UNIVERZITET U NIŠU
PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET

Orhan A. Tuğ

B(r, s, t, u)-DVOSTRUKO SUMABILNI PROSTORI NIZOVA I MATRIČNE TRANSFORMACIJE

DOKTORSKA DISERTACIJA

Niš, 2019.

UNIVERSITY OF NIŠ
FACULTY OF SCIENCES AND MATHEMATICS

Orhan A. Tuğ

B(r, s, t, u)-SUMMABLE DOUBLE SEQUENCE SPACES AND MATRIX TRANSFORMATIONS

DOCTORAL DISSERTATION

Niš, 2019.

Подаци о докторској дисертацији

Ментор:	Проф. Др Владимир Ракочевић, редовни професор, Природно Математички Факултет, Универзитет у Нишу, дописни члан САНУ
Наслов:	*B(r, s, t, u)*-ДВОСТРУКО СУМАБИЛНИ ПРОСТОРИ НИЗОВА И МАТРИЧНЕ ТРАНСФОРМАЦИЈЕ
Резиме:	У овој дисертацији изучавају се неки нови простори двоструких низова добијени као домени четвородимензионалне уопштене диференцне матрице. У првој глави је дат преглед литературе, као и потребне дефиниције и теореме за наредна поглавља. У другој глави изучавамо просторе двостуких низова и просторе редова са њиховим основним особинама које се користе у осталим главама. У трећој глави дефинишемо четвородимензионалну уопштену диференцну матрицу *B(r, s, t, u)* и уводимо нове просторе двоструких низова као домене те матрице. У четвртој глави изучавамо поменуте нове просторе и одређујемо њихов бета и гама дуал. У петој глави, четвородимензионалне матричне трансформације на новим просторима се изучавају помоћу четвородимензионалних метода дуалне сумабилности за двоструке низове. Такође је дата и карактеризација неких нових четвородимензионалних матричних класа. У шестој глави као примену карактеризујемо подкласе компактних оператора на нашим новим просторима користећи Хаусдорфову меру некомпактности оператора на *B*-сумабилним просторима двоструких низова. У седмој глави сумирају се резултати тезе и наводе се неки отворени проблеми.
Научна област:	Математичке науке
Научна дисциплина:	Функционална анализа
Кључне речи:	Функционална анализа, Сумабилност, Матрични домени, Простори двоструких низова
УДК:	517.98
CERIF класификација:	P 140
Тип лиценце Креативне заједнице:	**CC BY-NC-ND**

Data on Doctoral Dissertation

Doctoral Supervisor:	Prof. Dr. Vladimir Rakočević, full professor, Faculty of Sciences and Mathematics, University of Niš, corresponding member of SASA
Title:	*B(r, s, t, u)*-SUMMABLE DOUBLE SEQUENCE SPACES AND MATRIX TRANSFORMATIONS
Abstract:	In this dissertation, some new double sequence spaces derived as the domain of the four-dimensional generalized difference matrix are investigated. In the first chapter; literature review and some needed definitions and theorems are given for the following chapters. In the second chapter; we investigate the double sequence and series spaces with their basic properties which are used in the following chapters. In the third chapter we define the four-dimensional generalized difference matrix *B(r, s, t, u)* and new double sequence spaces are introduced as the domain of that matrix. In the fourth chapter; we study those new spaces and calculate their beta and gamma dual. In the fifth chapter; four-dimensional matrix transformations on the new spaces are studied in terms of four-dimensional dual summability methods for double sequences. Moreover, the characterization of some new four-dimensional matrix classes is also given. In the sixth chapter; as an application, the subclasses of compact operators on our new spaces were characterized by applying the Hausdorff measure of noncompactness of operators on B-summable double sequence spaces. In the seventh chapter; results of this thesis and some related open problems were stated.
Scientific Field:	Mathematical sciences
Scientific Discipline:	Functional analysis
Key Words:	Functional Analysis, Summability, Matrix Domain, Double Sequence Spaces
UDC:	517.98
CERIF Classification:	P 140
Creative Commons License Type:	

