za linearne relacije. Ipak, osobine kojima ćemo se baviti odnosiće se samo na kvadratne matrice.

Ako su A i X kompleksne matrice dimenzije $n \times n$, prema Lemi 1.3, $(AX)^{[*]}$ i $(XA)^{[*]}$ su matrice ako i samo ako je matrica H invertibilna. To znači da u prostorima sa nedefinitnim skalarnim proizvodom koji je indukovan ermitskom singularnom matricom, uslovi $(3')$ i $(4')$ u Definiciji 3.6 ne mogu biti zadovoljeni. Međutim, ovi uslovi za invertibilnu matricu H mogu se zapisati kao $(AX)^*H = HAX$ i $(XA)^* = XA$, respektivno. Prema Teoremi 1.17 ovo su uslovi za H-simetričnost matrica AX i XA, što pruža motivaciju za sledeću definiciju koju dajemo i za linearne relacije.

Definicija 3.8 *Neka je A linearna relacija na $\mathbb{C}^n$. Linearna relacija X na $\mathbb{C}^n$ je Mur-Penrouzov inverz od A ako zadovoljava sledeća četiri uslova:*

(1) $AXA = A$,

(2) $XAX = X$,

(3) $AX \subseteq (AX)^{[*]}$,

(4) $XA \subseteq (XA)^{[*]}$.

Teorema 3.22 *Neka je $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ i neka je $H \in \mathbb{C}^{n\times n}$ ermitska matrica. Matrica $X \in \mathbb{C}^{n\times n}$ je Mur-Penrouzov inverz matrice A ako su zadovoljena sledeća četiri uslova:*

(1) $AXA = A$,

(2) $XAX = X$,

(3) $(HAX)^* = HAX$,

(4) $(HXA)^* = HXA$.

Dokaz. Ovaj rezultat sledi direktno iz Definicije 3.8 i razmatranja iz prethodnog pasusa.

□

Ovom teoremom dolazimo do operativnijeg načina za nalaženje Mur-Penrouzovog inverza. Takođe, primećujemo da postoji veza sa težinskim Mur-Penrouzovim inverzom datog Definicijom 3.2. U ovom slučaju "težina" H nije pozitivno definitna matrica, dok su ostali uslovi isti. Ukoliko je H invertibilna, ovaj inverz se svodi na $A^{[\dagger]}$ iz Definicije 3.6, a ako je još i pozitivno definitna matrica, onda se ovaj inverz poklapa sa težinskim iz Definicije 3.2.

Za razliku od Mur-Penrouzovog inverza u nedegenerativnim prostorima, u degenerativnom slučaju (ako postoji) on ne mora biti jedinstven. Sledećim primerom to i ilustrujemo:

Primer 3.2 *Neka su* $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ *i* $H = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. *Direktnim izračunavanjem iz jednačina* $(1), (2), (3)$ *and* (4), *dobijamo da je* $X = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ c & 0 \end{bmatrix}$, *gde je c proizvoljni kompleksni broj.*

Proizvoljan Mur-Penrouzov inverz matrice A obeležavaćemo sa $A^{[\dagger]}$.

U nastavku ćemo podrazumevati da su matrice date u formi (1.18), tj.

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{bmatrix}, \quad A^{[\dagger]} = X = \begin{bmatrix} X_1 & X_2 \\ X_3 & X_4 \end{bmatrix} \text{ i } H = \begin{bmatrix} H_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

gde je matrica H_1 invertibilna.

Teorema 3.23 *Neka je $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Tada je $X \in \mathbb{C}^{n\times n}$ Mur-Penrouzov inverz od A ako i samo ako važe sledeći uslovi:*

(i) $A_1X_2 + A_2X_4 = 0$,

(ii) $A_1X_1 + A_2X_3$ *je H_1-samoadjungovana matrica ,*

(iii) $X_1A_2 + X_2A_4 = 0$,

(iv) $X_1A_1 + X_2A_3$ *je H_1-samoadjungovana matrica,*

(v) $A_1X_1A_1 + A_2X_3A_1 = A_1$,

(vi) $A_1X_1A_2 + A_2X_3A_2 = A_2$,

(vii) $A_3X_1A_1 + A_4X_3A_1 + A_3X_2A_3 + A_4X_4A_3 = A_3$,

(viii) $A_4X_3A_2 + A_4X_4A_4 = A_4$,

(ix) $X_1A_1X_1 + X_2A_3X_1 = X_1$,

(x) $X_1A_1X_2 + X_2A_3X_2 = X_2$,

(xi) $X_3A_1X_1 + X_4A_3X_1 + X_3A_2X_3 + X_4A_4X_3 = X_3$,

(xii) $X_4A_3X_2 + X_4A_4X_4 = X_4$.

Dokaz. Neka je $X \in \mathbb{C}^{n\times n}$ Mur-Penrouzov inverz matrice A. Tada on zadovoljava uslove Teoreme 3.22. Iz uslova (3) dobijamo

$HAX = (HAX)^*$ ako i samo ako je

$$\begin{bmatrix} H_1(A_1X_1 + A_2X_3) & H_1(A_1X_2 + A_2X_4) \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (H_1(A_1X_1 + A_2X_3))^* & 0 \\ (H_1(A_1X_2 + A_2X_4))^* & 0 \end{bmatrix},$$

tj. ako važi

(i) $A_1X_2 + A_2X_4 = 0$,

(ii) $A_1X_1 + A_2X_3$ je H_1-samoadjungovano.

Slično, iz uslova (4) sledi

(iii) $X_1A_2 + X_2A_4 = 0$,

(iv) $X_1A_1 + X_2A_3$ je H_1-samoadjungovano.

Korišćenjem ova četiri rezultata i uslova (1) i (2) iz Teoreme 3.22 dobija se:

$$\begin{bmatrix} A_1X_1A_1 + A_2X_3A_1 & A_1X_1A_2 + A_2X_3A_2 \\ A_3X_1A_1 + A_4X_3A_1 + A_3X_2A_3 + A_4X_4A_3 & A_4X_3A_2 + A_4X_4A_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{bmatrix},$$

tj.

(v) $A_1X_1A_1 + A_2X_3A_1 = A_1$,

(vi) $A_1X_1A_2 + A_2X_3A_2 = A_2$,

(vii) $A_3X_1A_1 + A_4X_3A_1 + A_3X_2A_3 + A_4X_4A_3 = A_3$,

(viii) $A_4X_3A_2 + A_4X_4A_4 = A_4$.

I analogno,

$$\begin{bmatrix} X_1A_1X_1X_2A_3X_1 & X_1A_1X_2 + X_2A_3X_2 \\ X_3A_1X_1 + X_4A_3X_1 + X_3A_2X_3 + X_4A_4X_3 & X_4A_3X_2 + X_4A_4X_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_1 & X_2 \\ X_3 & X_4 \end{bmatrix}.$$

(ix) $X_1A_1X_1 + X_2A_3X_1 = X_1$,

(x) $X_1A_1X_2 + X_2A_3X_2 = X_2$,

(xi) $X_3A_1X_1 + X_4A_3X_1 + X_3A_2X_3 + X_4A_4X_3 = X_3$,

(xii) $X_4A_3X_2 + X_4A_4X_4 = X_4$.

□

Uslovi prethodne teoreme se teško proveravaju, pa ova teorema nije pogodna za utvrđivanje egzistencije Mur-Penrouzovog inverza neke matrice. Međutim, ona ima značajnu ulogu u dokazivanju osobina ovog inverza. Njenom primenom u velikom broju rezultata vrši se redukcija linearnih relacija na jednostavnije oblike. U nastavku ovog poglavlja pokazujemo neke od osobina Mur-Penrouzovog inverza.

Teorema 3.24 *Ako je $A^{[\dagger]} \in C^{n\times n}$ Mur-Penrouzov inverz matrice $A \in C^{n\times n}$, tada je $(A^{[\dagger]})^{[*]} \subseteq (A^{[*]})^{[\dagger]}$.*

Dokaz. Označimo sa $X = A^{[\dagger]} = \begin{bmatrix} X_1 & X_2 \\ X_3 & X_4 \end{bmatrix}$. Linearne relacije $A^{[*]}$ i $X^{[*]}$ su

$$A^{[*]} = \left\{ \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ {A_1}^{[*]_{H_1}} y_1 \\ z_2 \end{pmatrix} : A_2^* H_1 y_1 = 0 \right\} \text{ i } X^{[*]} = \left\{ \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ {X_1}^{[*]_{H_1}} y_1 \\ z_2 \end{pmatrix} : X_2^* H_1 y_1 = 0 \right\}.$$

Dokazujemo da ako je za matricu A proizvoljni Mur-Penrouzov inverz matrica X, onda će $X^{[*]}$ biti Mur-Penrouzov inverz od $A^{[*]}$. Proverićemo uslove Teoreme 3.22.

$$(1)\ A^{[*]}X^{[*]}A^{[*]} = \left\{ \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ {A_1}^{[*]}{X_1}^{[*]}{A_1}^{[*]} y_1 \\ z_2 \end{pmatrix} : \begin{array}{c} A_2^* H_1 y_1 = 0, \\ X_2^* H_1 {A_1}^{[*]} y_1 = 0, \\ A_2^* H_1 {X_1}^{[*]} {A_1}^{[*]} y_1 = 0 \end{array} \right\}.$$

Pod ovim uslovima domena, a imajući u vidu da matrica X kao Mur-Penrouzov inverz od A zadovoljava jednačine iz Teoreme 3.23, mozemo uprostiti zapis.

Neka je $A_2^* H_1 y_1 = 0$. Tada

$$\begin{aligned} {X_2}^* H_1 {A_1}^{[*]} y_1 &= {X_2}^* {A_1}^* H_1 y_1 = (A_1 X_2)^* H_1 y_1 \\ &\overset{\text{(i)}}{=} (-A_2 X_4)^* H_1 y_1 = -{X_4}^* {A_2}^* H_1 y_1 = 0. \end{aligned}$$

Sličnom transformacijom dobijamo:

$$\begin{aligned} {A_2}^* H_1 {X_1}^{[*]} {A_1}^{[*]} y_1 &= {A_2}^* {X_1}^* {A_1}^* H_1 y_1 \\ &= (A_1 X_1 A_2)^* H_1 y_1 \overset{\text{(vi)}}{=} (A_2 - A_2 X_3 A_2)^* H_1 y_1 \\ &= A_2^* H_1 y_1 - (A_2 X_3 A_2)^* H_1 y_1 = -{A_2}^* {X_3}^* {A_2}^* H_1 y_1 = 0, \end{aligned}$$

odnosno

$$\begin{aligned} {A_1}^{[*]} {X_1}^{[*]} {A_1}^{[*]} y_1 &= (A_1 X_1 A_1)^{[*]} y_1 \\ &\overset{\text{(v)}}{=} (A_1 - A_2 X_3 A_1)^{[*]} y_1 = {A_1}^{[*]} y_1 - (A_2 X_3 A_1)^{[*]} y_1 \\ &= {A_1}^{[*]} y_1 - {H_1}^{-1} {A_1}^* {X_3}^* {A_2}^* H_1 y_1 = {A_1}^{[*]} y_1. \end{aligned}$$

Prema tome,

$$A^{[*]}X^{[*]}A^{[*]} = \left\{ \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ {A_1}^{[*]} y_1 \\ z_2 \end{pmatrix} : A_2^* H_1 y_1 = 0 \right\} = A^{[*]}.$$

(2) Potpuno analogno dokazujemo da je

$$X^{[*]}A^{[*]}X^{[*]} = X^{[*]}.$$

(3) Pokazujemo da važi $A^{[*]}X^{[*]} \subseteq (A^{[*]}X^{[*]})^{[*]}$.

$$\begin{aligned} A^{[*]}X^{[*]} &= \left\{ \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ {A_1}^{[*]}{X_1}^{[*]}y_1 \\ z_2 \end{pmatrix} : \begin{array}{c} X_2^* H_1 y_1 = 0, \\ A_2^* H_1 {X_1}^{[*]} y_1 = 0 \end{array} \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ (X_1A_1)^{[*]}y_1 \\ z_2 \end{pmatrix} : X_2^* H_1 y_1 = 0 \right\}, \end{aligned}$$

što se opet dobija korišćenjem uslova Teoreme 3.22, tj.

$${A_2}^* H_1 {X_1}^{[*]} y_1 = {A_2}^* {X_1}^* H_1 y_1 = (X_1A_2)^* H_1 y_1 \overset{\text{(iii)}}{=} -{A_4}^* {X_2}^* H_1 y_1 = 0.$$

S druge strane,

$$\left(A^{[*]}X^{[*]}\right)^{[*]} = \left\{ \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} : [y, \omega] = [z, x] \text{ for all } \begin{pmatrix} x \\ \omega \end{pmatrix} \in A^{[*]}X^{[*]} \right\},$$

odakle sledi da inkluzija $A^{[*]}X^{[*]} \subseteq \left(A^{[*]}X^{[*]}\right)^{[*]}$ važi ako i samo ako je

$$[y, \omega] = [z, x] \text{ za sve } \begin{pmatrix} x \\ \omega \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} \in A^{[*]}X^{[*]}.$$

Pretpostavimo da je $\begin{pmatrix} x \\ \omega \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} \in A^{[*]}X^{[*]}$. Kako $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ i $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ pripadaju domenu linearne relacije $A^{[*]}X^{[*]}$ imamo da je $X_2^* H_1 x_1 = X_2^* H_1 y_1 = 0$.

Očigledno je da je

$$\omega = \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (X_1A_1)^{[*]}x_1 \\ \omega_2 \end{pmatrix} \text{ i } z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (X_1A_1)^{[*]}y_1 \\ z_2 \end{pmatrix}.$$

Sada imamo:

$$[y, \omega] = \omega^* H y = {\omega_1}^* H_1 y_1 = ((X_1A_1)^{[*]}x_1)^* H_1 y_1 = x_1^* H_1 X_1 A_1 y_1,$$

kao i

$$\begin{aligned} [z, x] &= x^* H z = x_1^* H_1 z_1 = x_1^* H_1 (X_1A_1)^{[*]} y_1 \\ &\overset{(iv)}{=} x_1^* H_1 (X_1A_1 + X_2A_3 - (X_2A_3)^{[*]}) y_1 \\ &= x_1^* H_1 X_1 A_1 y_1 + x_1^* H_1 X_2 A_3 y_1 - x_1^* A_3^* X_2^* H_1 y_1 \\ &= x_1^* H_1 X_1 A_1 y_1, \end{aligned}$$

što sledi iz $X_2^* H_1 x_1 = X_2^* H_1 y_1 = 0$. Kako je $[y, \omega] = [z, x]$ ispunjeno, sledi da važi

$$A^{[*]} X^{[*]} \subseteq \left(A^{[*]} X^{[*]}\right)^{[*]}.$$

(4) Na sličan način kao pod (3) dokazuje se da je

$$X^{[*]} A^{[*]} \subseteq \left(X^{[*]} A^{[*]}\right)^{[*]}.$$

□

Napomena. Ovde ćemo napomenuti da u opštem slučaju ne važi jednakost već samo inkluzija $(AXA)^{[*]} \supseteq A^{[*]} X^{[*]} A^{[*]}$ (Teorema 1.15). Iz prethodne teoreme sledi da u slučaju kada je $X \in \mathbb{C}^{n \times n}$ Mur-Penrouzov inverz važi jednakost, tj. $A^{[*]} X^{[*]} A^{[*]} = (AXA)^{[*]}$.

Kao što je navedeno u predhodnoj sekciji u Teoremi 3.15(iv), za Mur-Penrouzov inverz neke kvadratne matrice A u nedegenerativnim prostorima važi $A^{[*]} = A^{[*]} A A^{[\dagger]} = A^{[\dagger]} A A^{[*]}$. U degenerativnom slučaju važi delimična analogija sa ovim rezultatom.

Teorema 3.25 *Ako je $A^{[\dagger]} \in \mathbb{C}^{n \times n}$ Mur-Penrouzov inverz matrice $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$, tada je*

$$A^{[*]} = A^{[*]} A A^{[\dagger]} \quad i \quad A^{[\dagger]} A A^{[*]} \subseteq A^{[*]}.$$

Dokaz. Koristeći Teoremu 3.22 (i), sledi da je

$$A^{[*]} A A^{[\dagger]} = \left\{ \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ {A_1}^{[*]}(A_1 X_1 + A_2 X_3) y_1 \\ z_2 \end{pmatrix} : A_2^* H_1 (A_1 X_1 + A_2 X_3) y_1 = 0 \right\}.$$

Ovu linearnu relaciju možemo pojednostaviti, pomoću ((ii),(vi),(v)) na sledeći način:

$$\begin{aligned} A_2^* H_1 (A_1 X_1 + A_2 X_3) y_1 = 0 &\Longleftrightarrow \quad A_2^* H_1 (A_1 X_1 + A_2 X_3)^{[*]} y_1 = 0 \\ &\Longleftrightarrow \quad A_2^* (A_1 X_1 + A_2 X_3)^* H_1 y_1 = 0 \\ &\Longleftrightarrow \quad (A_1 X_1 A_2 + A_2 X_3 A_2)^* H_1 y_1 = 0 \\ &\Longleftrightarrow \quad A_2^* H_1 y_1 = 0. \end{aligned}$$

Takođe,

$${A_1}^{[*]}(A_1 X_1 + A_2 X_3) y_1 = (A_1 X_1 A_1 + A_2 X_3 A_1)^{[*]} y_1 = A_1^{[*]} y_1.$$

Preme tome, biće

$$A^{[*]} A A^{[\dagger]} = \left\{ \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ {A_1}^{[*]} y_1 \\ z_2 \end{pmatrix} : A_2^* H_1 y_1 = 0 \right\} = A^{[*]},$$

čime je prvo tvđenje zadovoljeno.

Proverimo sada drugo tvrđenje.

$$A^{[\dagger]}AA^{[*]} = \left\{ \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ (X_1A_1 + X_2A_3)A_1^{[*]}y_1 \\ (X_3A_1 + X_4A_3)A_1^{[*]}y_1 + (X_3A_2 + X_4A_4)z_2 \end{pmatrix} : A_2^*H_1y_1 = 0 \right\}.$$

Transformacijom dobijamo:

$$\begin{aligned} (X_1A_1 + X_2A_3)A_1^{[*]}y_1 &\overset{\text{(iv)}}{=} (A_1X_1A_1 + A_1X_2A_3)^{[*]}y_1 \\ &\overset{\text{(v,i)}}{=} (A_1 - A_2X_3A_1 - A_2X_4A_3)^{[*]}y_1 = A_1^{[*]}y_1, \end{aligned}$$

za sve y_1 koji zadovoljavaju $A_2^*H_1y_1 = 0$.

Dakle,

$$\begin{aligned} A^{[\dagger]}AA^{[*]} &= \left\{ \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ A_1^{[*]}y_1 \\ (X_3A_1 + X_4A_3)A_1^{[*]}y_1 + (X_3A_2 + X_4A_4)z_2 \end{pmatrix} : A_2^*H_1y_1 = 0 \right\} \quad (3.7) \\ &\subseteq \left\{ \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ A_1^{[*]}y_1 \\ z_2 \end{pmatrix} : A_2^*H_1y_1 = 0 \right\} = A^{[*]}. \quad (3.8) \end{aligned}$$

Očigledno je da suprotna inkluzija važi samo u slučaju kada je matrica $X_3A_2 + X_4A_4$ invertibilna.

□

Posledica 3.2 *Ako je u prethodnoj teoremi A_4 invertibilna matrica, tada važi*

$$A^{[*]} = A^{[*]}AA^{[\dagger]} \quad i \quad A^{[\dagger]}AA^{[*]} = A^{[*]}.$$

Dokaz. Prvi deo sledi iz prethodne teoreme. Pokazujemo samo drugi deo. Ako je podmatrica A_4 invertibilna, tada se u Teoremi 3.22 uslov (viii)

$$A_4X_3A_2 + A_4X_4A_4 = A_4$$

svodi na

$$X_3A_2 + X_4A_4 = I,$$

pa iz (3.10) sledi da su linearne relacije $A^{[\dagger]}AA^{[*]}$ i $A^{[*]}$ jednake.

□

Sledećim promerom pokazujemo da jednakost $A^{[\dagger]}AA^{[*]} = A^{[*]}$ ne mora da važi u opštem slučaju.

Primer 3.3 *Neka su* $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ *i* $H = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. *Tada su*

$$A^{[*]} = \left\{ \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \right\} \quad i \quad A^{[\dagger]}AA^{[*]} = \left\{ \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_1 \\ cy_1 \end{pmatrix} \right\},$$

gde je $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$, *a* z_2 *i* c *proizvoljni fiksirani kompleksni brojevi.*

Očigledno je da važi $A^{[\dagger]}AA^{[*]} \subseteq A^{[*]}$. *Da ne važi i obrnuta inkluzija mžemo primetiti ako uzmemo, na primer,* $y = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Definicija 3.9 *Matrica* $X \in \mathbb{C}^{n\times n}$ *je*

- $\{1, 2, (3)\}$- *inverz matrice* $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ *ako važi*

$$AXA = A, \quad XAX = X \quad i \quad AX \subseteq (AX)^{[*]};$$

- $\{1, 2, (4)\}$- *inverz matrice* $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ *ako važi*

$$AXA = A, \quad XAX = X \quad i \quad XA \subseteq (XA)^{[*]}.$$

Teorema 3.26 *Ako je* $A^{[\dagger]} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ *Mur-Penrouzov inverz od* $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, *tada je* $A^{[\dagger]}(A^{[\dagger]})^{[*]}$ *{1,2,(3)}- inverz linearne relacije* $A^{[*]}A$.

Dokaz. Ovo tvrđenje se dokazuje jednostavno korišćenjem Teoreme 3.24 i Teoreme 3.25. Za $X = A^{[\dagger]}$ proveravamo osobine $\{1, 2, (3)\}$ - inverza.

(1) $A^{[*]}AXX^{[*]}A^{[*]}A = A^{[*]}X^{[*]}A^{[*]}A = A^{[*]}A$.

(2) $XX^{[*]}A^{[*]}AXX^{[*]} = XX^{[*]}A^{[*]}X^{[*]} = XX^{[*]}$.

(3) $A^{[*]}AXX^{[*]} = A^{[*]}X^{[*]} \subseteq (A^{[*]}X^{[*]})^{[*]}$.

□

Sledećom teoremom dajemo analogno tvrđenje. Međutim, sam dokaz je nešto složeniji.

Teorema 3.27 *Ako je* $A^{[\dagger]} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ *Mur-Penrouzov inverz od* $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, *tada je* $(A^{[\dagger]})^{[*]}A^{[\dagger]}$ *{1,2,(4)} - inverz linearne relacije* $AA^{[*]}$.

Dokaz.

(1) $AA^{[*]}(A^{[\dagger]})^{[*]}A^{[\dagger]}AA^{[*]} = AA^{[*]}X^{[*]}XAA^{[*]}$

$$= AA^{[*]}\left\{\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ X_1^{[*]}(X_1A_1+X_2A_3)A_1^{[*]}y_1 \\ z_2 \end{pmatrix} : \begin{array}{c} A_2^*H_1y_1 = 0 \\ X_2^*H_1(X_1A_1+X_2A_3)A_1^{[*]}y_1 = 0 \end{array}\right\}$$

$$= AA^{[*]}\left\{\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ (A_1X_1)^{[*]}y_1 \\ z_2 \end{pmatrix} : A_2^*H_1y_1 = 0\right\}$$

$$= A\left\{\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ A_1^{[*]}(A_1X_1)^{[*]}y_1 \\ z_2 \end{pmatrix} : \begin{array}{c} A_2^*H_1y_1 = 0 \\ A_2^*H_1(A_1X_1)^{[*]}y_1 = 0 \end{array}\right\}$$

$$= A\left\{\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ (A_1X_1A_1)^{[*]}y_1 \\ z_2 \end{pmatrix} : A_2^*H_1y_1 = 0\right\} = A\left\{\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ A_1^{[*]}y_1 \\ z_2 \end{pmatrix} : A_2^*H_1y_1 = 0\right\} = AA^{[*]}.$$

Jednakosti koje se javljaju u ovim linearnim relacijama slede iz Teoreme 3.22 i detaljno su izvedene u nastavku.

Neka je $A_2^*H_1y_1 = 0$. Tada:

$$\begin{aligned} X_2^*H_1(X_1A_1+X_2A_3)A_1^{[*]}y_1 &= X_2^*H_1(X_1A_1+X_2A_3)^{[*]}A_1^{[*]}y_1 \\ &= X_2^*(X_1A_1+X_2A_3)^*H_1A_1^{[*]}y_1 \\ &= (X_1A_1X_2+X_2A_3X_2)^*H_1A_1^{[*]}y_1 \\ &= X_2^*H_1A_1^{[*]}y_1 = X_2^*A_1^*H_1y_1 \\ &= (A_1X_2)^*H_1y_1 = -(A_2X_4)^*H_1y_1 = 0. \end{aligned}$$

Takođe,

$$\begin{aligned} X_1^{[*]}(X_1A_1+X_2A_3)A_1^{[*]}y_1 &= X_1^{[*]}(X_1A_1+X_2A_3)^{[*]}A_1^{[*]}y_1 \\ &= (X_1A_1X_1+X_2A_3X_1)^{[*]}A_1^{[*]}y_1 \\ &= X_1^{[*]}A_1^{[*]}y_1, \end{aligned}$$

kao i

$$\begin{aligned} A_2^*H_1(A_1X_1)^{[*]}y_1 &= A_2^*(A_1X_1)^*H_1y_1 = (A_1X_1A_2)^*H_1y_1 \\ &= (A_2-A_2X_3A_2)^*H_1y_1 = 0. \end{aligned}$$

Konačno je $(A_1X_1A_1)^{[*]}y_1 = (A_1 - A_2X_3A_1)^{[*]}y_1 = A_1^{[*]}y_1$.

(2) Pokazujemo drugi uslov iz definicije Mur-Penrouzovog inverza:

$$X^{[*]}XAA^{[*]}X^{[*]}X =$$

$$= X^{[*]}XA\left\{\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ A_1^{[*]}X_1^{[*]}(X_1y_1+X_2y_2) \\ \omega_2 \end{pmatrix} : \begin{array}{c} X_2^*H_1(X_1y_1+X_2y_2)=0 \\ A_2^*H_1X_1^{[*]}(X_1y_1+X_2y_2)=0 \end{array}\right\}$$

$$= X^{[*]}XA\left\{\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ A_1^{[*]}X_1^{[*]}(X_1y_1+X_2y_2) \\ \omega_2 \end{pmatrix} : X_2^*H_1(X_1y_1+X_2y_2)=0\right\}$$

$$= X^{[*]}X\left\{\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ A_1A_1^{[*]}X_1^{[*]}(X_1y_1+X_2y_2)+A_2\omega_2 \\ A_3A_1^{[*]}X_1^{[*]}(X_1y_1+X_2y_2)+A_4\omega_2 \end{pmatrix} : X_2^*H_1(X_1y_1+X_2y_2)=0\right\}$$

$$= X^{[*]}\left\{\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ (X_1A_1+X_2A_3)A_1^{[*]}X_1^{[*]}(X_1y_1+X_2y_2) \\ * \end{pmatrix} : X_2^*H_1(X_1y_1+X_2y_2)=0\right\}$$

$$= X^{[*]}\left\{\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ (X_1A_1)^{[*]}(X_1y_1+X_2y_2) \\ * \end{pmatrix} : X_2^*H_1(X_1y_1+X_2y_2)=0\right\}$$

$$= \left\{\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ X_1^{[*]}(X_1A_1)^{[*]}(X_1y_1+X_2y_2) \\ z_2 \end{pmatrix} : \begin{array}{c} X_2^*H_1(X_1y_1+X_2y_2)=0 \\ X_2^*H_1(X_1A_1)^{[*]}(X_1y_1+X_2y_2)=0 \end{array}\right\}$$

$$= \left\{\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ X_1^{[*]}(X_1y_1+X_2y_2) \\ z_2 \end{pmatrix} : X_2^*H_1(X_1y_1+X_2y_2)=0\right\} = X^{[*]}X.$$

Slično kao u (1), neka je $X_2^*H_1(X_1y_1+X_2y_2)=0$.
Sada je

$$\begin{aligned} A_2^*H_1X_1^{[*]}(X_1y_1+X_2y_2) &= (X_1A_2)^*H_1(X_1y_1+X_2y_2) = \\ &-A_4^*X_2^*H_1(X_1y_1+X_2y_2)=0 \end{aligned}$$

i

$$\begin{aligned} X_2^* H_1 (X_1 A_1)^{[*]} (X_1 y_1 + X_2 y_2) &= (X_1 A_1 X_2)^* H_1 (X_1 y_1 + X_2 y_2) \\ &= (X_2 - X_2 A_3 X_2)^* H_1 (X_1 y_1 + X_2 y_2) = 0. \end{aligned}$$

Takođe, važi:

$$\begin{aligned} & X_1 A_1 A_1^{[*]} X_1^{[*]} (X_1 y_1 + X_2 y_2) + X_1 A_2 \omega_2 + X_2 A_3 A_1^{[*]} X_1^{[*]} (X_1 y_1 + X_2 y_2) + X_2 A_4 \omega_2 \\ = \; & (X_1 A_1 + X_2 A_3) A_1^{[*]} X_1^{[*]} (X_1 y_1 + X_2 y_2) + (X_1 A_2 + X_2 A_4) \omega_2 \\ = \; & (X_1 A_1 + X_2 A_3)^{[*]} A_1^{[*]} X_1^{[*]} (X_1 y_1 + X_2 y_2) \\ = \; & (X_1 A_1 (X_1 A_1 + X_2 A_3))^{[*]} (X_1 y_1 + X_2 y_2) \\ = \; & (X_1 A_1 X_1 A_1 + (X_2 - X_2 A_3 X_2) A_3)^{[*]} (X_1 y_1 + X_2 y_2) \\ = \; & (X_1 A_1 X_1 A_1)^{[*]} (X_1 y_1 + X_2 y_2) = ((X_1 - X_2 A_3 X_1) A_1)^{[*]} (X_1 y_1 + X_2 y_2) \\ = \; & (X_1 A_1)^{[*]} (X_1 y_1 + X_2 y_2), \end{aligned}$$

i još

$$\begin{aligned} X_1^{[*]} (X_1 A_1)^{[*]} (X_1 y_1 + X_2 y_2) &= (X_1 A_1 X_1)^{[*]} (X_1 y_1 + X_2 y_2) \\ &= (X_1 - X_2 A_3 X_2)^{[*]} (X_1 y_1 + X_2 y_2) \\ &= X_1^{[*]} (X_1 y_1 + X_2 y_2). \end{aligned}$$

(3) Sada pokazujemo da važi $(A^{[\dagger]})^{[*]} A^{[\dagger]} A A^{[*]} \subseteq ((A^{[\dagger]})^{[*]} A^{[\dagger]} A A^{[*]})^{[*]}$, tj. da je zadovoljeno $X^{[*]} X A A^{[*]} \subseteq (X^{[*]} X A A^{[*]})^{[*]}$.

$$X^{[*]} X A A^{[*]} = \left\{ \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ (A_1 X_1)^{[*]} y_1 \\ z_2 \end{pmatrix} : A_2^* H_1 y_1 = 0 \right\}.$$

Poznato je da je $X^{[*]} X A A^{[*]} \subseteq (X^{[*]} X A A^{[*]})^{[*]}$ ako i samo ako važi

$$((A_1 X_1)^{[*]} x_1)^* H_1 y_1 = x_1^* H_1 (A_1 X_1)^{[*]} y_1, \tag{3.9}$$

za sve vektore $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ i $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ takve da je $A_2^* H_1 y_1 = A_2^* H_1 x_1 = 0$.
Leva strana jednakosti (3.9) će biti: $((A_1 X_1)^{[*]} x_1)^* H_1 y_1 = x_1^* H_1 A_1 X_1 y_1$,
dok je desna strana:

$$\begin{aligned} x_1^* H_1 (A_1 X_1)^{[*]} y_1 &= x_1^* H_1 (A_1 X_1 + A_2 X_3 - (A_2 X_3)^{[*]}) y_1 \\ &= x_1^* H_1 A_1 X_1 y_1 + x_1^* H_1 A_2 X_3 y_1 - x_1^* X_3^* A_2^* H_1 y_1 \\ &= x_1 H_1 A_1 X_1 y_1, \end{aligned}$$

što sledi iz $A_2^* H_1 x_1 = A_2^* H_1 y_1 = 0$.

Kako su leva i desna strana jednakosti (3.9) jednake, jasno je da sledi da je

$$X^{[*]} X A A^{[*]} \subseteq (X^{[*]} X A A^{[*]})^{[*]}.$$

□

Sledećim primerom pokazujemo da u opštem slučaju četvrti uslov u Teoremi 3.26 nije zadovoljen, tj. da $A^{[\dagger]}(A^{[\dagger]})^{[*]}$ nije Mur-Penrouzov inverz linearne relacije $A^{[*]}A$. Jasno je da se može pokazati da i treći uslov u Teoremi 3.27 ne mora biti zadovoljen.

Primer 3.4 *Neka su* $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ *i* $H = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. *Lako se dobija da je Mur-Penrouzov inverz matrice* A *matrica* $X = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$.

Pokazujemo da četvrti uslov iz Definicije 3.22 ne važi:

$$A^{[\dagger]}(A^{[\dagger]})^{[*]}A^{[*]}A = XX^{[*]}A^{[*]}A = \left\{ \begin{pmatrix} y_1 \\ -y_1 \\ -z_2 \\ z_2 \end{pmatrix} \right\},$$

gde su y_1 *i* z_2 *proizvoljni kompleksni brojevi.*

Prema definiciji H *- simetričnosti imamo da iz* $A^{[\dagger]}(A^{[\dagger]})^{[*]}A^{[*]}A \subseteq (A^{[\dagger]}(A^{[\dagger]})^{[*]}A^{[*]}A)^{[*]}$ *sledi* $(z_2)^*y_1 = (y_1)^*z_2$, *što, očigledno, nije zadovoljeno za* $y_1 = 1$ *i* $z_2 = i$.

Teorema 3.28 *Ako je* $X = A^{[\dagger]} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ *Mur-Penrouzov inverz matrice* $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ *tada je* $A^{[\dagger]}(A^{[\dagger]})^{[*]}$ *Mur-Penrouzov inverz linearne relacije* $A^{[*]}A$ *ako i samo ako je* ${X_2}^*H_1y_1 = 0$ *za sve* $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ *koji zadovoljavaju* ${A_2}^*H_1(A_1y_1 + A_2y_2) = 0$.

Dokaz. Iz Teoreme 3.26, već sledi da je $A^{[\dagger]}(A^{[\dagger]})^{[*]}$ is {1,2,(3)} - inverz od $A^{[*]}A$. Za $X = A^{[\dagger]}$, važi

$$\begin{aligned} XX^{[*]}A^{[*]}A &= XX^{[*]}\left\{ \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ {A_1}^{[*]}(A_1y_1 + A_2y_2) \\ z_2 \end{pmatrix} : A_2^*H_1(A_1y_1 + A_2y_2) = 0 \right\} \\ &= X\left\{ \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ {X_1}^{[*]}{A_1}^{[*]}(A_1y_1 + A_2y_2) \\ z_2 \end{pmatrix} : \begin{matrix} A_2^*H_1(A_1y_1 + A_2y_2) = 0 \\ {X_2}^*H_1{A_1}^{[*]}(A_1y_1 + A_2y_2) = 0 \end{matrix} \right\} \\ &= X\left\{ \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ A_1y_1 + A_2y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} : A_2^*H_1(A_1y_1 + A_2y_2) = 0 \right\} \end{aligned}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ X_1(A_1y_1 + A_2y_2) + X_2z_2 \\ X_3(A_1y_1 + A_2y_2) + X_4z_2 \end{pmatrix} : A_2^*H_1(A_1y_1 + A_2y_2) = 0 \right\}.$$

I ovde ćemo koristiti uslove Teoreme 3.25.
Kako je $A_2^*H_1(A_1y_1 + A_2y_2) = 0$, imamo

$$\begin{aligned} {X_2}^*H_1{A_1}^{[*]}(A_1y_1 + A_2y_2) &= X_2^*A_1^*H_1(A_1y_1 + A_2y_2) \\ &= -X_4^*A_2^*H_1(A_1y_1 + A_2y_2) = 0. \end{aligned}$$

Takođe je,

$$\begin{gathered} {X_1}^{[*]}{A_1}^{[*]}(A_1y_1 + A_2y_2) = (A_1X_1)^{[*]}(A_1y_1 + A_2y_2) = \\ (A_1X_1 + A_2X_3 - (A_2X_3)^{[*]})(A_1y_1 + A_2y_2) \\ A_1X_1A_1y_1 + A_2X_3A_1y_1 + A_1X_1A_2y_2 + A_2X_3A_2y_2 \\ = (A_1X_1A_1 + A_2X_3A_1)y_1 + (A_1X_1A_2 + A_2X_3A_2)y_2 = A_1y_1 + A_2y_2. \end{gathered}$$

Potreban i dovoljan uslov za postojanje $\{(4)\}$-inverza (tj. $XX^{[*]}A^{[*]}A \subseteq (XX^{[*]}A^{[*]}A)^{[*]}$) je:

$$(X_1(A_1x_1 + A_2x_2) + X_2\omega_2)^*H_1y_1 = {x_1}^*H_1(X_1(A_1y_1 + A_2y_2) + X_2z_2),$$

kada je

$$A_2{}^*H_1(A_1y_1 + A_2y_2) = 0 \quad \text{i} \quad A_2{}^*H_1(A_1x_1 + A_2x_2) = 0$$

za sve vektore z_2 i ω_2 odgovarajućih dimenzija.