Прилог 4/1

ПРИРОДНО - МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ
НИШ

КЉУЧНА ДОКУМЕНТАЦИЈСКА ИНФОРМАЦИЈА

Редни број, **РБР**:	
Идентификациони број, **ИБР**:	
Тип документације, **ТД**:	монографска
Тип записа, **ТЗ**:	текстуални / графички
Врста рада, **ВР**:	докторска дисертација
Аутор, **АУ**:	Orhan Tuğ
Ментор, **МН**:	Владимир Ракочевић
Наслов рада, **НР**:	$B(r,s,t,u)$-ДВОСТРУКО СУМАБИЛНИ ПРОСТОРИ НИЗОВА И МАТРИЧНЕ ТРАНСФОРМАЦИЈЕ
Језик публикације, **ЈП**:	српски
Језик извода, **ЈИ**:	српски
Земља публиковања, **ЗП**:	Србија
Уже географско подручје, **УГП**:	Србија
Година, **ГО**:	2019.
Издавач, **ИЗ**:	ауторски репринт
Место и адреса, **МА**:	Ниш, Вишеградска 33.
Физички опис рада, **ФО**: (поглавља/страна/ цитата/табела/слика/графика/прилога)	82 стр.
Научна област, **НО**:	Математичке науке
Научна дисциплина, **НД**:	Функционална анализа
Предметна одредница/Кључне речи, **ПО**:	Функционална анализа, Сумабилност, Матрични домени, Простори двоструких низова
УДК	517.98
Чува се, **ЧУ**:	библиотека
Важна напомена, **ВН**:	
Извод, **ИЗ**:	У овој дисертацији се истражују неки нови простори двоструких низова добијени као домени четвородимензионалне уопштене диференцне матрице. Четвородимензионалне матричне трансформације на новим просторима се изучавају помоћу четвородимензионалних метода дуалне сумабилности за двоструке низове. Такође је дата карактеризација неких нових четвородимензионалних матричних класа. Као примена, карактеризују се извесне подкласе компактних оператора.
Датум прихватања теме, **ДП**:	
Датум одбране, **ДО**:	
Чланови комисије, **КО**: Председник:	
Члан:	
Члан:	
Члан:	
Члан, ментор:	

ПРИРОДНО - МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ
НИШ

KEY WORDS DOCUMENTATION

Accession number, **ANO**:	
Identification number, **INO**:	
Document type, **DT**:	**monograph**
Type of record, **TR**:	**textual / graphic**
Contents code, **CC**:	**doctoral dissertation**
Author, **AU**:	**Orhan Tuğ**
Mentor, **MN**:	**Vladimir Rakočević**
Title, **TI**:	***B(r, s, t, u)*-SUMMABLE DOUBLE SEQUENCE SPACES AND MATRIX TRANSFORMATIONS**
Language of text, **LT**:	**Serbian**
Language of abstract, **LA**:	**Serbian**
Country of publication, **CP**:	**Serbia**
Locality of publication, **LP**:	**Serbia**
Publication year, **PY**:	**2019**
Publisher, **PB**:	**author's reprint**
Publication place, **PP**:	**Niš, Višegradska 33.**
Physical description, **PD**: (chapters/pages/ref./tables/pictures/graphs/appendixes)	**82 p.**
Scientific field, **SF**:	**Mathematical sciences**
Scientific discipline, **SD**:	**Functional analysis**
Subject/Key words, **S/KW**:	**Functional Analysis, Summability, Matrix Domain, Double Sequence Spaces**
UC	**517.98**
Holding data, **HD**:	**library**
Note, **N**:	
Abstract, **AB**:	In this dissertation, some new double sequence spaces derived as the domain of the four-dimensional generalized difference matrix are investigated. Four-dimensional matrix transformations on the new spaces are studied in terms of four-dimensional dual summability methods for double sequences. Moreover, the characterization of some new four-dimensional matrix classes is also given. As an application, certain subclasses of compact operators were characterized.
Accepted by the Scientific Board on, **ASB**:	
Defended on, **DE**:	
Defended Board, **DB**: President:	
Member:	
Member:	
Member:	
Member, Mentor:	