Poslednji uslov je ekvivalentan sa

$$x_1^*(X_1A_1)^*H_1y_1 + x_2^*(X_1A_2)^*H_1y_1 + {\omega_2}^*X_2^*H_1y_1 = x_1^*H_1X_1A_1y_1 + x_1^*H_1X_1A_2y_2 + x_1^*H_1X_2^*z_2,$$

za sve z_2 i ω_2 odgovarajućih dimenzija.

Nije teško primetiti da je poslednji uslov zadovoljen ako i samo ako je

$$X_2{}^*H_1y_1 = X_2^*H_1x_1 = 0 \quad \text{i}$$

$$x_1^*(X_1A_1)^*H_1y_1 + x_2^*(X_1A_2)^*H_1y_1 = x_1^*H_1X_1A_1y_1 + x_1^*H_1X_1A_2y_2.$$

Štaviše, iz Teoreme 3.25 i $X_2{}^*H_1y_1 = X_2^*H_1x_1 = 0$ sledi

$$x_1^*(X_1A_1)^*H_1y_1 = x_1^*H_1(X_1A_1)^{[*]}y_1 = x_1^*H_1X_1A_1y_1.$$

Sada je,

$$x_2^*(X_1A_2)^*H_1y_1 = -x_2^*(X_2A_4)^*H_1y_1 = -x_2^*A_4^*X_2^*H_1y_1 = 0 \quad \text{i}$$

$$x_1^*H_1X_1A_2y_2 = -x_1^*H_1X_2A_4y_2 = 0.$$

Dakle, pod uslovom $X_2^*H_1y_1 = 0$ za sve $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$, takve da je $A_2^*H_1(A_1y_1 + A_2y_2) = 0$ važi da su leva i desna strana poslednje jednačine iste. Prema tome, dobijamo da je to i potreban i dovoljan uslov da $A^{[\dagger]}(A^{[\dagger]})^{[*]}$ bude Mur-Penrouzov inverz od $A^{[*]}A$.

□

Analogno, važi i sledeća simetrična teorema.

Teorema 3.29 *Ako je* $X = A^{[\dagger]} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ *Mur-Penrouzov inverz od* $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ *tada je* $(A^{[\dagger]})^{[*]}A^{[\dagger]}$ *Mur-Penrouzov inverz od* $AA^{[*]}$ *ako i samo ako je* ${A_2}^* H_1 y_1 = 0$ *za sve* $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ *koji zadovoljavaju*${X_2}^* H_1(X_1 y_1 + X_2 y_2) = 0$.

Dokaz. Analogno dokazu Teoreme 3.28.

□

Posledica 3.3 *Ako je* $X = A^{[\dagger]} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ *Mur-Penrouzov inverz od* $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ *i* $A_2 = 0$ *i* $X_2 = 0$ *(što je ekvivalentno uslovu da linearne relacije* $A^{[*]}$ *i* $X^{[*]}$ *imaju potpune domene), tada važi* $(A^{[*]}A)^{[\dagger]} = A^{[\dagger]}(A^{[\dagger]})^{[*]}$, *i* $(AA^{[*]})^{[\dagger]} = (A^{[\dagger]})^{[*]}A^{[\dagger]}$.

Dokaz. Kako je $A_2 = X_2 = 0$ imamo da je

$$A_2^* H_1(A_1 y_1 + A_2 y_2) = 0, \quad X_2^* H_1(X_1 y_1 + X_2 y_2) = 0,$$

$$A_2^* H_1 y_1 = 0 \ \text{ i } \ X_2^* H_1 y_1 = 0$$

za sve vektore $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$. Prema Teoremi 3.28 i Teoremi 3.29 sledi

$$(A^{[*]}A)^{[\dagger]} = A^{[\dagger]}(A^{[\dagger]})^{[*]} \quad \text{i} \quad (AA^{[*]})^{[\dagger]} = (A^{[\dagger]})^{[*]}A^{[\dagger]}.$$

□

Sledećim primerom ilustrujemo da za razliku od osobine (4) u Teoremi 3.15, jednakosti $A^{[\dagger]} = (A^{[*]}A)^{[\dagger]}A^{[*]}$ i $A^{[\dagger]} = A^{[*]}(AA^{[*]})^{[\dagger]}$ ne važe u prostorima sa degenerativnim nedefinitnim skalarnim proizvodom.

Primer 3.5 *Uzmimo matrice* $H = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ *i* $A = I_2$. *Tada je* $A^{[\dagger]} = X = I_2$. *Prema Posledici 3.3 važi* $(A^{[*]}A)^{[\dagger]}A^{[*]} = A^{[\dagger]}(A^{[\dagger]})^{[*]}A^{[*]} = XX^{[*]}A^{[*]} = \left\{ \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \right\}$.

Takođe, $A^{[*]}(AA^{[*]})^{[\dagger]} = A^{[*]}(A^{[\dagger]})^{[*]}A^{[\dagger]} = A^{[*]}X^{[*]}X = \left\{ \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \right\}$. *Prema tome, biće*

$(A^{[*]}A)^{[\dagger]}A^{[*]} \neq A^{[\dagger]}$ *and* $A^{[*]}(AA^{[*]})^{[\dagger]} \neq A^{[\dagger]}$.

Potreban i dovoljan uslov za egzistenciju Mur-Penrouzovog inverza matrice u nedegenerativnom slučaju $r(AA^{[*]}) = r(A) = r(A^{[*]}A)$ uključuje rangove matrica. Kako su za matricu A u degenerativnom slučaju $AA^{[*]}$ i $A^{[*]}A$ linearne relacije, jasno je da se ovaj uslov nikako ne može primeniti. U dosadašnjem radu nismo uspeli da damo odgovor na ovo pitanje, pa ga ostavljamo kao otvoren problem.

Otvoren problem. Odrediti potrebne i dovoljne uslove za egzistenciju Mur-Penrouzovog inverza matrice u degenerativnim prostorima sa nedefinitnim skalarnim proizvodom.

3.4 Mur-Penrouzov inverz H-normalnih matrica

U nastavku ćemo pod matricama $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ podrazumevati matricu oblika

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{bmatrix}, \text{ gde je podmatrica } A_1 \in \mathbb{C}^{m\times m}, \text{ za } m \leq n.$$

U opštem slučaju, ako postoji Mur-Penrouzov inverz matrice $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, ne mora postojati i Mur-Penrouzov inverz podmatrice A_1.

Primer 3.6 *Neka je* $H = \left[\begin{array}{c|c} H_1 & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$. *Mur-Penrouzov inverz matrice*

$$A = \left[\begin{array}{c|c} A_1 & A_2 \\ \hline A_3 & A_4 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

postoji i to je matrica

$$X = \left[\begin{array}{c|c} X_1 & X_2 \\ \hline X_3 & X_4 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ \hline -1 & 1 & 0 \end{array}\right].$$

Kako je $r(A_1) \neq r(A_1{A_1}^{[*]})$, *prema Teoremi* 3.13 sledi da Mur-Penrouzov inverz matrice A_1 ne postoji.

Ukoliko je data matrica $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ H-normalna, tada ne samo da iz egzistencije Mur-Penrouzovog inverza matrice A sledi i egzistencija Mur-Penrouzovog inverza podmatrice A_1, već se može zaključiti da je ona još i matrica ermitskog ranga. Definicija H-normalnih matrica i linearnih relacija u prostorima sa degeneratvnim skalarnim proizvodom već je data u prethodnom delu. Podsećanja radi, napomenućemo da je kvadratna matrica $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ H-normalna ako i samo ako je $A_2 = 0$ i $A_1{A_1}^{[*]} = {A_1}^{[*]}A_1$.

Teorema 3.30 *Neka je* $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ *H-normalna matrica. Ako postoji* $A^{[\dagger]} \in \mathbb{C}^{n\times n}$, *tada postoji i* ${A_1}^{[\dagger]}$ *i važi da je* A_1 *matrica ermitskog ranga.*

Dokaz. Kako je matrica A H-normalna, sledi da je A_1 H_1-normalna matrica. Za matricu $X \in \mathbb{C}^{n\times n}$ koja je Mur-Penrouzov inverz matrice A imamo da važi:

$$r(A_1) = r(A_1X_1A_1) = r((A_1X_1)^{[*]}A_1) = r({X_1}^{[*]}{A_1}^{[*]}A_1) \leq r({A_1}^{[*]}A_1) \leq r(A_1).$$

Prema tome,

$$r(A_1) = r({A_1}^{[*]}A_1) = r(A_1{A_1}^{[*]}),$$

pa sledi da Mur-Pennrouzov inverz za A_1 postoji.

Drugi deo dokaza sledi iz Teoreme 3.21.

□

Interesantno je pitanje reprezentacije Mur-Penrouzovog inverza. Mi dajemo ovu reprezentaciju za poseban slučaj 2×2 blok matrice $A = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ A_3 & A_4 \end{bmatrix}$, pri čemu je blok A_4 invertibilna matrica. Sa aspekta linearnih relacija ovo znači da $AA^{[*]}$ i $A^{[*]}A$ imaju potpun domen, a ako je A H-normalna linearna relacija (zbog uslova invertibilnosti za A_4) dobijamo da je $A^{[*]}A = AA^{[*]}$.

Za pokazivanje ovog reprezentacije biće nam potreban poznati Penrouzov rezultat, koji ima veliki značaj u rešavanju linearnih sistema. Na osnovu njega je Bjerhamar [11] dao je karakterizaciju skupa unutrašnjih inverza proizvoljne matrice A.

Teorema 3.31 *([81]) Neka su $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$, $B \in \mathbb{C}^{p\times q}$ i $D \in \mathbb{C}^{m\times q}$. Matrična jednačina*

$$AXB = D \tag{3.10}$$

ima rešenje ako i samo ako postoje $A^{(1)} \in A\{1\}$ i $B^{(1)} \in B\{1\}$, takvi da je

$$AA^{(1)}DB^{(1)}B = D. \tag{3.11}$$

U tom slučaju opšte rešenje jednačine (3.10) *je*

$$X = A^{(1)}DB^{(1)} + Y - A^{(1)}AYBB^{(1)}, \tag{3.12}$$

za proizvoljnu matricu $Y \in \mathbb{C}^{n\times p}$.

Posledica 3.4 *([11]) Neka je $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$ i $A^{(1)} \in A\{1\}$. Tada je*

$$A\{1\} = \{A^{(1)} + Z - A^{(1)}AZBB^{(1)} : Z \in \mathbb{C}^{m\times n}\}. \tag{3.13}$$

Teorema 3.32 *Neka je $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ H-normalna matrica takva da postoji $A^{[\dagger]} \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Neka je još i $A_4 \in \mathbb{C}^{(n-m)\times(n-m)}$ invertibilna matrica. Tada Mur-Penrouzov inverz ima sledeću reprezentaciju*

$$X = \begin{bmatrix} A_1^{[\dagger]} & 0 \\ -A_4^{-1}A_3A_1^{[\dagger]}A_1A_1^{(1)} + Y - YA_1A_1^{(1)} & A_4^{-1} \end{bmatrix}, \tag{3.14}$$

gde je $Y \in \mathbb{C}^{(n-m)\times m}$ proizvoljna matrica.

Dokaz. Kako je prema pretpostavci A H-normalna matrica, sledi da je $A_2 = 0$. Neka je matrica $X = \begin{bmatrix} X_1 & X_2 \\ X_3 & X_4 \end{bmatrix}$ Mur-Penrouzov inverz matrice A. Pokazaćemo da je on u obliku (3.20).
Jednačine iz Teoreme 3.23 svode se na:

(i) $A_1X_2 = 0$,

(ii) A_1X_1 je H_1-samoadjungovana matrica ,

(iii) $X_2A_4 = 0$,

(iv) $X_1A_1 + X_2A_3$ je H_1-samoadjungovana matrica,

(v) $A_1X_1A_1 = A_1$,

(vi) $0 = 0$,

(vii) $A_3X_1A_1 + A_4X_3A_1 + A_3X_2A_3 + A_4X_4A_3 = A_3$,

(viii) $A_4X_4A_4 = A_4$,

(ix) $X_1A_1X_1 + X_2A_3X_1 = X_1$,

(x) $X_1A_1X_2 + X_2A_3X_2 = X_2$,

(xi) $X_3A_1X_1 + X_4A_3X_1 + X_4A_4X_3 = X_3$,

(xii) $X_4A_3X_2 + X_4A_4X_4 = X_4$.

Zbog invertibilnosti matrice A_4, iz (iii) se jednostavno dobija da je $X_2 = 0$, a iz (8) da je $X_4 = A_4^{-1}$. Potrebni i dovoljni uslovi za egzistenciju Mur-Penrouzovog inverza sada se redukuju na:

$$\begin{array}{llll} (2) & (A_1X_1)^{[*]H_1} = A_1X_1, & (4) & (X_1A_1)^{[*]H_1} = X_1A_1, \\ (5) & A_1X_1A_1 = A_1 \quad \text{i} & (9) & X_1A_1X_1 = X_1. \end{array}$$

Zbog jedinstvenosti Mur-Penrouzovog inverza za matrice u nedegenerativnim prostorima sa nedefinitnim skalarnim proizvodom, sledi

$$X_1 = A_1^{[\dagger]}. \tag{3.15}$$

Ostaje još da se pokaže da je matrica $X_3 = -A_4^{-1}A_3A_1^{[\dagger]}A_1A_1^{(1)} + Y - YA_1A_1^{(1)}$.
Iz (7) imamo

$$A_3A_1^{[\dagger]}A_1 + A_4X_3A_1 = 0, \tag{3.16}$$

dok se (11) svodi na:

$$X_3A_1A_1^{[\dagger]} + A_4^{-1}A_3A_1^{[\dagger]} = 0. \tag{3.17}$$

Primetimo prvo da je sistem jednačina (3.16) i (3.17) ekvivalentan sa

$$X_3A_1 = -A_4^{-1}A_3A_1^{[\dagger]}A_1. \tag{3.18}$$

Zaista, jednačina (3.18) se dobija lako iz jednačine (3.16), množenjem sa A_4^{-1} sa leve strane, odnosno iz jednačine (3.17) množenjem sa A_1 sa desne strane.

Obrnuto, ako (3.18) pomnožimo sa leve strane sa A_4 dobija se (3.16), dok množenjem iste jednakosti sa leve strane sa $A_1^{[\dagger]}$, dobijamo (3.17).

Kako je

$$-II^{(1)}A_4^{-1}A_3A_1^{[\dagger]}A_1A_1^{(1)}A_1 = -A_4^{-1}A_3A_1^{[\dagger]}A_1, \tag{3.19}$$

uslov (4.27) je zadovoljen, pa je prema Teoremi 3.31 jednačina (3.18) rešiva.
Njeno opšte rešenje prema (3.12) dato je sa

$$X_3 = -A_4^{-1}A_3A_1^{[\dagger]}A_1A_1^{(1)} + Y - YA_1A_1^{(1)}.$$

Obratno, direktnom proverom lako se pokazuje da je

$$X = \begin{bmatrix} A_1^{[\dagger]} & 0 \\ -A_4^{-1}A_3A_1^{[\dagger]}A_1A_1^{(1)} + Y - YA_1A_1^{(1)} & A_4^{-1} \end{bmatrix},$$

gde je $Y \in \mathbb{C}^{(n-m)\times m}$ proizvoljna matrica, Mur-Penrouzov inverz zadate matrice A.

□

Teorema 3.33 *Neka je $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ H-normalna matrica. Ako postoji $A_1^{[\dagger]}$ i važi $N(A_1) \subseteq N(A_3)$, tada postoji Mur-Penrouzov inverz matrice A za koji važi*

$$A^{[\dagger]} = \begin{bmatrix} A_1^{[\dagger]} & 0 \\ -A_4^{(1,2)}A_3A_1^{[\dagger]} + Y - A_4^{(1,2)}A_4Y & A_4^{(1,2)} \end{bmatrix}, \tag{3.20}$$

gde je $Y \in \mathbb{C}^{(n-m)\times m}$ matrica za koju je $PYQ = O$, gde je $P = I - A_4^{(1,2)}A_4$ i $Q = I - A_1A_1^{[\dagger]}$.

Dokaz. Pokazujemo prvo da je sa (4.3) definisan Mur-Penrouzov inverz matrice A. Kako je $N(A_1) \subseteq N(A_3)$ i postoji $A_1^{[\dagger]}$ imamo

$$A_3A_1^{[\dagger]}A_1 = A_3. \tag{3.21}$$

Sada imamo:

$$\begin{aligned} AX &= \begin{bmatrix} A_1A_1^{[\dagger]} & 0 \\ A_3A_1^{[\dagger]} - A_4A_4^{(1,2)}A_3A_1^{[\dagger]} + A_4Y - A_4A_4^{(1,2)}A_4Y & A_4A_4^{(1,2)} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} A_1A_1^{[\dagger]} & 0 \\ A_3A_1^{[\dagger]} - A_4A_4^{(1,2)}A_3A_1^{[\dagger]} & A_4A_4^{(1,2)} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Slično je

$$\begin{aligned} XA &= \begin{bmatrix} A_1^{[\dagger]}A_1 & 0 \\ -A_4^{(1,2)}A_3A_1^{[\dagger]}A_1 + YA_1 - A_4^{(1,2)}A_4YA_1 + A_4^{(1,2)}A_3 & A_4^{(1,2)}A_4 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} A_1^{[\dagger]}A_1 & 0 \\ -A_4^{(1,2)}A_3 + YA_1 - A_4^{(1,2)}A_4YA_1 + A_4^{(1,2)}A_3 & A_4^{(1,2)}A_4 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Proverićemo uslove za Mur-Penrouzov inverz:

(1)

$$\begin{aligned} AXA &= \begin{bmatrix} A_1A_1^{[\dagger]}A_1 & 0 \\ A_3A_1^{[\dagger]}A_1 - A_4A_4^{(1,2)}A_3A_1^{[\dagger]}A_1 + A_4A_4^{(1,2)}A_3 & A_4A_4^{(1,2)}A_4 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ A_3 & A_4 \end{bmatrix} = A, (\text{zbog uslova } (3.21)). \end{aligned}$$

(2)

$$XAX = \begin{bmatrix} A_1^{[\dagger]}A_1A_1^{[\dagger]} & 0 \\ K & A_4^{(1,2)}A_4A_4^{(1,2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1^{[\dagger]} & 0 \\ K & A_4^{(1,2)} \end{bmatrix},$$

gde je

$$\begin{aligned} K &= YA_1A_1^{[\dagger]} - A_4^{(1,2)}A_4YA_1A_1^{[\dagger]} - A_4^{(1,2)}A_3A_1^{[\dagger]} \\ &= Y - A_4^{(1,2)}A_4Y - (I - A_4^{(1,2)}A_4)Y(I - A_1A_1^{[\dagger]}) - A_4^{(1,2)}A_3A_1^{[\dagger]} \\ &= Y - A_4^{(1,2)}A_4Y - PYQ - A_4^{(1,2)}A_3A_1^{[\dagger]} \\ &= Y - A_4^{(1,2)}A_4Y - A_4^{(1,2)}A_3A_1^{[\dagger]} = X_3. \end{aligned}$$

(3) i (4) Jednostavno se pokazuje da važi $(HAX)^* = HAX$ i $(HXA)^* = HXA$.

Obrnuto, neka je X potencijalni Mur-Penrouzov inverz. Iz H - normalnosti ponovo imamo da su potrebni i dovoljni uslovi kao u dokazu prethodne teoreme (i) – (xii). Kako je (3.21), množenjem jednačine (i) sa $A_3A_1^{[\dagger]}$ sa leve strane, dobija se $A_3X_2 = 0$. Zamenom u (x) sledi da je $X_2 = 0$.

Iz uslova (ii), (iv), (v) i (ix), zbog jedinstvenosti Mur-Penrouzovog inverza sledi da je

$$X_1 = A_1^{\dagger]}. \tag{3.22}$$

Iz uslova $(viii)$ i (xii) dobijamo da je $X_4 = A_4^{(1,2)}$ i refleksivni inverz uvek postoji. Sada se iz (vii) dobija

$$A_4X_3A_1 + A_4A_4^{(1,2)}A_3 = 0, \text{ tj. } A_4X_3A_1 = -A_4A_4^{(1,2)}A_3. \tag{3.23}$$

Uslov (4.27) iz Teoreme 3.31 je zadovoljen npr. za $A_1^{[\dagger]} \in A_1\{1\}$ i $A_4^{(1,2)} \in A_4\{1\}$.

Zaista, uz uslov $A_3A_1^{[\dagger]}A_1 = A_3$ imamo

$$-A_4A_4^{(1,2)}A_4A_4^{(1,2)}A_3A_1^{[\dagger]}A_1 = -A_4A_4^{(1,2)}A_3, \tag{3.24}$$

pa je

$$\begin{aligned} X_3 &= -A_4^{(1,2)}A_4A_4^{(1,2)}A_3A_1^{[\dagger]} + Y - A_4^{(1,2)}A_4YA_1A_1^{[\dagger]} \\ &= -A_4^{(1,2)}A_3A_1^{[\dagger]} + Y - A_4^{(1,2)}A_4YA_1A_1^{[\dagger]}, \end{aligned} \tag{3.25}$$

za proizvoljnu matricu $Y \in \mathbb{C}^{(n-m)\times m}$. Ova matrica X_3 mora da zadovolji i uslov (xi)

Zamenom (3.26) u uslov (xi) dobijamo da je X_3 rešenje za

$$X_3A_1A_1^{[\dagger]} + A_4^{(1,2)}A_3A_1^{[\dagger]} + A_4^{(1,2)}A_4X_3 = X_3$$

ako i samo ako je

$$\begin{aligned} -A_4^{(1,2)}A_3A_1^{[\dagger]} &+ YA_1A_1^{[\dagger]} - A_4^{(1,2)}A_4YA_1A_1^{[\dagger]} \\ +A_4^{(1,2)}A_3A_1^{[\dagger]} &- A_4^{(1,2)}A_3A_1^{[\dagger]} + A_4^{(1,2)}A_4Y \\ -A_4^{(1,2)}A_4YA_1A_1^{[\dagger]} &= -A_4^{(1,2)}A_3A_1^{[\dagger]} + Y - A_4^{(1,2)}A_4YA_1A_1^{[\dagger]}. \end{aligned}$$

Posle sređivanja dobija se da je

$$\begin{aligned} YA_1A_1^{[\dagger]} &- A_4^{(1,2)}A_4YA_1A_1^{[\dagger]} \\ &+ A_4^{(1,2)}A_4Y = Y, \end{aligned}$$

tj.

$$(I - A_4^{(1,2)}A_4)Y(I - A_1A_1^{[\dagger]}) = 0,$$

čime smo pokazali da matrica Y mora da zadovoji uslov $PYQ = 0$, gde su $P = (I - A_4^{(1,2)}A_4)$ i $Q = (I - A_1A_1^{[\dagger]})$.

□

4 EP matrice

Ova glava sadrži rezultate vezane za EP matrice u prostorima sa nedefinitnim skalarnim proizvodom u odnosu na nedefinitan matrični proizvod. U svim sekcijama koje slede predstavljeni su originalni rezultati iz [83]. Neki od njih predstavljaju poboljšanje rezultata koje je dao indijski matematičar Jayaraman u [51].

4.1 Nedefinitan matrični proizvod

Kao i u prvom delu disertacije, nedefinitan skalarni proizvod na C^n je seskvilinearna forma definisana sa

$$[x, y] = \langle Hx, y \rangle, \quad x, y \in \mathbb{C}^n,$$

gde je $H \in \mathbb{C}^{n\times n}$ ermitska invertibilna matrica.

Ovde ćemo uvesti i izvesne promene koje se tiču notacije. Naime, umesto oznake H u literaturi je češće je u upotrebi J kojom je takođe označena ermitska invertibilna matrica. Shodno tome, i mi ćemo koristiti takvu oznaku. Pored toga zahtevaćemo da za ovu matricu J važi i dodatni uslov $J^2 = I$. Ovaj uslov koristili su i autori u radovima [51, 87, 88] i predstavlja svojevrsno uopštenje prostora Minkovskog. U nekim slučajevima ovaj uslov neće biti neophodan, dok će u drugim biti od velikog značaja.

Druga bitna razlika jeste u samoj definiciji proizvoda matrica (vektora). U radu [88], definisan je novi proizvod matrica koji je nazvan *nedefinitan matrični proizvod*. Na taj način dobija se analogija sa nekim rezultatima u Euklidskom prostoru.

Može se definisati i Mur-Penrouzov kao i grupni inverz matrice u odnosu na nedefinitan matrični proizvod, što će u nastavku biti i učinjeno.

Definicija 4.1 *([88]) Neka je $J_n \in C^{n\times n}$ matrica za koju je $J_n = J_n^* = J_n^{-1}$. Nedefinitan matrični proizvod matrica $A \in C^{m\times n}$ i $B \in C^{n\times l}$ definisan je sa*

$$A \circ B = AJ_nB. \tag{4.1}$$

Definicija 4.2 *([88]) Neka je $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$. Adjungovana matrica matrice A je matrica*

$$A^{[*]} = J_nA^*J_m.$$

Interesantno je da za ovako definisanu matricu $A^{[*]}$ važi

$$[A \circ x, y] = [x, (I \circ A \circ I)^{[*]} \circ y] \;\text{ i }\; [Ax, y] = [x, A^{[*]}y],$$

ali ne i $[A \circ x, y] = [x, A^{[*]} \circ y]$. U nastavku ćemo koristiti nedefinitan matrični proizvod bez posebnog naglašavanja matrice J i njene dimenzije. Za $J_n = I_n$ nedefinitan matrični proizvod svodi se na običan proizvod matrica, a J - adjungovanost na uobičajnu adjungovanost matrica.

Definicija 4.3 *([88]) Matrica $X \in C^{n\times m}$ je Mur-Penrouzov inverz matrice $A \in C^{m\times n}$ ako zadovoljava sledeće četiri jednačine:*

$$A \circ X \circ A = A, \quad X \circ A \circ X = X, \quad (A \circ X)^{[*]} = A \circ X \quad i \quad (X \circ A)^{[*]} = X \circ A. \tag{4.2}$$

Definicija 4.4 *([88]) Matrica $X \in C^{n\times n}$je grupni inverz matrice $A \in C^{n\times n}$, ako zadovoljava sledeće jednačine:*

$$A \circ X \circ A = A, \quad X \circ A \circ X = X \quad i \quad A \circ X = X \circ A.$$

Kako bismo istakli razliku između pojmova Mur-Penrouzovog inverza u prostorima sa nedefinitnim skalarnim proizvodom u sučaju običnog ili nedefinitnog matričnog proizvoda, uvodimo novu notaciju. Mur-Penrouzov inverz pravougaone matrice A označavaćemo sa $A^{[\ddagger]}$, a grupni inverz iz Definicije 4.4 sa $A^{[\#]}$.

Potreban i dovoljan uslov egzistencije Mur-Penrouzovog inverza u ovom slučaju je $r(A^{[*]} \circ A) = (A \circ A^{[*]}) = r(A)$ i nije teško primetiti da je on uvek zadovoljen. Štaviše iz samih Penrouzovih jednačina (4.2), kao iz osobina matrice J, sledi da Mur-Penrouzov inverz matrice A ima oblik

$$A^{[\ddagger]} = J_n A^{\dagger} J_m \tag{4.3}$$

gde je sa $A^{\dagger}$ označen običan Mur-Penrouzov inverz. Iz ovog oblika takođe sledi egzistencija i jedinstvenost.

S druge strane, slična analogija kod grupnog inverza ne važi. Uslovi postojanja grupnog inverza u Euklidskom slučaju i u prostoru sa nedefinitnim skalarnim proizvodom i nedefinitnim matričnim proizvodom potpuno su nezavisni. Tako, na primer, za

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ i } J = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$A^{[\#]}$ ne postoji, dok je $A^{\#} = \frac{1}{4}A$. Za matrice

$$B \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ i } J = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

biće $B^{[\#]} = \frac{1}{4}B$, dok $B^{\#}$ ne postoji.

Poznato je da grupni inverz matrice u Euklidskom prostoru postoji ako i samo ako je ispunjen uslov $r(A^2) = r(A)$. Slično, potreban i dovoljan uslov egzistencije grupnog inverza u našem slučaju biće $r(A^{(2)}) = r(A)$, tj. $r(AJA) = r(A)$. Ukoliko postoji grupni inverz, on je jedinstven.

Može se pokazati da važi još i $A^{[\#]} = (AJ)^{\#}J$. Ukoliko matrice A i J komutiraju, tada oba grupna inverza postoje i u tom slučaju važi $A^{[\#]} = A^{\#}$.

U nastavku dajemo definiciju slike i jezgra matrica u odnosu na nedefinitan matrični proizvod. Za proizvoljnu matricu A oni će radi jasnijeg izlaganja biti označeni sa $Ra(A)$, odnosno sa $Nu(A)$.

Definicija 4.5 *Neka je $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$. Skup $Ra(A) = \{A \circ x : x \in \mathbb{C}^n\}$ je slika matrice A i predstavlja potprostor u $\mathbb{C}^m$.*
Skup $Nu(A) = \{x \in \mathbb{C}^n : A \circ x = 0\}$ je jezgro matrice A i predstavlja potprostor u $\mathbb{C}^n$.

Važi:

$$Ra(A) = R(A) \text{ i } Nu(A) = N(AJ), \tag{4.4}$$

kao i

$$Ra(A^{[*]}) = R((AJ)^*) \quad \text{i} \quad Nu(A^{[*]}) = N(A^*). \tag{4.5}$$

Indijski matrematičar Menakši je u radu [64] dao dovoljne uslove pod kojima zbir EP matrica ostaje EP. Ovaj rezultat je takođe uopšten i na $J-EP$ matrice u originalnom radu [83] i predstavljen je u sledeój sekciji.

Zakon obrnutog redosleda za Mur-Penrouzov inverz proizvoda matrica izučavali su brojni matematičari. U radu [83] ovaj problem je takođe izučavan i dato je nekoliko rezultata pod pretpostavkom da je (neka od) matrica u proizvodu $J-EP$ matrica.

Na kraju, u sekciji 4.4, dokazujemo generalizaciju zvezda parcijanog uređenja (star partial ordering) na prostore sa nedefinitnim skalarnim proizvodom i sa nedefinitnim matričnim proizvodom.

4.2 EP i $J-EP$ matrice

U Glavi 3 bilo je reči o EP-matricama. Veliki broj matematičara izučavao je EP matrice i EP linearne operatore na Banahovim i Hilbertovim prostorima. Neki od bitnijih rezultata mogu se naći u [6, 12, 16, 17, 26, 23, 30, 43, 55]. D. Mosić, D. Đorđević i J. Koliha u [77, 78] ispitivali su EP elemente na prstenima sa involucijom, pri čemu su do poznatih rezultata došli čisto algebarski.

U radu [51] iz 2012. godine, autor je definisao EP matrice u prostoru sa nedefinitnim skalarnim proizvodom u odnosu na nedefinitni matrični proizvod. Takve matrice nazvane su $J-EP$ matricama. U tom radu pokazane su osobine ovih matrica, kao i veza sa običnim EP matricama. U autorskom radu [83], veliki broj rezultata je uopšten, dok je više njih dokazano pod oslabljenim uslovima od postojećih. $J - EP$ matrice su matrice koje komutiraju sa svojim Mur-Penrouzovim inverzom, pri čemu je nedefinitni matrični proizvod definisan sa (4.1).

Definicija 4.6 *([51]) Matrica $A \in C^{n\times n}$ je J-EP ako važi $A \circ A^{[\ddagger]} = A^{[\ddagger]} \circ A$.*

Jasno je da se klase EP i $J - EP$ matrica ne poklapaju, tj. neka EP matrica ne mora da bude i $J - EP$ i obrnuto. Koristeći poznati rezultat da za kvadratnu matricu $J_n = J_n^* = J_n^{-1}$ i proizvoljnu matricu $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$ važi $(AJ)^\dagger = JA^\dagger$, jednostavno se može dokazati sledeća lema koji daje finu vezu između EP i $J - EP$ matrica.

Lema 4.1 *([51]) Matrica $A \in C^{n\times n}$ je J-EP matrica ako i samo ako je $AJ \in \mathbb{C}^{n\times n}$ EP matrica.*

U radu [17] Čeng i Tian dali su karakterizaciju EP kompleksnih matrica, dok je D. Đorđević u [23] došao do sličnih rezultata za EP operatore u Hilbertovim prostorima. Može se pokazati da mnoge osobine koje važe za EP matrice važe i za $J - EP$ matrice. Analogno, sledećom teoremom, dajemo i karakterizaciju $J - EP$ matrica. Dokaz izostavljamo, a sledi direktno iz Leme 4.1.

Teorema 4.1 *Neka je $A \in C^{n\times n}$. Sledeća tvrđenja su ekvivalentna:*

(1) *A je J-EP;*

(2) $A \circ A^{[\ddagger]} = A^{(2)} \circ (A^{[\ddagger]})^{(2)}$;

(3) $A^{[\ddagger]} \circ A = (A^{[\ddagger]})^{(2)} \circ A^{(2)}$;

(4) $A \circ A^{[\ddagger]} \circ A^{[*]} \circ A = A^{[*]} \circ A \circ A \circ A^{[\ddagger]}$;

(5) $A^{[\ddagger]} \circ A \circ A \circ A^{[*]} = A \circ A^{[*]} \circ A^{[\ddagger]} \circ A$;

(6) $A \circ A^{[\ddagger]} \circ (A \circ A^{[*]} - A^{[*]} \circ A) = (A \circ A^{[*]} - A^{[*]} \circ A) \circ A \circ A^{[\ddagger]}$;

(7) $A^{[\ddagger]} \circ A \circ (A \circ A^{[*]} - A^{[*]} \circ A) = (A \circ A^{[*]} - A^{[*]} \circ A) \circ A \circ A^{[\ddagger]}$;

(8) $A^{[*]} \circ A^{[\#]} \circ A + A \circ A^{[\#]} \circ A^{[*]} = 2A^{[*]}$;

(9) $A^{[\ddagger]} \circ A^{[\#]} \circ A + A \circ A^{[\#]} \circ A^{[\ddagger]} = 2A^{[\ddagger]}$;

(10) $A \circ A \circ A^{[\ddagger]} + A^{[\ddagger]} \circ A \circ A = 2A$;

(11) $A \circ A \circ A^{[\ddagger]} + (A \circ A \circ A^{[\ddagger]})^{[*]} = A + A^{[*]}$;

(12) $A^{[\ddagger]} \circ A \circ A + (A^{[\ddagger]} \circ A \circ A)^{[*]} = A + A^{[*]}$.

Teorema 4.2 *([51]) Neka su A i B kvadratne matrice istih dimenzija. Tada važi sledeće:*

(a) *Ako je $AJ = JA$, tada je A EP matrica ako i samo ako je A J-EP matrica;*

(b) Ako je $AJ = JA$, tada AB je EP ako i samo ako $A \circ B$ je J-EP;

(c) A je J-EP ako i samo ako je $Ra(A^{[2]}) = Ra(A^{[*]})$.

Dokaz. (a): Neka je $AJ = JA$. Tada važi i $A^\dagger J = JA^\dagger$. Po definiciji je $A \circ A^{[\ddagger]} = AA^\dagger J$. S druge strane važi $A^{[\ddagger]} \circ A = JA^\dagger A$, pa je

$$A \circ A^{[\ddagger]} = A^{\ddagger} \circ A \text{ako i samo ako je } AA^\dagger J = JA^\dagger A,$$

što je ekvivalentno sa $A^\dagger A = AA^\dagger$, tj. A je $J - EP$ matrica.

(b) Neka je $A \circ B$ $J - EP$ matrica. Tada je $(A \circ B)^{[\ddagger]} \circ (A \circ B) = (A \circ B) \circ (A \circ B)^{[\ddagger]}$, tj.

$$J(AJB)^\dagger AJB = AJB(AJB)^\dagger J,$$

odakle, zbog komutativnosti matrica A i J sledi

$$(AB)^\dagger AB = AB(AB)^\dagger,$$

čime je pokazano da je AB EP-matrica.
Drugi smer se dokazuje analogno.

(c) Za dokaz ovog tvrđenja koristimo Lemu 4.1. Sada imamo: A je $J - EP$ matrica ako i samo ako je AJ EP matrica, što je ekvivalentno sa $R(AJ) = R((AJ)^*) = R(JA^*J)$. Dalje sledi

$$Ra(A^{[2]}) = R((AJ)^2) = R(AJ) = R(JA^*J) = R(A^{[*]}).$$

$\square$

Sledećih nekoliko teorema i primera predstavljaju originalne rezultate objavljene u radu [83] i odnose se na vezu između EP i $J - EP$ matrica. Narednom teoremom dajemo potrebne i dovoljne uslove da nedefinitni matrični proizvod matrica A i B bude $J - EP$.

Teorema 4.3 *Neka je $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ takva da je $A^{[*]} = A$ i $B \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Matrica $A \circ B$ je J-EP ako i samo ako je A^*B EP matrica.*

Dokaz. Ovo tvrđenje možemo dokazati na dva načina. Ovde ćemo izložiti oba. Prvi način je algebarski, uz korišćenje poznate činjenice da je $A^{[\ddagger]} = JA^\dagger J$. Drugi način se bazira na Lemi 4.1.

Dokaz 1. Neka je $A^{[*]} = A$. Tada je $JA^*J = A$, t.j.

$$A^*J = JA \quad \text{i} \quad JA^* = AJ.$$

Prema tome, imamo $(A \circ B)^{[\ddagger]} \circ A \circ B = A \circ B \circ (A \circ B)^{[\ddagger]}$ ako i samo ako je

$$J(AJB)^\dagger AJB = AJB(AJB)^\dagger J,$$

tj. $J(JA^*B)^\dagger JA^*B = JA^*B(JA^*B)^\dagger J$, što je dalje ekvivalentno sa

$$J(A^*B)^\dagger A^*B = JA^*B(A^*B)^\dagger.$$

Množeći ovaj izraz sa leve strane matricom J dobijamo $(A^*B)^\dagger A^*B = A^*B(A^*B)^\dagger$, čime je tvrđenje dokazano.