Univerzitet u Nišu
Prirodno - matematički fakultet
Departman za matematiku

$B(r, s, t, u)-$DVOSTRUKO SUMABILNI PROSTORI NIZOVA I MATRIČNE TRANSFORMACIJE

Doktorska disertacija

Autor:
Orhan Tuğ

Mentor:
Prof. dr Vladimir Rakočević

Sadržaj

Abstrakt

U ovoj disertaciji izučavali smo pojedine prostore dvostrukih nizova izvedene iz domena četvorodimenzionalnih uopštenih matrica razlika. Disertacija se satoji iz sedam glava, a glave se sastoje iz sekcija.

U prvoj glavi navodimo pojedine definicije i teoreme koje su nam kasnije potrebne, osnovna svojstva topoloških, normiranih i vektorskih prostora.

U drugoj glavi izložili smo prostore dvostrukih nizova i naveli definicije i teoreme koje se kasnije u radu koriste.

U trećoj glavi najpre je definisana četvorodimenzionalna uopštena matrica razlike $B(r, s, t, u)$ i definisani su pojedini novi prostori nizova $B(\mathcal{M}_u)$, $B(\mathcal{C}_p)$, $B(\mathcal{C}_{bp})$, $B(\mathcal{C}_r)$, $B(\mathcal{L}_q)$, $B(\mathcal{C}_f)$ i $B(\mathcal{C}_{f0})$ iz domena četvrodimenzionalne uopštene matrice razlika $B(r, s, t, u)$ u prostorima dvostrukih nizova $\mathcal{M}_u$, $\mathcal{C}_p$, $\mathcal{C}_{bp}$, $\mathcal{C}_r$, $\mathcal{L}_q$, $\mathcal{C}_f$ i $\mathcal{C}_{f0}$, u datom poretku. Zatim, dati su pojedini rezultati iz topologije pod strogim uslovima.

U četvrtoj glavi dati su $\alpha-$dual prostora $B(\mathcal{M}_u)$, $B(\mathcal{C}_{bp})$ i $B(\mathcal{C}_f)$ i neke osnovne leme i teoreme koje koristimo da odredimo $\beta(\vartheta)-$dual prostora $B(\mathcal{M}_u)$, $B(\mathcal{C}_p)$, $B(\mathcal{C}_{bp})$, $B(\mathcal{C}_r)$, $B(\mathcal{L}_q)$ i $B(\mathcal{C}_f)$. Zatim se navodi $\gamma-$dual prostora $B(\mathcal{M}_u)$, $B(\mathcal{C}_{bp})$, $B(\mathcal{L}_q)$ i $B(\mathcal{C}_f)$. Pored toga, četvorodimenzionalna matrična klasa $(\mathcal{C}_f : \mathcal{M}_u)$ se karakteriše kako bi se odredio $\gamma-$dual prostora $B(\mathcal{C}_f)$.

U petoj glavi navodi se četvorodimenzionalna matrčna transformacija prostrora dvostrukih nizovnih $B(\mathcal{M}_u)$, $B(\mathcal{C}_p)$, $B(\mathcal{C}_{bp})$, $B(\mathcal{C}_r)$, $B(\mathcal{L}_q)$ i $B(\mathcal{C}_f)$ koristeći koncept četvorodimenzionalne dualne metode za dvostruke nizove koju su izložili Başar [Basar(2012)], Yeşilkayagil i Başar[Yeşilkayagil and Başar(2015)]. Pored toga, izloženi su potrebni i dovoljni uslovi za karakterizaciju nekih novih četvorodimenzionalnih matričnih klasa $(B(\mathcal{M}_u) : \mathcal{C}_f)$, $(\mathcal{M}_u : B(\mathcal{C}_f))$, $(\mathcal{L}_{s'} : \mathcal{C}_f)$, $(B(\mathcal{L}_{s'}) : \mathcal{C}_f)$ i $(\mathcal{L}_{s'} : B(\mathcal{C}_f))$ u oba slučaja, kada je $0 < s' < 1$ i $1 < s' < \infty$. Osim toga, navedeni su neki značajni rezultati za četvorodimenzionalna matrična preslikavanja.

U šestoj glavi subklasa $\mathcal{K}(X, Y)$ kompaktih operatora je opisana pomoću Hausdorffove mere nekompaktnosti na B-sumabilnim prostorima dvostrukim nizova. Pri čemu je $X = \{B(\mathcal{M}_u), B(\mathcal{C}_0), B(\mathcal{C}_{v0}), B(\mathcal{L}_q)\,(1 < q < \infty), B(\mathcal{L}_u)\}$ i $Y = \{\mathcal{M}_u, \mathcal{C}_\vartheta, \mathcal{C}_{\vartheta 0}, \mathcal{L}_q, \mathcal{L}_u\}$, gde je $\vartheta = \{bp, r\}$.

U sedmoj glavi izlažemo rezultate ove teze i neke otvorene probleme.

Ključne reči: Dvostruki prostori nizova, četvorodimenzionalne uopštene matrice, B-sumabilnost, $\alpha, \beta, \gamma-$ dvostruki nizovi, Matrične transformacije,

Mojim sinovima, Eymenu Efeu i İhsanu Canu i mojoj supruzi Ümran

Zahvalnost

Zahvaljujem se svom mentoru dopisnom članu SANU, Profesoru Dr. Vladimiru Rakočeviću i svom bišem mentoru Profesoru Dr. Feyzi BAŞAR na nesebičnoj podršci, strpljenju, motivaciji i ogromnom znanju koje si mi pružali tokom doktroskih studija. Njihove sugestije su mi pomogle tokom istraživanja i pisanja ove teze.

Pored toga, članovi komisije za odbranu ove teze: akademik, redovni član SANU, Profesor Dr. Gradimir V. Milovanović, Profesor Dr. Ivana Djolović, Profesor Dr. Dragan Djordjević i Profesor Dr. Eberhard Malkowsky svojim savetima značajno su uticali na kvalitet ove teze, i veoma sam im zahvalan.

Iskreno se zahvaljujem svojim kolegama jer su mi pružili mogućnost da budem deo njihovog akademskog tima, na kraju zahvaljujem se i svojim studentima.

Lista simbola i skraćenica

$\mathbb{N}$: Skup prirodnih brojeva

$\mathbb{C}$: Skup kompleksnih brojeva

$\mathcal{F}$: Skup skalara

$\mathbb{N} \times \mathbb{N}$: Skup uredjenih parova čiji su elementi iz skupa prirodnih brojeva

$\mathcal{C}_p$: Skup svih kovnergentnih dvostrukih prostore nizova u Pringsheimovom smislu

$\mathcal{C}_{p0}$: Skup svih nula dvostrukih prostore nizova u Pringsheimovom smislu

$\mathcal{M}_u$: Skup svih ograničenih dvostrukih prostore nizova

$\mathcal{C}_{bp}$: Skup svih ograničenih i kovnergentnih dvostrukih prostore nizova u Pringsheimovom smislu

$\mathcal{C}_{bp0}$: Skup svih ograničenih i nula dvostrukih prostore nizova u Pringsheimovom smislu

$\mathcal{C}_r$: Skup svih regularno konvergentnih dvostrukih prostore nizova

$\mathcal{C}_{r0}$: Skup svih regularno nula dvostrukih prostore nizova

$\mathcal{C}_f$: Skup svih skoro konvergentnih dvostrukih prostore nizova

$\mathcal{C}_{f_0}$: Skup svih skoro nula dvostrukih prostore nizova

λ_A : četvorodimenzionalna beskonačna matrica A domena na dvostrukom prostoru niza λ.