Dokaz 2. Drugi dokaz je nešto jednostavniji: Pod pretpostavkom da je $A^{[*]} = A$, imamo $A \circ B$ je J-EP matrica ako i samo ako AJB je J-EP, što je ekvivalentno sa

$$JA^*B \text{ je } J\text{- EP}. \tag{4.6}$$

Na osnovu Leme 4.1 dobijamo da (4.6) važi ako i samo ako je A^*B EP - matrica.

□

Teorema 4.4 *Neka su A i B kvadratne matrice istih dimenzija. Ako A komutira sa JB ili ako B komutira sa AJ tada je proizvod $A \circ B$ $J - EP$ matrica ako i samo ako je BA EP matrica.*

Dokaz. Neka matrica A komutira sa JB. Tada, prema Lemi 4.1 sledi da je $A \circ B$ $J - EP$ ako i samo ako je $AJBJ$ EP matrica, što je dalje ekvivalentno sa tvrđenjem da je $JBAJ$ EP matrica. Ako primenimo Lemu 4.1 dvaput, dobijamo da je BA takođe EP matrica. Ostatak dokaza izvodi se analogno.

□

Sledećom teoremom dajemo uslov pod kojim je neka matrica A istovremeno EP i $J - EP$. Ovaj uslov je slabiji od uslova datog Teoremom 4.2, (a).

Teorema 4.5 *Neka je $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ takva da matrica J komutira sa $A^\dagger A$. Matrica A je J-EP ako i samo ako je A EP-matrica.*

Dokaz. Neka J komutira sa $A^\dagger A$ i neka je A J-EP matrica. Tada imamo

$$A^\dagger A = A^\dagger AJJ = JA^\dagger AJ = JA^\dagger JJAJ = A^{[\ddagger]} \circ AJ = A \circ A^{[\ddagger]} J = AA^\dagger.$$

Prema tome, A je EP-matrica.

Obrnuto, neka J komutira sa $A^\dagger A$ pri čemu je A EP matrica. Tada važi

$$A \circ A^{[\ddagger]} = AJJA^\dagger J = AA^\dagger J = A^\dagger AJ = JA^\dagger A = A^{[\ddagger]} \circ A,$$

čime se dokazuje da je A J-EP matrica.

□

Analogni rezultat daćemo sledećom teoremom bez dokaza.

Teorema 4.6 *Neka je $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ takva da matrica J komutira sa $AA^\dagger$. Tada važi da je A $J-EP$ matrica ako i samo ako je A EP matrica.*

Da su uslovi Teoreme 4.2 zaista oslabljeni pokazujemo teoremom i primerom koji slede.

Teorema 4.7 *Neka je $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Ako je $AJ = JA$ tada je $A^\dagger AJ = JA^\dagger A$ i $JAA^\dagger = AA^\dagger J$.*

Primer 4.1 *Neka su $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ i $J = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Kako je A invertibilna matrica, važi $JA^\dagger A = A^\dagger AJ = J$. Međutim ni A ni $A^\dagger$ ne komutiraju sa J.*

U nastavku dajemo još jedan rezultat o ekvivalenciji EP i $J-EP$ matrica.

Teorema 4.8 *Neka je $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ i $N(AJ) = N(A)$. Matrica A je EP ako i samo ako je A J-EP matrica.*

Dokaz. Iz uslova $N(AJ) = N(A)$, uzimajući direktne komplemente obeju strana, dobijamo $R((AJ)^*) = R(A^*)$.

Neka je A J-EP matrica. Prema Lemi 4.1 sledi da je AJ je EP matrica. Tada je $R((AJ)^*) = R(AJ)$ i $N((AJ)^*) = N(AJ)$. Odavde je

$$R(A) = R(AJ) = R((AJ)^*) = R(A^*)$$

i

$$N(A^*) = N(JA^*) = N((AJ)^*) = N(AJ) = N(A).$$

Dakle, A je EP matrica. Drugi smer dokaza može se pokazati analogno.

□

Jasno je da ukoliko važi $AJ = JA$ tada je i $N(AJ) = N(A)$, kao i $R((AJ)^*) = R(AJ)$. Obrat ne važi, pa je ovaj rezultat takođe jači od rezultata datog Teoremom 4.2, (a), što potvrđuju primeri dati u nastavku. Njima je ilustrovana pomenuta ekvivalencija za matrice koje ne komutiraju sa matricom J, ali za koje važi $N(AJ) = N(A)$.

Primer 4.2 *Neka su $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ i $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Tada je*

$$AJ = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad i \quad JA = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

te je $AJ \neq JA$.

Kako su A i AJ invertibilne matrice, imamo $N(AJ) = N(A) = \{0\}$. Takođe je $A^\dagger = A^{-1}$, pa je A EP-matrica, a takođe i J-EP matrica.

Primer 4.3 *Neka su* $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ *i* $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. *Tada je* $AJ = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = A$ *i* $JA = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, *pa je* $AJ \neq JA$.

Međutim, za ovakve matrice A *i* J *važi* $N(AJ) = N(A)$, *kao i* $A^\dagger = 1/2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. *Jednostavno se dobija da* A *nije ni EP, ni J-EP matrica.*

U Primeru 4.2 matrica A je bila invertibilna. U tom slučaju rezultat je gotovo trivijalan pošto za invertibilne matrice važi da su i EP i $J - EP$ matrice, pri čemu je još i $N(AJ) = N(A) = \{0\}$. Međutim, može se pokazati da ovaj rezultat važi i za singularne matrice.

Primer 4.4 *Neka su* $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ *i* $J = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. *Imamo da je*

$$AJ = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ i } JA = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

te je $AJ \neq JA$. *Nije teško videti da je* $N(AJ) = N(A) = Span\{(0,1,-1)^T\}$. *Takođe imamo* $A^\dagger = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$. *Kako je*

$$AA^\dagger = A^\dagger A = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix},$$

matrica A *je EP.*

Direktnim izračunavanjem dobija se $A^{[\ddagger]} \circ A = A \circ A^{[\ddagger]} = 1/4 \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -2 \\ 0 & -2 & -2 \end{pmatrix}$, *čime se dokazuje da je* A *takođe i J-EP matrica.*

Teorema 4.9 *Neka je* $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ *J-idempotentna i J-EP matrica. Tada je* A *EP-matrica ako i samo ako* A *komutira sa* J.

Dokaz. Neka je A J-idempotentna J-EP matrica. Tada važi,

$$AJA = A \tag{4.7}$$
$$JA^\dagger A = AA^\dagger J. \tag{4.8}$$

Ako jednakost (4.8) pomnožimo sa J sa leve i sa desne strane dobijamo $A^\dagger AJ = JAA^\dagger$.

Sada, množenjem sa A dobija se $A^\dagger AJA = JAA^\dagger A$. Kako važi (4.8), to je ekvivalentno sa $A^\dagger A = JA$.

S druge strane, ako (4.8) pomnožimo sleva sa AJ dobijamo

$$AJJA^\dagger A = AJAA^\dagger J,$$

ili $A = AA^\dagger J$, što je ekvivalentno sa $AJ = AA^\dagger$.

Prema tome, sledi $AA^\dagger = A^\dagger A$ ako i samo ako $AJ = JA$.

□

Uslov J-idempotentnosti matrice A ($A^{[2]} = A$) ne može se izostaviti. To ilustrujemo sledećim primerom.

Primer 4.5 *Neka su* $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ *i* $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. *Tada je* $AJA = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ *i prema tome* $A^{[2]} \neq A$. *Kako je* $A^\dagger = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ *i* $A^{[\ddagger]} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, *možemo primetiti da je* A *J-EP matrica i istovremeno i EP-matrica.*

Jasno je da je $AJ = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ *i* $JA = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ *te je* $AJ \neq JA$.

Sledećim primerom pokazujemo da se u Teoremi 4.9 uslov da je matrica A J-EP takođe od krucijalnog značaja.

Primer 4.6 *Neka su sada* $A = \begin{pmatrix} 2 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 1 \end{pmatrix}$ *i* $J = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. *Tada je*

$$A \circ A = AJA = \begin{pmatrix} 2 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 1 \end{pmatrix} = A$$

i $A^\dagger = \frac{1}{9}A$, *pa sledi da je* A *EP- matrica.*

S druge strane imamo da je

$$A^{[\ddagger]} \circ A = \frac{1}{3}JA = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & \sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & -1 \end{pmatrix} \quad i \quad A \circ A^{[\ddagger]} = \frac{1}{3}AJ = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -1 \end{pmatrix},$$

odakle očigledno sledi da A *nije J-EP matrica.*

Jasno, važi i $AJ \neq JA$.

Poznato je da za svaki linearni operator $A \in L(\mathbb{C}^n, \mathbb{C}^m)$ (tj. matricu $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$) važe identiteti

$$R(A^*) = N(A)^\perp \text{ i } R(A)^\perp = N(A^*).$$

U prethodnoj glavi Teoremom 3.18 pokazano je da to važi i u slučaju matrica u prostorima sa nedefinitnim skalarnim proizvodom, sa standardnom operacijom množenja:

$$R(A^{[*]}) = N(A)^{[\perp]} \text{ i } R(A)^{[\perp]} = N(A^{[*]}).$$

Ukoliko postoji Mur-Penrouzov inverz date matrice A, tada su ovi potprostori još i direktni komplementi.

Ako posmatramo matrice u prostorima sa nedefinitnim skalarnim proizvodom i nedefinitnim matričnim proizvodom, dobijamo identitete

$$Ra(A^{[*]}) = Nu(A)^{\perp} \text{ i } Nu(A^{[*]}) = Ra(A)^{\perp}.$$

Zaista, iz (4.4) i (4.5), gornje jednakosti jednostavno slede. Ovde se ortogonalnost posmatra u standardnom smislu. U opštem slučaju ne važi

$$Ra(A^{[*]}) = (Nu(A))^{[\perp]} \text{ i } Nu(A^{[*]}) = Ra(A)^{[\perp]}.$$

U radu [87] Teoremom 2.5, pokazano je da za $m \times n$ realnu matricu A važi

$$Ra(I \circ A) = Nu(A^{[*]})^{[\perp]}.$$

Taj rezultat dobijen je kao posledica Farkasove i Fredholmove alternative, čije uopštenje navodimo u nastavku. U Euklidskom slučaju teorema o Farkasovoj alternativi glasi:

Teorema 4.10 *[87] Neka je A $m \times n$ realna matrica i $b \in \mathcal{R}^m$. Tada važi ili*

(i) za $Ax = b$ postoji rešenje $x \geq 0$, ili

(ii) za $A^* y \geq 0, \langle b, y\rangle < 0$ postoji rešenje y.

Teorema 4.11 *([87], Farkasova alternativa) Neka je A $m \times n$ realna matrica i $b \in \mathcal{R}^m$. Tada važi ili*

(i) za $A \circ x = b$ postoji rešenje $x \geq 0$, ili

(ii) za $(I \circ A)^{[*]} \circ y \geq 0, [b, y] < 0$ postoji rešenje y.

Dokaz. Lako je primetiti da obe alternative ne mogu važiti istovremeno. Pretpostavimo da (i) ne važi. Tada sistem $AJ_n x = b$, $x \geq 0$ nema rešenja. Prema Teoremi 4.11 postoji vektor $z \in \mathcal{R}^m$ takav da je $J_n A^* z \geq 0$ pri čemu je $\langle b, z\rangle < 0$. Kako je J_m invertiilna matrica, postoji $y \in \mathcal{R}^m$ takav da je $z = J_m y$. Tada je $J_n A^* J_m y \geq 0$ i $\langle b, J_m y\rangle < 0$. Primetimo da je $[b, y] = \langle b, J_m y\rangle$ i $(I \circ A)^{[*]} \circ y = J_n A^* J_m y$. Prema tome, važi alternativa (ii).

□

Kao posledicu Farkasove alternative, izvodi se Fredholmova alternativa.

Teorema 4.12 *([87], Fredholmova alternativa) Neka je A $m \times n$ realna matrica i $b \in \mathcal{R}^m$. Tada važi ili* *(i)* *za* $A \circ x = b$ *postoji rešenje* x*, ili*

(ii) *za* $(I \circ A)^{[*]} \circ y \geq 0, [b, y] \neq 0$ *postoji rešenje* y.

Dokaz. Jasno je da (i) i (ii) ne mogu važiti istovremeno. Pretpostavimo da ne važi (i). Stavljajući da je $x = x^1 - x^2$ pri čemu je $x^1, x^2 \geq 0$, dobijamo da za $A \circ x^1 - A \circ x^2 = b$ ne postoji rešenje $x^1, x^2 \geq 0$. Neka je sada $B = (A, -A)$ i $u = (x^1, x^2)$, dobijamo da $B \circ u = b$, $u \geq 0$ nema rešenja. Prema Teoremi 4.11 postoji $y \in \mathcal{R}^m$, takav da je $(I \circ B)^{[*]} \circ y \geq 0$ i $[b, y] < 0$. Konačno, $I \circ B = (I \circ A, -(I \circ A))$, te se dobija $(I \circ A) \circ y = 0$ i $[b, y] \neq 0$. Prema tome, važi alternativa (ii).

□

Konačno dajemo teoremu o ortogonalnosti potprostora $Ra(I \circ A)$ i $Nu(A^{[*]})$.

Teorema 4.13 *([87]) Za* $m \times n$ *realnu matricu* A *važi* $Ra(I \circ A) = Nu(A^{[*]})^{[\perp]}$.

Dokaz. Neka je $b \in Ra(I \circ A)$ i $y \in Nu(A^{[*]})$. Ako je $[b, y] \neq 0$, tada sistem $(I \circ B)^{[*]} y = 0$, $[b, y] \neq 0$ ima rešenje y, gde je $I \circ B = A$, i prema tome $I \circ A = B$. Prema Fredholmovoj alternativi ne postoji rešenje za $I \circ A \circ x = b$, što je kontradikcija. Dakle, važi da je $[b, y] = 0$, kao i $Ra(I \circ A) \subseteq Nu(A^{[*]})$.

Obrnuto, pretpostavimo da je $y \in Nu(A^{[*]})^{[\perp]}$. Tada za svako u važi $A^{[*]} \circ u = 0 \Longrightarrow [u, y] = 0$. Stavljajući $B = I \circ A$, dobijamo da je $(I \circ B)^{[*]} \circ u = 0$, odakle sledi $[u, y] = 0$. Prema tome, tvrđenje (ii) iz Fredholmove alternative ne važi, pa stoga alternativa (i) ima rešenje. Dakle, postoji vektor x takav da je $I \circ A \circ x = u$. Odavde sledi da $u \in R(I \circ A)$, čime je teorema dokazana.

□

U radu [83] pokazali smo da je ortogonalnost (preciznije, J-ortogonalnost) potprostora $Ra(A^{[*]})$ i $Nu(A)$ u bliskoj vezi sa EP i $J - EP$ matricama.

Teorema 4.14 *Neka je* $A \in C^{n \times n}$*. Bilo koja dva tvrđenja impliciraju treće:*

(i) $Ra(A^{[*]}) = Nu(A)^{[\perp]}$,

(ii) *A je EP-matrica,*

(iii) *A je J-EP matrica.*

Dokaz. (1,2) $\Longrightarrow$ (3) ((1,3) $\Longrightarrow$ (2)):
Neka je $Ra(A^{[*]}) = Nu(A)^{[\perp]}$. Tada imamo da je $R(JA^*) = N(AJ)^{[\perp]}$. Prema [33], (2.2.3), važi da je $R(JA^*) = J(N(AJ))^{\perp}$. Imajući u vidu da je matrica J invertibilna, dobijamo $R(A^*) = N(AJ)^{\perp}$. Takođe je poznato i $N(AJ)^{\perp} = R((AJ)^*)$ odakle konačno sledi da je $R(A^*) = R((AJ)^*)$ i, prema tome, $N(A) = N(AJ)$. Sada, prema Teoremi 4.8, imamo da tvrđenje (iii) sledi (tvrđenje (ii), respektivno).

(2,3) $\Longrightarrow$ (1): Neka je $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ istovremeno i EP i J-EP matrica. Tada važi

$$R(A) = R(A^*) \text{ i } N(A) = N(A^*), \tag{4.9}$$

kao i

$$R(AJ) = R((AJ)^*) \text{ i } N(AJ) = N((AJ)^*). \tag{4.10}$$

Sada će biti:

$$\begin{aligned} Ra(A^{[*]}) &= R(JA^*) = JR(A^*) \overset{(4.9)}{=} \\ & JR(A) = JN(A^*)^{\perp} \overset{(4.10)}{=} \\ & JN(AJ)^{\perp} = (N(AJ))^{[\perp]} = Nu(A)^{[\perp]}. \end{aligned}$$

Dakle, tvrđenje (i) je dokazano.

$\square$

Teoreme 4.4 i 4.2 dale su odgovor na pitanje kada je nedefinitni matrični proizvod dveju matrica $J-EP$ matrica. Jednako interesantno jeste odrediti uslove pod kojima je zbir $J-EP$ matrica opet $J-EP$ matrica. Sličnim problemom u prostorima sa običnim skalarnim proizvodom i EP matricama bavili su se mnogi matematičari. Jedan od takvih rezultata može se naći u [64] i navodimo ga u nastavku.

Teorema 4.15 *([64]) Neka su A_i, $i = 1, ..., m$, EP matrice. Tada je suma $A = \sum A_i$ EP matrica ako važi neki od sledećih ekvivalentnih uslova:*

(1) $N(A) \subseteq N(A_i)$, *za svako* $i = 1, ..., m$;

(2) $r\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ A_m \end{pmatrix} = r(A)$

Dokaz. Prvo dokazujemo ekvivalenciju uslova (1) i (2). Pretpostavimo da je $N(A) \subseteq N(A_i)$ za svako $i = 1, ..., m$. Odavde sledi da je $N(A) \subseteq \bigcap N(A_i)$. Kako je $N(A) = N(\sum A_i) \supseteq N(A_1) \cap N(A_2) \cap \cdots \cap N(A_m)$ sledi da je $N(A) \supseteq N(A_i)$. Prema tome, važi

$$N(A) = \bigcap N(A_i) = N\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ A_m \end{pmatrix},$$

te je i $r\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ . \\ . \\ . \\ A_m \end{pmatrix} = r(A)$, pa tvrđenje (2) sledi.

Obrnuto, kako je $N\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ . \\ . \\ . \\ A_m \end{pmatrix} = \bigcap N(A_i) \subseteq N(A)$, tj. $r\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ . \\ . \\ . \\ A_m \end{pmatrix} = r(A)$ sledi $N(A) = \bigcap N(A_i)$. Prema tome, $N(A) \subseteq N(A_i)$ za svako $i = 1, ..., m$ pa tvrđenje (1) važi. Dokazujemo drugi deo tvrđenja. Kako je A_i EP matrica za svako $i = 1, ..., m$, važi da je $N(A_i) = N(A_i^*)$ za svako $i = 1, ..., m$. Iz $N(A) \subseteq N(A_i)$ za svako $i = 1, ..., m$ sledi

$$N(A) \subseteq \bigcap N(A_i) = \bigcap N(A_i^*) \subseteq \bigcap N(A^*) \quad \text{i} \quad r(A) = r(A^*).$$

Odatle je $N(A) = N(A^*)$, pa je matrica A EP, čime je tvrđenje dokazano.

□

Još jednim rezultatom u istom radu autor je dao dovoljne uslove da suma EP matrica bude EP matrica.

Teorema 4.16 *([64]) Neka su A_i EP matrice za svako $i = 1, ...m$, takve da važi*

$$\sum_{i \neq j} A_i^* A_j = 0.$$

Tada je $A = \sum A_i$ EP matrica.

Dokaz. Kako je $\sum_{i \neq j} A_i^* A_j = 0$, biće $A^*A = (\sum A_i^*)(\sum A_i) = \sum A_i^* A_i$ pa je $N(A) = N(A^*A) = N(\sum A_i^* A_i) = N\left(\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ . \\ . \\ . \\ A_m \end{pmatrix}^* \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ . \\ . \\ . \\ A_m \end{pmatrix}\right) = N\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ . \\ . \\ . \\ A_m \end{pmatrix} =$ $N(A_1) \cap N(A_2) \cap \cdots \cap N(A_m)$. Prema tome, $N(A) \subseteq N(A_i)$ za svako $i = 1, ..., m$. Kako je još i A_i EP matrica za svako $i = 1, ..., m$, prema Teoremi 4.15 A je EP matrica.

□

Kao generalizaciju ovog rezultata na prostore u kojima je definisan nedefinitni matrični proizvod, u radu [51] data je sledeća teorema.

Teorema 4.17 *Neka su A_1,...A_m $J - EP$ matrice i neka je $A := A_1 + \cdots + A_m$. Pretpostavimo da važi $Nu(A) \subseteq Nu(A_i)$ za svako $i = 1, \ldots, m$ i $A_i \circ A_j = 0$, za $i \neq j$. Tada je matrica A $J - EP$.*

Dokaz. Pretpostavimo da važi $Nu(A) \subseteq Nu(A_i)$ za svako $i = 1, ..., m$. Matrice A_iJ su EP, prema Teoremi 4.1. Kako je još i $A_i \circ A_j = 0$, za $i \neq j$, sledi da je $R(J(A_1 + \ldots A_m)^*) = R(((A_1 + \cdots + A_m)J)^2)$. Leva strana je jednaka sa $Ra((A_1 + \cdots + A_m)^{[*]})$, dok se ponovnim korišćenjem $A_i \circ A_j = 0$, za $i \neq j$ dobija da je desna strana $Ra(A_1^{[2]} + \cdots + A_m^{[2]}) = Ra(A^{[2]})$. Prema Teoremi 4.2 (c), matrica A je $J - EP$.

□

U poslednjoj teoremi uslov $A_i \circ A_j = 0$, za $i \neq j$ može se potpuno izbeći. To pokazujemo sledećom teoremom koja se dokazuje jednostavno prelaskom na EP matrice.

Teorema 4.18 *Neka su $A_1, \ldots, A_m$ $J - EP$ matrice. Ako je $Nu(A) \subseteq Nu(A_i)$ za svako $i = 1, \ldots, m$, tada je $A := A_1 + \cdots + A_m$ is J-EP.*

Dokaz. Neka su A_1,..., A_m J-EP matrice i neka je $A := A_1 + \cdots + A_m$. Tada su prema Teoremi 4.1 $A_1J, \ldots, A_mJ$ EP matrice. Iz uslova $Nu(A) \subseteq Nu(A_i)$ sledi da je $N(AJ) \subseteq N(A_iJ)$ za svako $i = 1, \ldots, m$. Prema Teoremi 4.15 $AJ := A_1J + \cdots + A_mJ$ je EP matrica, te je A zbog toga $J - EP$ matrica.

□

Takođe, imamo i sledeći rezultat koji se odnosi na sumu $J - EP$ matrica.

Teorema 4.19 *Neka su A_1,...A_m $J - EP$ matrice. Ako je $r\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_m \end{pmatrix} = r(A)$, tada je $A := A_1 + \cdots + A_m$ $J - EP$ matrica.*

Dokaz. Neka su A_1,..., A_m $J - EP$ matrice, tj. A_iJ je EP matrica za svako $i = 1, \ldots, m$. Kako je $r\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_m \end{pmatrix} = r(A)$, sledi da je i $r(AJ) = r(A) = r\begin{pmatrix} A_1J \\ A_2J \\ \vdots \\ A_mJ \end{pmatrix}$. Matrica $AJ := A_1J + \cdots + A_mJ$ je prema Teoremi 4.15 EP matrica, te je stoga A $J - EP$ matrica.

□

4.3 Zakon obrnutog redosleda za Mur-Penrouzov inverz

Neka su A i B kvadratne kompleksne matrice istog reda. Ukoliko su one invertibilne, poznato je da je invertibilan i njihov proizvod, kao i da važi:

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}. \tag{4.11}$$

Ova relacija se naziva *zakon obrnutog redosleda*, ili skraćeno ROL.

Tokom 60-ih godina prošlog veka, sa razvojem teorije uopštenih inverza, mnogi matematičari bavili su se i problemom uopštenih inverza proizvoda dveju matrica. Prirodno, nametnulo se pitanje pod kojim uslovima važi zakon obrnutog redosleda u tom slučaju. Uopštenje (4.11) za Mur-Penrouzov inverz proizvoda dveju matrica $A \in \mathbb{C}^{p\times n}$ i $B \in \mathbb{C}^{n\times m}$ glasi:

$$(AB)^{\dagger} = B^{\dagger}A^{\dagger}, \tag{4.12}$$

i on u opštem slučaju ne važi.

Potrebne i dovoljne uslove pod kojima (4.12) važi prvi je dao američki matematičar Grevil 1966. godine u radu [37]:

$$(AB)^{\dagger} = B^{\dagger}A^{\dagger} \;\Leftrightarrow\; R(A^*AB) \subseteq R(B) \;\text{ i }\; R(BB^*A^*) \subseteq R(A^*), \quad \text{tj.}$$
$$(AB)^{\dagger} = B^{\dagger}A^{\dagger} \;\Leftrightarrow A^{\dagger}ABB^*A^* = BB^*A^* \;\text{ i }\; BB^{\dagger}A^*AB = A^*AB.$$

Rumunski matematičar Argirijade je došao do novog rezultata koji je objavljen 1968. godine u radu [2]:

$$(AB)^{\dagger} = B^{\dagger}A^{\dagger} \;\Leftrightarrow\; A^*ABB^* \quad \text{je matrica ermitskog ranga.} \tag{4.13}$$

Zakon obrnutog redosleda za uopštene inverze bio je izučavan i za proizvod tri kompleksne matrice.

$$(ABC)^{\dagger} = C^{\dagger}B^{\dagger}A^{\dagger} \tag{4.14}$$

Značajniji rezultat dao je Hartvig 1986. godine u [42], Tian u [96, 97] iz 1994. i 1992. godine. Pored toga, neki rezultati dobijeni za proizvod dve i tri matrice uopšteni su na proizvod n matrica:

$$(A_1A_2\ldots A_n)^{\dagger} = A_n^{\dagger}\ldots A_2^{\dagger}A_1^{\dagger}, \tag{4.15}$$

kao i na tezinski Mur-Penrouzov inverz:

$$(AB)^{\dagger}_{M,L} = B^{\dagger}_{N,L}A^{\dagger}_{M,N}. \tag{4.16}$$

Zakonom obrnutog redosleda za težinski inverz bavili su se Sun i Vei [95], kao i Vang [98].

Brojni su rezultati okoji se odnose na zakon obrnutog redosleda na skupu ograničenih linearnih operatora. Kako se matrični rang ne može upotrebiti u ovom slučaju, Đorđević i Dinčic koristili su novi pristup svođenjem linearnog operatora na matričnu formu koja je indukovana dekompozicijom Hilbertovog prostora. Ovi rezultati mogu se naći u radovima: [22, 24, 27]. Poznata su i uopštenja na C^*-algebre, kao i na prstenima sa involucijom, itd.

Ovde ćemo napomenuti da ima smisla izučavati zakon obrnutog redosleda za Mur-Penrouzov inverz proizvoda matrica u prostorima sa nedefinitnim skalarnim proizvodom (koji je definisan u Glavi 3). Problem egzistencije ovog inverza predstavlja glavnu prepreku u tome. Kao i kod ograničenih linearnih operatora, i u ovom slučaju ne može se govoriti o matričnom rangu, te je ovaj problem još uvek otvoren.

Ukoliko umesto običnog posmatramo nedefinitni matrični proizvod, uopštenje postojećih rezultata postaje jednostavnije. U radu [51] predstavljeno je nekoliko rezultata koji se odnose na zakon obrnutog redosleda za Mur-Penrouzov inverz proizvoda matrica u ovom slučaju i istaknuta je njihova veza sa EP matricama. To je bilo motivisano poznatim rezultatom Đorđevića i Rakočevića iz [28] koji je opštiji i odnosi se na linearne operatore:

Teorema 4.20 *([28]) Ako su $A, B \in Ł(H)$ EP operatori sa zatvorenim slikama, pri čemu važi i $R(A) = R(B)$, tada je $(AB)^\dagger = B^\dagger A^\dagger$.*

Analogno gornjoj teoremi, izvodi se rezultat za $J\!-\!EP$ matrice i nedefinitni matrični proizvod.

Teorema 4.21 *([51]) Ako su $A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ $J\!-\!EP$ matrice za koje je $Ra(A) = Ra(B)$, tada je $(A \circ B)^{[\ddagger]} = B^{[\ddagger]} \circ A^{[\ddagger]}$.*

Dokaz. Kako su A i B JEP matrice, prema Teoremi 4.1 AJ i BJ su EP matrice. Takođe, uslov $Ra(A) = Ra(B)$ implicira $R(AJ) = R(BJ)$. Teoremu 4.20 možemo sada primeniti na matrice AJ i BJ, tj. važiće

$$((AJ)(BJ))^\dagger = (BJ)^\dagger (AJ)^\dagger.$$

Zbog osobina matrice J, dobijamo $(AJB)^\dagger = (B)^\dagger J(A)^\dagger$, odakle sledi

$$(A \circ B)^{[\ddagger]} = B^{[\ddagger]} \circ A^{[\ddagger]},$$

čime je tvrđenje dokazano.

□

Napomena. Podsećamo da klase EP i $J - EP$ matrica nisu jednake i pokazujemo da zakon obrnutog redosleda važi i ako je B EP matrica, ako se slike matrica A i B posmatraju u uobičajenom smislu.

Teorema 4.22 *Ako je $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ $J - EP$ matrica i $B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ EP matrica za koje važi $R(A) = R(B)$, tada je $(A \circ B)^{[\ddagger]} = B^{[\ddagger]} \circ A^{[\ddagger]}$.*

Dokaz. Neka je A $J-EP$ matrica. Tada je AJ EP matrica. Dalje imamo $R(AJ) = R(A) = R(B)$. Kako je B EP matrica, iz Teoreme 4.20 za matrice AJ i B sledi

$$(AJB)^{\dagger} = B^{\dagger}(AJ)^{\dagger}.$$

Iz oblika Mur-Penrouzovog inverza (4.3) dobijamo

$$\begin{aligned}(A \circ B)^{[\ddagger]} &= (AJB)^{[\ddagger]} = J(AJB)^{\dagger}J = JB^{\dagger}(AJ)^{\dagger}J \\ &= JB^{\dagger}JA^{\dagger}J = B^{[\ddagger]} \circ A^{[\ddagger]}.\end{aligned}$$

□

U nastavku pokazujemo da se zahtev da matrica B bude $J-EP$, odnosno EP u gornjim teoremama može potpuno izbeći. U dokazu koristimo poznati Grevilov uslov o kome je bilo reči na početku ovog poglavlja.

Teorema 4.23 *Ako je $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ $J-EP$ matrica i $B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ matrica za koje važi $R(A) = R(B)$, tada je $(A \circ B)^{[\ddagger]} = B^{[\ddagger]} \circ A^{[\ddagger]}$.*

Dokaz. Neka je $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ $J-EP$ matrica. To znači da je $A \circ A^{[\ddagger]} = A^{[\ddagger]} \circ A$, odakle sledi da je

$$JA^{\dagger}A = AA^{\dagger}J.$$

Sada imamo

$$\begin{aligned}R((AJ)^*AJB) &\subseteq R(JA^*) = R(JA^{\dagger}AA^*) \\ &\subseteq R(JA^{\dagger}A) = R(AA^{\dagger}J) \\ &= R(AA^{\dagger}) = R(A) = R(B),\end{aligned}$$

kao i

$$\begin{aligned}R(BB^*(AJ)^*) &\subseteq R(B) = R(A) \\ &= R(AA^{\dagger}J) = R(JA^{\dagger}A) \\ &= R(J(A^{\dagger}A)^*) = R(JA^*(A^{\dagger})^*) \\ &\subseteq R(JA^*) = R((AJ)^*).\end{aligned}$$

Ovim je pokazano da je zadovoljen Grevilov uslov za matrice AJ i B. Prema tome, važi

$$(AJB)^{\dagger} = B^{\dagger}(AJ)^{\dagger},$$

što je ekvivalentno sa

$$(A \circ B)^{[\ddagger]} = B^{[\ddagger]} \circ A^{[\ddagger]}.$$

□

Ovo tvrđenje ilustrovaćemo primerom.

Primer 4.7 *Neka su* $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ *and* $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.
Lako se može proveriti da matrica B *nije ni* EP *ni* $J-EP$. *Kako je* $A^{\dagger} = 1/4A$, *dobijamo da je* A $J-EP$ *matrica. Takođe imamo da je* $R(A) = R(B)$. *Time su uslovi prethodne teoreme ispunjeni. S druge strane biće,*

$$A \circ B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad (A \circ B)^{[\ddagger]} = 1/4 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

kao i $B^{[\ddagger]} \circ A^{[\ddagger]} = 1/4 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, *te zaista važi*

$$(A \circ B)^{[\ddagger]} = B^{[\ddagger]} \circ A^{[\ddagger]}.$$

Sledećom teoremom dati su dovoljni uslovi za ROL, pri čemu nijedna od matrica u proizvodu nije ni EP ni $J-EP$.

Teorema 4.24 *Neka su* $A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ *matrice za koje važi* $Ra(A^{[*]}) = Ra(B)$. *Tada je* $(A \circ B)^{[\ddagger]} = B^{[\ddagger]} \circ A^{[\ddagger]}$.

Dokaz. Kako je $Ra(A^{[*]}) = Ra(JA^*J) = R(JA^*)$ i $Ra(B) = R(BJ)$, iz uslova teoreme dobijamo da je $R(JA^*) = R(BJ)$. Sada imamo

$$R((AJ)^*AJBJ) \subseteq R((AJ)^*) = R(JA^*) = R(BJ),$$

kao i

$$R((BJ(BJ)^*(AJ)^*) \subseteq R(BJ) = R(JA^*) = R((AJ)^*).$$

Dakle važi

$$(AJBJ)^{\dagger} = (BJ)^{\dagger}(AJ)^{\dagger}.$$

Konačno dobijamo

$$\begin{aligned} (A \circ B)^{[\ddagger]} &= (AJB)^{[\ddagger]} = J(AJB)^{\dagger}J \\ &= J^{\dagger}(AJB)^{\dagger}J = (AJBJ)^{\dagger}J \\ &= (BJ)^{\dagger}(AJ)^{\dagger}J = JB^{\dagger}JA^{\dagger}J \\ &= B^{[\ddagger]} \circ A^{[\ddagger]}. \end{aligned}$$

□

Navodimo rezultat iz rada [51] koji daje potrebne i dovoljne uslove da za Mur-Penrouzov inverz nedefinitnog matričnog proizvod važi zakon obrnutog redosleda.

Teorema 4.25 *([51]) Neka je matrica* $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ *takva da važi* $AJ = JA$. *Tada* $(A \circ B)^{[\ddagger]} = B^{[\ddagger]} \circ A^{[\ddagger]}$ *ako i samo ako je* $A^*A \circ BB^*$ $J-EP$ *matrica.*

U dokazu ove teoreme, a i u nekoliko sledećih, koristićemo rezultat (4.13), pri čemu imamo na umu da ekvivalenciju EP matrica i matrica ermitskog ranga. Dakle, važi $(AB)^\dagger = B^\dagger A^\dagger$ ako i samo ako je A^*ABB^* EP matrica.
.

Pokazujemo da se uslov komutativnosti može isključiti u Teoremi 4.25. Na taj način, poboljšaćemo predstavljeni rezultat.

Teorema 4.26 *Neka su $A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Tada $(A \circ B)^{[\ddagger]} = B^{[\ddagger]} \circ A^{[\ddagger]}$ ako i samo ako je $A^*A \circ BB^*$ $J-EP$ matrica.*

Dokaz. Očigledno je da je $(A\circ B)^{[\ddagger]} = B^{[\ddagger]} \circ A^{[\ddagger]}$ ekvivalentno sa $J(AJB)^\dagger = JB^\dagger JA^\dagger$, tj. $(AJBJ)^\dagger = (BJ)^\dagger (AJ)^\dagger$. Prema (4.13) ovo je ekvivalentno sa tvrdnjom da je $(AJ)^*AJBJ(BJ)^*$ matrica ermitskog ranga, tj. JA^*AJBB^* je ermitskog ranga pa samim tim i EP matrica. Prema Lemi 4.1 imamo ekvivalenciju sa $A^*A \circ BB^*$ je $J-EP$ matrica, čime je tvrđenje dokazano.

□

Sledećim primerom ilustrujemo ovaj rezultat.

Primer 4.8 *Neka su* $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $J = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ *i* $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.
Lako je primetiti da je $AJ \neq JA$. Takođe, $A^*A \circ BB^* = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, koja je ermitska matrica, a samim tim i matrica ermitskog ranga.

Dalje je

$$A \circ B = A,\ (A\circ B)^\dagger = 1/2\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad i \quad (A\circ B)^{[\ddagger]} = 1/2\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$B^\dagger = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ A^\dagger = 1/2\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \textit{pa dobijamo} \quad B^{[\ddagger]} \circ A^{[\ddagger]} = 1/2\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Očigledno, $(A \circ B)^{[\ddagger]} = B^{[\ddagger]} \circ A^{[\ddagger]}$.

Na kraju ovog dela dajemo rezultat za zakon obrnutog redosleda za Mur-Penrouzov inverz nedefinitnog matričnog proizvoda tri matrice.

Teorema 4.27 *([51]) Neka su $A, B, C \in \mathbb{C}^{n\times n}$ matrice za koje važi $AJ = JA$, $(A\circ B)J = J(A\circ B)$. Pretpostavimo još da su A^*ABB^* i $(AB)^*(AB)CC^*$ EP matrice. Tada važi $(A \circ B \circ C)^{[\ddagger]} = C^{[\ddagger]} \circ B^{[\ddagger]} \circ A^{[\ddagger]}$.*

Dokaz. Primetimo prvo da uslov $(A\circ B)J = J(A\circ B)$ i pretpostavka da je $(AB)^*(AB)CC^*$ EP matrica impliciraju

$$(A \circ B \circ C)^{[\ddagger]} = C^{[\ddagger]} \circ (A \circ B)^{[\ddagger]},$$

što sledi iz Teoreme 4.25. S druge strane, iz uslova $AJ = JA$ i pretpostavke da je A^*ABB^* EP matrica dobija se $(A \circ B)^{[\ddagger]} = B^{[\ddagger]} \circ A^{[\ddagger]}$. Sada konačno tvrđenje lako sledi.