$\mathcal{L}_q$: Skup svih apsolutno $q-$sumabilnih dvostrukih prostore nizova

$\mathcal{L}_u$: Skup svih apsolutno sumabilnih dvostrukih prostore nizova

$\mathcal{BS}$: Skup svih ograničenih redova čiji su nizovi parcijalnih suma ograničeni

$\mathcal{CS}_\vartheta$: Skup svih ograničenih redova čiji su nizovi parcijalnih suma ϑ-konvergentni u Pringsheimovom smislu

$\mathcal{BV}$: Skup svih dvostrukih prostore nizova ograničenih varijacija

$(\lambda)^\alpha$: $\alpha-$dual prostora niza λ

$(\lambda)^{\beta(\vartheta)}$: $\beta(\vartheta)-$dual prostora niza λ gde je $\vartheta = \{p, bp, r\}$

$(\lambda)^\gamma$: $\gamma-$dual prostora niza λ

$\Delta(1,-1,1,-1)$: četvorodimenzionalni diferencni operator

$B(r,s,t,u,)$: četvorodimenzionalna uopštena matrcia gde su $r,s,t,u \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$

$B(\mathcal{M}_u)$: $B(r,s,t,u,)-$ domen ograničenog dvostrukog niza

$B(\mathcal{C}_\vartheta)$: $B(r,s,t,u,)-$ domen $\vartheta-$konvergentnog dvostrukog niza gde je $\vartheta = \{p, bp, r\}$

$B(\mathcal{L}_q)$: $B(r,s,t,u,)-$ domen apsolutno $q-$sumabilno dvostrukog niza

$B(\mathcal{C}_f)$: $B(r,s,t,u,)-$ domen skoro konvergentnog dvostrukog niza

C : četvorodimenzionalna Cešarova sredina

R^{qt} : četvorodimenzionalna Rieszova sredina

Lista tabela

Glava 1

Uvod

Istraživanja nizova oduvek su bila veoma popularna, zbog njihove veoma značajne uloge u matematici i posebno u funkcionalnoj analizi. Moderna matemtička istraživanja su pokazala da su prostori nizova veoma interesantni i zahvalni za izučavanje. Najviše su ispitivani problemi konvergencije. Teorija prostora nizova i matrica sa domenom na prostorima nizova ima primenu na više grana matematike kao što su topološki prostori, teorija sumabilnosti i teorija funkcija.

Proučavanje prostora nizova motivisano je klasičnim rezultatima iz teorije sumiranja do kojih su došli veliki matematičari kao što su Cesaro, Holder, Abel, Norlund, Euler, Knopp, Hardy i drugi. Rezultati iz teorije funkcionalne analize su pomogli matematičarima Kotheu i Toeplitzu da razviju napredak teorije sumabilnosti na prostorima nizova.

Moderna teorija prostora nizova ima značajne posledice u obradi klasične teorije sumiranja putem matričnih transformacija iz jednog prostora nizova u drugi. 1950. godine, Abraham Robinson je počeo da izučava beskonačne matrice linearnih operatora umesto da razmatra beskonačne matrice realnih ili kompleksnih brojeva. On je posmatrao Banachove prostore na kojima su linearni operatori definisani. Kasnije, mnogi matematičari, medju kojima su Simons, Petersen, Madox, Willansky, Zeller, Russel, Prasad, Lal, Singh, Bhatt, Ahamed, Chandra, Mahanty, Kishore, Pati, Das, Nanda, Srivastava, svojim radovima značajno doprinose razvoju teorije prostora nizova i matričnih transformacija. Proučavanje uopštene matrične transformacije i teorija prostora nizova motivisano je posebnim rezultatima u teoriji sumabilnosti.

Teorija sumiranja, je teorija zadavanja granice jednostrukom ili dvostrukom nizu. Ova teorija je jedna od fundamentalnih teorija u modernoj funkcionalnoj analizi i njenim primenama. U klasičnoj i savremenoj metodologiji sumiranja matrična metoda je klasična metoda koja se bavi beskonačnim matricama i njihovim domenima i konceptima konvergencije koji ih generišu. Specijalni sumabilni metodi dati su posebnim triangularnim matricama nazvanim Cešarova sredina, Hölderov metod, Weightedov matrica, Rieszov metod, Nörlundov metod, Hausdorffov metod, metod funkcija i sumabilni metod definisan jakim redovima.