□

Teorema 4.28 *([51]) Neka su $A, B, C \in \mathbb{C}^{n\times n}$ matrice za koje je $BJ = JB$. Tada važi $(A \circ B \circ C)^{[\ddagger]} = C^{[\ddagger]} \circ B^{[\ddagger]} \circ A^{[\ddagger]}$ ako i samo ako je $(ABC)^{\dagger} C^{\dagger} B^{\dagger} A^{\dagger}$.*

Dokaz. Pretpostavimo da je $BJ = JB$, kao i $(A \circ B \circ C)^{[\ddagger]} = C^{[\ddagger]} \circ B^{[\ddagger]} \circ A^{[\ddagger]}$. Odatle sledi da je

$$J(AJBJC)^{\dagger} J = JC^{\dagger} JB^{\dagger} JA^{\dagger}.$$

Posle malo sređivanja dobija se da je $(ABC)^{\dagger} = C^{\dagger} B^{\dagger} A^{\dagger}$.
Suprotan smer se dokazuje analogno.

□

Uslov $(A\circ B)J = J(A\circ B)$ možemo izostaviti u Teoremi 4.27 ako umesto $(AB)^* ABCC^*$ je EP matrica pretpostavimo da je $(ABJ)^* ABJCC^*$ EP.

Teorema 4.29 *Neka su $A, B, C \in \mathbb{C}^{n\times n}$ takve da važi $AJ = JA$. Pretpostavimo još i da su A^*ABB^* i $(ABJ)^*ABJCC^*$ EP matrice. Tada važi $(A\circ B\circ C)^{[\ddagger]} = C^{[\ddagger]}\circ B^{[\ddagger]}\circ A^{[\ddagger]}$.*

Dokaz. Kako je A^*ABB^* EP matrica, prema (4.13) sledi da je $(AB)^{\dagger} = B^{\dagger} A^{\dagger}$.
Slično, pretpostavka da je $(ABJ)^*ABJCC^*$ EP-matrica implicira $(ABJC)^{\dagger} = C^{\dagger}(ABJ)^{\dagger}$.
Sada, koristeći $AJ = JA$, dobijamo

$$\begin{aligned}
(A \circ B \circ C)^{[\ddagger]} &= J(AJBJC)^{\dagger} J = J(JABJC)^{\dagger} J \\
&= J(ABJC)^{\dagger} = JC^{\dagger}(ABJ)^{\dagger} \\
&= JC^{\dagger} J(AB)^{\dagger} = JC^{\dagger} JB^{\dagger} A^{\dagger} JJ \\
&= C^{[\ddagger]} \circ B^{[\ddagger]} \circ A^{[\ddagger]}
\end{aligned}$$

.

□

4.4 Zvezda parcijalno uređenje

Teorija matričnih parcijalnih uređenja vrlo je aktuelna poslednjih nekoliko decenija. Jaka veza sa uopštenim inverzima doprinela je da se ove dve oblasti razvijaju paralelno. Veliki broj rezultata može se naći u monografiji [73] u kojoj su ispitivana matrična parcijalna uređenja i to: minus parcijalno uređenje, oštro (sharp) parcijalno uređenje i zvezda (star) parcijalno uređenje. U manjem delu ove sekcije to će biti osnovni izvor. Pored ovih matričnih uređenja bitno je napomenuti da je poslednjih nekoliko godina objavljeno više radova u kojima su izučavana i nova matrična uređenja - jezgarno (core) i dualno jezgarno matrično uređenje [4, 63, 72].

Minus parcijalno uređenje, nezavisno jedan od drugog, definisali su Hartvig [41] i Namburipad [79] 1980. godine. Za matrice ovo uređenje definiše se na sledeći način:

Definicija 4.7 *([73]) Neka su $A, B \in \mathbb{C}^{m\times n}$. Kažemo da je A manja od B u odnosu na minus parcijalno uređenje, u oznaci $A <^- B$, ako postoji g - inverz $A^{(1)} \in A\{1\}$ takav da je*

$$AA^{(1)} = BA^{(1)} \quad i \quad A^{(1)}A = A^{(1)}B. \tag{4.17}$$

Ukoliko se u gornjoj definiciji $g-inverz$ zameni *grupnim* inverzom dobija se takozvano *oštro matrično uređenje.* Njega je prvi definisao Mitra u [74]. Kako u definiciji imamo grupni inverz neke matrice A, jasno je da ta matrica mora biti kvadratna i indeksa $indA \leq 1$. Ovaj uslov se ipak nameće i za matricu B u cilju dobijanja brojnih osobina oštrog matričnog uređenja.

Definicija 4.8 *([74]) Neka su $A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ takve da je $indA \leq 1$ i $indB \leq 1$. Kažemo da je A manja od B u odnosu na oštro parcijalno uređenje, u oznaci $A <^\dagger B$, ako važi*

$$AA^{\#} = BA^{\#} \quad i \quad A^{\#}A = A^{\#}B. \tag{4.18}$$

Očigledno je da važi $A <^{\#} B \Rightarrow A <^- B$.

Od svih matričnih parcijalnih uređenja najviše je istpitivano *zvezda parcijalno uređenje.* Ono je bilo i prvo definisano (Drazin 1977. godine u [29]).

Definicija 4.9 *([29]) Neka su $A, B \in \mathbb{C}^{m\times n}$. Kažemo da je matrica A manja od matrice B u odnosu na zvezda parcijalno uređenje, u oznaci $A <^* B$, ako važi*

$$AA^* = BA^* \quad i \quad A^*A = A^*B. \tag{4.19}$$

Pokazano da je ova definicija ekvivalentna sa sledećom:

$$A <^* B, \quad \text{ako važi} \quad AA^\dagger = BA^\dagger \quad \text{i} \quad A^\dagger A = A^\dagger B. \tag{4.20}$$

Takođe, gotovo trivijalno se pokazuje, a od velikog značaja je i sledeći rezultat.

Teorema 4.30 *([73]) Za matrice $A, B \in \mathbb{C}^{m\times n}$ važi:*

(1) $A <^* B \Longleftrightarrow A^* <^* B^*$;

(2) Ako su $U \in \mathbb{C}^{m\times m}$ i $V \in \mathbb{C}^{n\times n}$ unitarne matrice, tada

$$A <^* B \Longleftrightarrow UAV <^* UBV.$$

Poznata je teorema koja daje vezu zvezda parcijalnog uređenja i uopštenih inverza. Ovaj i mnogi drugi rezultati iz oblasti parcijalnog uređenja mogu se naći u monografiji [73].

Teorema 4.31 *([73]) Za matrice $A, B \in \mathbb{C}^{m\times n}$ sledeći uslovi su ekvivalentni:*

(1) $A <^* B$;

(2) *Neka je* $rank(A) = a$ *i* $rank(B) = b$. *Postoje unitarne matrice* $U \in \mathbb{C}^{m\times m}$ *i* $V \in \mathbb{C}^{n\times n}$ *i pozitivno definitne deijagonalne matrice* $D_a \in \mathbb{C}^{a\times a}$ *i* $D_{b-a} \in \mathbb{C}^{(b-a)\times(b-a)}$ *takve da je*

$$A = U \begin{bmatrix} D_a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} V^* \quad i \quad B = U \begin{bmatrix} D_a & 0 & 0 \\ 0 & D_{b-a} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} V^* \tag{4.21}$$

(3) $B\{1,3,4\} \subseteq A\{1,3,4\}$*;*

(4) *Postoje ortogonalni idempotenti* $P \in \mathbb{C}^{m\times m}$ *i* $Q \in \mathbb{C}^{n\times n}$ *takvi da je*

$$A = PB = BQ. \tag{4.22}$$

.

Teorema 4.32 *([73]) Neka su* $A, B \in \mathbb{C}^{m\times n}$ *sledeća tvrđenja su ekvivalentna:*

(i) $A <^* B$*;*

(ii) $A^\dagger <^* B^\dagger$*;*

(iii) $AA^\dagger B = A = BA^\dagger A = BA^\dagger B$*;*

(iv) $A^\dagger AB^\dagger = A^\dagger = B^\dagger AA^\dagger = B^\dagger AB^\dagger$.

Posebno je interesano posmatrati matrična uređenja za posebne klase matrica, kao npr. za ermitske, EP, normalne matrice, itd. Mi ćemo ovde posmatrati samo zvezda parcijalno uređenje za EP matrice, dok se slični rezultati za druga uređenja mogu naći u literaturi.

Teorema 4.33 *([73]) Neka su* $A, B \in \mathbb{C}^{m\times n}$ *takve da je* $A <^* B$. *Sledeća tvrđenja su ekvivalentna:*

(i) A *je* EP *matrica;*

(ii) $A^\dagger$ *i* B *komutiraju;*

(iii) A *i* $B^\dagger$ *komutiraju.*

Kako bi ove rezultate preneo na prostore sa nedefinitnima skalarnim proizvodom (sa nedefinitnim matričnim proizvodom), indijski matematičar Jajaraman uveo je *nedefinitno zvezda parcijalno uređenje* na sledeći način:

$$A <^{[*]} B \text{ ako važi } \; A \circ A^{[*]} = B \circ A^{[*]} \text{ i } \; A^{[*]} \circ A = A^{[*]} \circ B. \tag{4.23}$$

Pokazao je da je ovo matrično uređenje ekvivalentno sa $A <^* B$. Osobine svakako ima smisla ispitivati, što je on i uradio za $J - EP$ matrice. Motivisan Teoremama 4.32 i 4.33, u radu [51] dao je sledeće rezultate.

Teorema 4.34 *([51]) Neka su A i B kvadratne matrice istog reda takve da je $A <^* B$. Tada važi: A je $J-EP$ matrica ako i samo ako je $A^{[\ddagger]} \circ B = B \circ A^{[\ddagger]}$.*

Dokaz. Pretpostavimo da je A $J-EP$ matrica. Tada je $AA^\dagger J = JA^\dagger A$. Kako važi $A <^* B$, iz (4.20) biće $AA^\dagger J = BA^\dagger J$ i $JA^\dagger A = JA^\dagger B$. Odavde se lako dobija da je $BA^\dagger J = JA^\dagger B$, tj. važi $A^{[\ddagger]} \circ B = B \circ A^{[\ddagger]}$. Slično se dokazuje i obrnuti smer.

□

Teorema 4.35 *([51]) Neka su A i B kvadratne matrice istog reda. Ako važi $A <^* B$, $AJ = JA$, $JB = BJ$ i $AB^* = B^*A$, tada $A^{[\ddagger]} \circ B = B \circ A^{[\ddagger]} \Longrightarrow B^{[\ddagger]} \circ A = A \circ B^{[\ddagger]}$.*

Ekvivalencijom u Teoremi 4.34 dato je uopštenje Teoreme 4.33. Ovo uopštenje nije potpuno jer nije razmatrano pitanje da li važi i komutacija matrica A i $B^{[\ddagger]}$. S druge strane, veliki broj uslova u Teoremi 4.35 daje ne tako jak rezultat. U sledećoj teoremi vršimo potpunu generalizaciju Teoreme 4.33.

Teorema 4.36 *Neka su A i B kvadratne matrice istog reda takve da je $A <^* B$. Sledeća tvrđenja su ekvivalentna:*

(i) A *is* $J-EP$ *matrica;*

(ii) $A^{[\ddagger]} \circ B = B \circ A^{[\ddagger]}$;

(iii) $A \circ B^{[\ddagger]} = B^{[\ddagger]} \circ A$.

Dokaz. Prvo ćemo pokazati ekvivalenciju između $A <^* B$ i $JA <^* JB$.

$$(JA)^*JA = (JA)^*JB \text{ i } JA(JA)^* = JB(JA)^*$$

ekvivalentno je sa $A^*A = A^*B$ i $JAA^*J = JBA^*J$, tj.

$$A^*A = A^*B \text{ i } AA^* = BA^*.$$

Primenom Teoreme 4.33 na matrice JA i JB dobija se:

(i) JA je matrica ermitskog ranga (tj. EP matrica);

(ii) $(JA)^\dagger$ i JB komutiraju;

(iii) JA i $(JB)^\dagger$ komutiraju.

Prema Teoremi 4.1 dobijamo da je A $J-EP$ matrica.
Iz (ii) sledi

$$\begin{aligned} (JA)^\dagger JB = JB(JA)^\dagger &\iff A^\dagger JJB = JBA^\dagger J \\ &\iff A^{[\ddagger]} \circ B = B \circ A^{[\ddagger]}, \end{aligned}$$

i slično iz (iii):

$$\begin{aligned} JA(JB)^\dagger = (JB)^\dagger JA &\iff JAB^\dagger J = B^\dagger JJA \\ &\iff A \circ B^{[\ddagger]} = B^{[\ddagger]} \circ A. \end{aligned}$$

Ovim je tvrđenje dokazano.

$\square$

Ovom teoremom pokazali smo da su uslovi da matrica J komutira sa matricama A i B, kao i da važi $AB^* = B^*A$ potpuno suvišni, ali i da kao rezultat nemamo samo implikaciju, već i ekvivalenciju.

Posledica 4.1 *Neka su A i B kvadratne matrice istog reda takve da je $A <^* B$ i neka A komutira sa matricom J. Sledeća tvrđenja su ekvivalentna:*

(i) A *je* $J - EP$ *matrica;*

(ii) A *je* EP *matrica;*

(iii) $A^{[\ddagger]} \circ B = B \circ A^{[\ddagger]}$*;*

(iv) $A^{\ddagger}B = BA^{\ddagger}$*;*

(v) $A \circ B^{[\ddagger]} = B^{[\ddagger]} \circ A$*;*

(vi) $AB^{\dagger} = B^{\dagger}A$*.*

Dokaz. Dokaz sledi direktno iz Teoreme 4.36 i ekvivalencije EP i $J - EP$ matrica pod uslovom $AJ = JA$.

$\square$

Čak i pod uslovom da je matrica A EP i $J - EP$, bez pretpostavke poretka matrica A i B, ne mora istovremeno da važi $A^{[\ddagger]} \circ B = B \circ A^{[\ddagger]}$ i $A^{\dagger}B = BA^{\dagger}$. To ilustrujemo sledećim primerom.

Primer 4.9 *Neka su* $A = J = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ *i* $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$*. Tada imamo*

$$AJ = JA = I,$$

pa A i J komutiraju. Sada važi $A^{[\ddagger]} \circ B = B$ i $B \circ A^{[\ddagger]} = B$, pa je

$$A^{[\ddagger]} \circ B = B \circ A^{[\ddagger]}.$$

S druge strane je $A^{\dagger}B = B$ *i* $BA^{\dagger} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$*, pa*

$$A^{\dagger}B \neq BA^{\dagger}.$$

Primećujemo da je $A \not<^* B$.

Da bismo pokazali da možemo naći matrice A i B takve da važi

$$A^{\dagger}B = BA^{\dagger} \text{ i } A^{[\ddagger]} \circ B \neq B \circ A^{[\ddagger]}$$

dovoljno je uzeti $A = I$, $J = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ *and* $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Posledica 4.2 *Neka su A i B kvadratne matrice istog reda. Sledeća tvrđenja su ekvivalentna:*

(1) $A \overset{*}{\leq} B$;

(2) $A^{\dagger} \overset{*}{\leq} B^{\dagger}$;

(3) $AA^{\dagger}B = BA^{\dagger}A = BA^{\dagger}B = A$;

(4) $A^{\dagger}AB^{\dagger} = B^{\dagger}AA^{\dagger} = B^{\dagger}AB^{\dagger} = A^{\dagger}$;

(5) $A \overset{[*]}{\leq} B$;

(6) $A^{[\ddagger]} \overset{[*]}{\leq} B^{[\ddagger]}$;

(7) $A \circ A^{[\ddagger]} \circ B = B \circ A^{[\ddagger]} \circ A = B \circ A^{[\ddagger]} \circ B = A$;

(8) $A^{[\ddagger]} \circ A \circ B^{[\ddagger]} = B^{[\ddagger]} \circ A \circ A^{[\ddagger]} = B^{[\ddagger]} \circ A \circ B^{[\ddagger]} = A^{[\ddagger]}$.

Dokaz. Ekvivalencija uslova $(1)-(4)$ sledi iz Teoreme 4.32. Ostatak dokaza posledica je prethodno pokazanog rezultata da su $A <^{*} B$, $A <^{[*]} B$, $AJ <^{*} BJ$ i $JA <^{*} JB$ ekvivalentni.

$\square$

Literatura

[1] R. Arens. *Operational calculus of linear relations*, Pacific J. Math. 11 (1961), 9–23.

[2] E. Arghiriade. *Sur l'inverse generalisee d'un operateur lineaire dans les espaces de Hilbert*, Atti. Accad. Naz. Lincei Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. 45 (1968), no. 8, 471–477.

[3] T. Ya. Azizov, I. S. Iohvidov. *Linear operators in spaces with an indefinite metric*, John Wiley and Sons, Ltd. Chichester, 1989. (Translated from Russian).

[4] J. K. Baksalary, J. Hauke. *A further algebraic version of Cochran's theorem and matrix partial orderings*. Linear Algebra Appl., 127 (1990), 157–169.

[5] J. K. Baksalary, J. Hauke, X. Liu, S. Liu. *Relationships between partial orders of matrices and their powers*, Linear Algebra Appl., 379 (2004), 277–287.

[6] O. M. Baksalary, G. Trenkler. *Characterizations of EP, normal and Hermitian matrices*, Linear Multilinear Algebra 56 (2006), 299–304.

[7] A. Ben-Israel. *The Moore of the Moore-Penrose inverse*, Electron. J. Linear Algebra 9 (2002), 150–157.

[8] A. Ben-Israel, T. N. E. Greville. *Generalized inverses: Theory and applications*, 2nd Ediition, Springer-Verlad, New York, 2003.

[9] A. Bjerhammar. *Application of calculus of matrices to method of least squares with special reference to geodetic calculations*, Trans. Roy. Inst. Tech. Stockholm 49 (1951), 86.

[10] A. Bjerhammar. *Rectangular reciprocal matrices, with special reference to geodetic calculations*, Bull. Géodésique (1951), 118–220.

[11] A. Bjerhammar. *A generalized matrix algebra*, Trans. Roy. Inst. Tech. Stockholm 124 (1958), 32.

[12] E. Boasso. *On the Moore-Penrose inverse, EP Banach space operators, and EP Banach algebra elements*, J. Math. Anal. Appl. 339 (2008), 1003–1014.

[13] J. Bognar. *Indefinite inner product spaces*, Springer-Verlag, New York, 1974.