Posle svih ovih istraživanja prostora nizova, matričnih transformacija na prostorima nizova i teorije sumabilnosti na prostorima nizova, ostalo je jedno još uvek otvoreno pitanje kakve su mogućnosti formiranja novog nizovnog skupa? Posebno nakon 2000-tih, matematičari koji su proučavali savremene koncepte vezane za jednostruke i dvostruke nizove izučavali su specijalne matrice sa domenom na prostorima nizova. Konstruisanje novog skupa jednostrukih i dvostrukih prostora nizova i njihovo povezivanje sa odredjivanjem lokacije izmedju ovih prostora i novih prostora, karakterizacijom matrične transformacije iz jednog od ovih prostora u drugi, su neki od razmatranih problema.

Svaki rezultat za jednostruki niz je prenesen i na dvostruki niz i većina korisnih rezultata je uspešno publikovana. Recimo, Móricz i Rhoades[Moricz and Rhoades(1988)] su konstruisali skoru konvergenciju dvostrukog niza i to je dovelo do prostora $\mathcal{C}_f$. Jardas i Sarapa[Jardas and Sarapa(1991)] su istraživali sumabilnost dvostrukih prostore nizova čije su koordinate dobijene množenjem koordinata dva jednostruka niza. Móricz[Moricz(1991)] je istraživao neka svojstva prostora $\mathcal{C}_p$, $\mathcal{C}_p$ i $\mathcal{C}_p$; nazvanim konvergencija u Pringsheimovom smislu, nula u Pringsheimovom smislu i regularna konvergencija dvostrukog niza , koja su kompenzovana na prostorima c i c_0 jednostrukih prostore nizova. Boos, Leiger i Zeller[Boos et al.(1997)Boos, Leiger, and Zeller] su definisali $e-$, $be-$ i $c-$ konvergenciju dvostrukih prostore nizova i odredili neka topološka svojsta ovih tipova konvergencije koristeći $SM-$ metod.

Koncept skore konvergencije jednostrukih nizova prvi je uveo i izučavao Lorentz [Lorentz(1948)]. 2010. godine, Mursaleen [Mursaleen(2010)] je istraživao odredjena svojsta prostora skoro konvergentnih prostore nizova označenih sa f. Nakon toga mnogi matematičari su istraživali matrice sa domenom na skoro nula i skoro konvergentnim prostorima nizova (vidi[Başar and Kirişçi(2011)], [Tuğ and Başar(2016)], [Kayaduman and Şengönül(2012)], [Şengönül and Kayaduman(2012)]).
Skora konvergencija za dvostruke nizove je pojam definisan od strane Moricza i Rhoadesa [Moricz and Rhoades(1988)] i izučavana od brojnih matematičara (vidi [Mursaleen and Mohiuddine(2014)], [Mursaleen and Savaş(2003)], [Móricz and Rhoades(1990)]-[Mursaleen and Mohiuddine(2010a)]). Yeşilkayagil i Başar [Yeşilkayagil and Başar(2016b)] su posmatrali topološka svojstva skoro nula i skoro konvergentnih dvostrukih prostora nizova.