[14] V. Bolotnilov, C. K. Li, P. Meade, C. Mehl, L.Rodman. *Shells of matrices in indefinite inner product saces*, Electron. J. Linear Algebra 9 (2002), 67-92.

[15] Y. Bolshakov, C. V. M van der Mee, A. C. M. Ran, B. Reichstein, L.Rodman. *Polar decompositions in finite-dimensional indefinite scalar product spaces: General theory*, Linear Algebra Appl. 261 (1997), 91–141.

[16] S.L. Campbell, C.D. Meyer Jr. *EP operators and generalized inverses*, Canad. Math. Bull. 18 (1975), 327–333.

[17] S. Cheng, Y. Tian. *Two sets of new characterizations for normal and EP matrices*, Linear Algebra Appl. 375 (2003), 181–195.

[18] R. E. Cline. *Inverses of rank invariant powers of a matrix*, SIAM J. Numer. Anal., 5 (1968), 182–197

[19] R. Cross. *Multivalued linear operators*, Marcel Dekker Inc., 1998.

[20] A. Dijksma, H. S. V. de Snoo. *Symmetric and selfadjoint relations in Krein spaces I*, Oper. Theory Adv. Appl. 24 (1987), 145–166.

[21] A. Dijksma, H. S. V. de Snoo. *Symmetric and selfadjoint relations in Krein spaces II*, Ann. Acad. Sci. Fenn. Math. 12 (1987), 199–216.

[22] N. Dinčić, D. S. Djorđević. *Hartwig's triple reverse order law revisited*, Linear Multilinear Algebra, 62 (7) (2014), 918–924.

[23] D. S. Djordjević. *Characterization of normal, hyponormal and EP operators*, J. Math. Anal. Appl. 329 (2) (2007), 1181-1190.

[24] D. S. Djordjević. *Further results on the reverse order law for generalized inverses*, SIAM J. Matrix Anal. Appl. 29 (4)(2007), 1242–1246.

[25] D.S. Djordjević. *Konačno dimenzionalni vektorski prostori*, http://operator.pmf.ni.ac.rs/licne prezentacije/ DDjordjevic/ za - studente/ predavanja/ konacno - dimenzionalni - vp. pdf

[26] D. S. Djordjević. *Products of EP operators on Hilbert spaces*, Proc. Amer. Math. Soc. 129 (6) (2000), 1727-1731.

[27] D. S. Djordjević, N. Dinčić. *Reverse order law for the Moore-Penrose inverse, J*, Math. Anal. Appl., 361(1) (2010), 252–261.

[28] D. S. Djordjević, V. Rakočević. *Lectures on generalized inverses*, University of Niš, Faculty of Sciences and Mathematics, Niš, (2008)

[29] M. P. Drazin. *Natural structures on semigroups with involution*, Bull. Amer. Math. Soc., 84(1) (1978), 139–141.

[30] D. Drivaliaris, S. Karanasios, D. Pappas. *Factorizations of EP operators*, Liner Algebra Appl. 429 (7) (2008) 1555-1567.

[31] I. Fredholm. *Sur une classe d' équations functionnelles*, Acta Math. 27 (1903), 365–390.

[32] I. Gohberg, P. Lancaster, L. Rodman. *Matrices in indefinite scalar product*, Birkhäuser, Basel, 1983.

[33] I. Gohberg, P. Lancaster, L. Rodman. *Indefinite linear algebra and applications*, Birkhäuser, Basel, 2005.

[34] I. Gohberg, B. Reichstein. *On classification of normal matrices in an indefinite scalar product*, Integral Equations Operator Theory 13 (1990), 364-394.

[35] I. Gohberg, B. Reichstein. *On H-unitary and block-Toeplitz H-normal operators in an indefinite scalar product*, Linear Multilinear Algebra, 30 (1991), 17–48.

[36] I. Gohberg, B. Reichstein. *Classification of block-Toeplitz H-normal operators*, Linear Multilinear Algebra, 34 (1993), 213–245.

[37] T. N. E. Greville. *Note on the generalized inverse of a matrix product*, SIAM Review 8 (1966), no. 4, 518-521.

[38] T. N. E. Greville. *Spectral generalized inverses of square matrices*, Proc. Symp. on Theory and Appl. of Generalized Inverses of Matrices, Texas Tech. College, Lubbock, Texas (1968).

[39] T. N. E. Greville. *Some new generalized inverses with spectral properties*, Proc. Of the Conf. On Generalized matrix inverses, Texas Tech. Univ. (March, 1968).

[40] W. Greenberg, C. V. M. van der Mee, V. Protopopescu. *Boundary value problems in abstract kinetic theory*, OT 25, Birkhäuser Verlag, Basel, 1986.

[41] R. E. Hartwig. *How to order regular elements*, Math. Japon. 25 (1980), 1–13.

[42] R. E. Hartwig. *The reverse order law revisited*, Linear Algebra Appl. 76 (1986), 241–246.

[43] R. E. Hartwig, I. J. Katz. *On products of EP matrices*, Linear Algebra Appl. 252 (1997), 339-345

[44] M. A. Henn, C. Mehl, C. T runk. *Hyponormal and strongly hyponormal matrices in indefinite inner product spaces*, Linear Algebra Appl. 433 (2010), 1055–1076.

[45] D. Hilbert. *Grundzüge einer algemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen*, Teubner, Leipzig, 1912, (reprint šest članaka koji se pojavljuju originalno u Götingen Nachrichten (1904), 49–51; (1904), 213–25; (1905), 307–338; (1906), 157–227; (1906), 439–480; (1910), 355–417).

[46] O. Holtz. *On indecomposable normal matrices in spaces with indefinite scalar products*, Linear Algebra Appl. 259, (1997), 155–168.

[47] O. Holtz, V. Strauss. *Classification of normal operators in spaces with indefinite scalar product of rank 2*, Linear Algebra Appl. 241/243 (1996), 455–517.

[48] O. Holtz, V. Strauss. *On classification of normal operators in spaces with indefinite scalar product*, Linear Algebra Appl. 255 (1997), 113–155.

[49] R. A. Horn, C. R. Johnson. *Matrix analysis*, Cambridge University Press, Cambridge New York Melbourn. (1990).

[50] R. A. Horn, C. R. Johnson. *Topics in matrix analysis*, Cambridge University Press, Cambridge New York Melbourn. (1991).

[51] S. Jayaraman. *EP matrices in indefinite inner product spaces*, Funct. Anal. Approx. Comput. 4 (2012), 23–31.

[52] R. E. Kalman. *Algebraic aspects of the generalized inverse of a rectangular matrix*, Generalized Inverses and Applications, (Ed. M. Z. Nashed), Academic Press, (1976), 111–123.

[53] M. Kaltenbäck, H. Woracek. *Selfadjoint extension of symmetric operators in degenerate inner product spaces*, Integral Equations Operator Theory, 28 (1997), 289-320.

[54] K. Kamaraj, K. C. Sivakumar. *Moore-Penrose inverse in an indefinite inner product space*, J. Appl. Math. & Computing, 19 (1-2) (2005), 297-310.

[55] J. J. Koliha. *A simple proof of the product theorem for EP matrices*, Linear Algebra Appl. 294 (1999), 21–215.

[56] Lj. Kočinac. *Linearna algebra i analitička geometrija*, Prosveta, Niš. (1996).

[57] M.G. Krein, H. Langer. *On some mathematical principles in the linear theory of damped oscillations of continua I, II*, Integral Equations and Operator Theory 1 (1978), 364-399; 539-566 (translation from Russian; original 1965).

[58] H. Langer. *Invariante Teilräume definisierbarer J-selbstadjungierter operatoren*, Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A.I. Math. 475 (1971), 1–23.

[59] H. Langer, R. Mennicken, C. Tretter. *A self-adjoint linear pencil $Q - \lambda P$ of ordinary differential operators*. Methods Funct. Anal. Topology 2 (1996), 38–54.

[60] C.-K. Li, L. Rodman. *Remarks on numerical ranges of operators in spaces with an indefinite metric*, Proc. Amer. Math. Soc. 126 (1998), 973–982.

[61] C.-K. Li, N.-K. Tsing, F. Uhlig. *Numerical ranges of an operator on an indefinite inner product space*, Electron. J. Linear Algebra 1 (1996), 1–17.

[62] B. Lins, P. Meade, C. Mehl, L. Rodman. *Normal matrices and polar decompositions in indefinite inner products*, Linear Multilinear Algebra 49 (2001), 45–89.

[63] S. B. Malik, L. Rueda, N. Thome. *Further properties on the core partial order and other matrix partial orders*, Linear Multilinear Algebra, 62(12) (2014), 1629–1648.

[64] Ar. Meenakshi. *On sums of EP matrices*, Houston J. Math, 9 (1983), 63–69.

[65] C. Mehl. *On classification of normal matrices in indefinite inner product spaces*, Electron. J. Linear Algebra, 15 (2006), 50–83.

[66] C. Mehl, A. C. M. Ran, L. Rodman. *Extension to maximal semidefinite invariant subspaces for hyponormal matrices in indefinite inner products*, Linear Algebra Appl. 421 (2007), 110-116.

[67] C. Mehl, A. C. M. Ran, L. Rodman. *Hyponormal matrices and semidefinite invariant subspaces in indefinite inner products*, Electron. J. Linear Algebra 11 (2004), 192-204.

[68] C. Mehl, A. C. M. Ran, L. Rodman. *Semidefinite invariant subspaces: degenerate inner products*, Oper. Theory Adv. Appl. 149 (2004), 467-486.

[69] C. Mehl, L. Rodman. *Symmetric matrices with respect to sesquilinear forms*, Linear Algebra Appl. 349 (2002), 55-75.

[70] C. Mehl, L. Rodman. *Classes of normal matrices in indefinite inner product spaces*, Linear Algebra Appl. 336 (2001), 71-98.

[71] C. Mehl, C. Trunk. *Normal matrices in degenerate indefinite inner product spaces*, Oper. Theory Adv. Appl. 175 (2007), 193-209.

[72] J. Mielniczuk. *Note on the core matrix partial ordering*, Discusiones Math. Probability and Statistics, 31 (2011), 71–75.

[73] S. K. Mitra, P. Bhimasankaram, S. B. Malik. *Matrix partial orders*, Shorted Operators and Applications, Series in Algebra 10, World Scientific, Hackensack, 2010.

[74] S. K. Mitra. *On group inverses and the sharp order*, Linear Algebra Appl., 92 (1987), 17–37.

[75] E. H. Moore. *On the reciprocal of the general algebraic matrix*, Bull. Amer. Math. Soc. 26 (1920), 394–395.

[76] E. H. Moore, R. W. Barnard. *General Analysis*, Memoirs of the American Philosophical Society, I. American Philosophical Society, Philadelphia, Pennsylvania, (1935), 197–209.

[77] D. Mosić, D. S. Djordjević. *Moore-Penrose-invertible normal and Hermitian elements in rings*, Linear Algebra Appl. 431 (2009), 732–745.

[78] D. Mosić, D. S. Djordjević , J.J. Koliha. *EP elements in rings*, Linear Algebra Appl. 431 (2009), 527–535.

[79] K. S. S. Nambooripad. *The natural partial order on a regular semigroup*, Proc. Edinb. Math. Soc., 23 (1980), 249–260.

[80] Neumann J. von. *´Uber adjungierte functional operatoren*, Ann. of Math. 2 (1932), 294–310.

[81] R. Penrose. *A generalized inverse for matrices*, Proc. Cambridge Philos. Soc. 51 (1955), 406–413.

[82] L. S. Pontryagin. *Hermitian operators in spaces with indefinite metric*, Izvestiya Akad. Nauk. USSR, Ser. Matem. 8 (1944), 243–280 (in Russian)

[83] I. M. Radojević. *New results for EP matrices in indefinite inner product spaces*, Czech. Math. J. 64 139 (2014), 91–103.

[84] I. M. Radojević, D. S. Đorđević. *Moore-Penrose inverse in indefinite inner product spaces*, accepted in Filomat.

[85] I. M. Radojević, D. S. Đorđević. *Quasihyponormal and strongly quasihyponormal matrices in inner product spaces*, Electron. J. Linear Algebra 23 (2012), 1023-1039.

[86] V. Rakočević. *Funkcionalna analiza*, Naučna knjiga, Beograd, 1994.

[87] K. Ramanathan, K. C. Sivakumar. *Theorems of the alternative over indefinite inner product spaces*, J. Optim. Theory Appl. 137 (2008), 99–104.

[88] K. Ramanathan, K. Kamaraj, K. C. Sivakumar. *Indefinite product of matrices and applications to indefinite inner product spaces*, J. Anal. 12 (2004), 135-142.

[89] C. R. Rao. *Linear statistical inference and its applications*, Wiley, New York, 1973.

[90] B. C. Ritsner. *The theory of linear relations* (Russian), Voronezh, Dep. VINITI, No. 846-82, (1982).

[91] L. Rodman. *Finite dimensional spaces with indefinite scalar product*, Research problems, Obzornik za Matematiko in Fiziko 46 (1999), 57–60.

[92] I. M. Stanišev, D. S. Đorđević. *Extension to maximal invariant subspaces for quasihiponormal matrices*, neobjavljen rukopis.

[93] I. M. Stanišev, D.S. Đorđević. *Mur-Penrouzov inverz za H-normalne matrice u prostorima sa nedefinitnim skalarnim proizvodom*, neobjavljen rukopis.

[94] S. Singer, S. Singer. *Orthosymmetric block reflectors*, Linear Algebra Appl. 429 (2008), 1354-1385.

[95] W. Sun, Y. Wei. *Inverse order rule for weighted generalized inverse*, SIAM J. Matrix Anal. Appl. 19 (1998), no. 3, 772–775.

[96] Y. Tian. *Reverse order laws for the generalized inverses of multiple matrix products*, Linear Algebra Appl. 211 (1994), 85–100.

[97] Y. Tian. *The Moore-Penrose inverse of a triple matrix product*, Math. Theory Practice 1 (1992), 64–70.

[98] G. Wang, J. Gao. *Reverse order laws for weighted Moore-Penrose inverse of a triple matrix product*, J. Shangai Normal Univ. 29 (2000), 1–8, (in chinese).

Biografija autora

Ivana Radojević je rođena 25.01.1983. godine u Nišu. Osnovnu školu „Ivan Vušović" u Ražnju, kao i gimnaziju „Drakče Milovanović" u Aleksincu, završila je kao nosilac diplome „Vuk Karadžić". Tokom srednje škole bila je učesnik republičkih takmičenja iz matematike.

Osnovne studije iz matematike upisala je školske 2002/2003. godine na Prirodno-matematičkom fakultetu u Nišu na odseku za matematiku i informatiku. Diplomirala je 2008. godine sa prosečnom ocenom 9,00. Na istom fakultetu je 2008. godine upisala doktorske studije iz matematike. Položila je sve planom i programom predviđene ispite sa prosečnom ocenom 10,00.

Od 2013. godine Ivana Radojević je zaposlena na Tehničkom fakultetu u Boru, gde radi kao asistent na predmetima Matematika I i Statistika. Takođe je istraživač na projektu koji finansira Ministarstvo prosvete, nauke i tehnološkog razvoja Republike Srbije „Funkcionalna analiza, stohastička analiza i primene" (br. 174007). U periodu od 2009. do 2010. godine je bila istraživač na projektu „Teorija operatora, stohastička analiza i primene" (br. 144003) koji je finansiralo isto ministarstvo.

Ivana Radojević je autor tri naučna rada sa SCI liste. Izlažući radove, učestvovala je na konferencijama "13th Serbian Mathematical congress" (22-25. 5. 2014, Vrnjačka Banja, Srbija) i "Analysis, Topology and Applications 2014 (ATA2014)" (25-29. 5. 2014, Vrnjačka Banja, Srbija).

Radovi:

1. I. M. Radojević, D. S. Đorđević. *Quasihyponormal and strongly quasihyponormal matrices in inner product spaces*, Electron. J. Linear Algebra 23 (2012), 1023-1039.

2. I. M. Radojević. *New results for EP matrices in indefinite inner product spaces*, Czech. Math. J. 64 139 (2014), 91–103.

3. I. M. Radojević, D. S. Đorđević. *Moore-Penrose inverse in indefinite inner product spaces*, accepted in Filomat.

Универзитет у Нишу

ИЗЈАВА О АУТОРСТВУ

Изјављујем да је докторска дисертација, под насловом

Уопштени инверзи и квазихипонормалне матрице у просторима са недефинитним скаларним производом

која је одбрањена на Природно-математичком факултету Универзитета у Нишу:

- резултат сопственог истраживачког рада;
- да ову дисертацију, ни у целини, нити у деловима, нисам пријављивала на другим факултетима, нити универзитетима;
- да нисам повредила ауторска права, нити злоупотребила интелектуалну својину других лица.

Дозвољавам да се објаве моји лични подаци, који су у вези са ауторством и добијањем академског звања доктора наука, као што су име и презиме, година и место рођења и датум одбране рада, и то у каталогу Библиотеке, Дигиталном репозиторијуму Универзитета у Нишу, као и у публикацијама Универзитета у Нишу.

У Нишу, 05.09.2016.

Аутор дисертације: Ивана Радојевић

Потпис аутора дисертације:

ИРадојевић

Ивана Радојевић

Универзитет у Нишу

ИЗЈАВА О ИСТОВЕТНОСТИ ШТАМПАНОГ И ЕЛЕКТРОНСКОГ ОБЛИКА ДОКТОРСКЕ ДИСЕРТАЦИЈЕ

Име и презиме аутора: Ивана Радојевић

Наслов дисертације: Уопштени инверзи и квазихипонормалне матрице у просторима са недефинитним скаларним производом

Ментор: др Драган Ђорђевић, редовни професор

Изјављујем да је електронски облик моје докторске дисертације, коју сам предала за уношење у **Дигитални репозиторијум Универзитета у Нишу,** истоветан штампаном облику.

У Нишу, 05.09.2016.

Потпис аутора дисертације:

И Радојевић

Ивана Радојевић

Универзитет у Нишу

ИЗЈАВА О КОРИШЋЕЊУ

Овлашћујем Универзитетску библиотеку „Никола Тесла“ да у Дигитални репозиторијум Универзитета у Нишу унесе моју докторску дисертацију, под насловом:

Уопштени инверзи и квазихипонормалне матрице у просторима са недефинитним скаларним производом

Дисертацију са свим прилозима предала сам у електронском облику, погодном за трајно архивирање.

Моју докторску дисертацију, унету у Дигитални репозиторијум Универзитета у Нишу, могу користити сви који поштују одредбе садржане у одабраном типу лиценце Креативне заједнице (Creative Commons), за коју сам се одлучио/ла.

1. Ауторство **(CC BY)**
2. Ауторство – некомерцијално **(CC BY-NC)**
3. **Ауторство – некомерцијално – без прераде (CC BY-NC-ND)**
4. Ауторство – некомерцијално – делити под истим условима **(CC BY-NC-SA)**
5. Ауторство – без прераде **(CC BY-ND)**
6. Ауторство – делити под истим условима **(CC BY-SA)**

У Нишу, 05.09.2016.

Потпис аутора дисертације:

ИРадојевић

Ивана Радојевић