Edely[Edely et al.(2003)] je predstavio koncept Cauchy i statističke konvergencije za dvostruke nizove.S'druge strane, u ovom istraživanju veza izmedju statističke konvergencije i stroge Cesàro sumabilnosti dvostrukih nizove je istražena. Mursaleen i Savaş[Mursaleen and Savaş(2003)] su karakterizovali skoro regularne klase matrica za dvostruke nizove. Zatim, Mursaleen[Mursaleen(2004)] i Edely[Edely et al.(2004)] su predstavili koncept skoro stroge regulartnosti matrica za dvostruke nizove, takodje oni su izneli koncept M-core za dvostruke nizove preko skoro strogo regularnih matrica. Tripathy i Sarma[Tripathy and Sarma(2009)] su uveli odredjene vektroske vrednosti dvostrukih prostore nizova pomoću Orliczove funkcije i dali su neka topološka svojstva i njihove veze. Subramanian i Misra[Subramanian and Misra(2010)] su izučavali neke nove prostore nizova. Savaş i Patterson[Savaş and Patterson(2011)] su definisali nove dvostruke prostore nizova izvedene funkcijom modula i istraživali su veze izmedju njih. Mursaleen i Başar[Mursaleen and Başar(2014)] su uveli prostore $\tilde{\mathcal{M}}_u$, $\tilde{\mathcal{C}}_p$, $\tilde{\mathcal{C}}_{p0}$, $\tilde{\mathcal{C}}_{bp}$, $\tilde{\mathcal{C}}_r$, i $\tilde{\mathcal{L}}_s$ koji predstavljaju domene Cesàro sredine jednog reda u dvostrukim prostorima nizova $\mathcal{M}_u$, $\mathcal{C}_p$, $\mathcal{C}_{p0}$, $\mathcal{C}_{bp}$, $\mathcal{C}_r$, i $\mathcal{L}_s$

Zeltser [Zeltser(2001)], je u svojoj doktorskoj tezi proučavao teorije topologije dvostrukih prostora nizova i teoriju sumabilnosti dvostrukih prostora nizova. Altay i Başar [Altay and Başar(2005)] su izučavali dvostruke serijske prostore $\mathcal{BS}$,

$\mathcal{BS}(t)$, $\mathcal{CS}_\vartheta$ i $\mathcal{BV}$ čiji su nizovi parcijalnih suma u prostorima $\mathcal{M}_u$, $\mathcal{M}_u(t)$, $\mathcal{C}_\vartheta$ i $\mathcal{L}_u$, gde je $\vartheta \in \{p, bp, r\}$. Oni su izučavali odredjena topološka svojstva ovih prostora i odredili $\alpha-$duale prostora $\mathcal{BS}$, $\mathcal{CS}_{bp}$ i $\mathcal{BV}$ i $\beta(\vartheta)-$duale prostora $\mathcal{CS}_{bp}$ i $\mathcal{CS}_r$ dvostrukih serija. Osim toga, dali su uslove koji karakterišu klase četvorodimenzionalnih matrica transformacije definisanih u prostorima $\mathcal{CS}_{bp}$, $\mathcal{CS}_p$ i $\mathcal{CS}_r$. Başar [Basar(2012), Glava 7, str. 277] je proučavao dvostruke nizove i srodne teme i izneo osnovne rezultate. Başar i Sever [Basar and Sever(2009)] su detaljno izučavali Banachov prostor $\mathcal{L}_q$ apsolutno q-sumabilnih dvostrukih prostora nizova i ispitivali topološka svojstva. Štaviše, oni su odredili $\alpha-$, $\beta(\vartheta)-$ i $\gamma-$duale prostora $\mathcal{L}_q$; gde je $1 \leq q < \infty$ i $\vartheta \in \{p, bp, r\}$. Nedavno su obavljene neke značajne studije, od strane više matematičara za dvostruke prostore nizova i četvorodimenzionalne matrice (Vidi [Mursaleen and Mohiuddine(2008)], [Mursaleen and Mohiuddine(2008)], [Mursaleen and Mohiuddine(2012)], [Mursaleen and Mohiuddine(2010b)]).

1.1 Uvodne napomene i oznake

U ovom odeljku navodimo neke potrebne definicije, teoreme i primere potrebne za dalja izučavanja

Definicija 1. ***(vektorski prostor)****[Malkowsky and Rakočević(2019)] Neka je X neprazan skup i neka je F realno ili kompleksno polje. X nazivamo linearnim prostorom (ili vektorskim prostorom) nad poljem F sa sledećim funkcijama*

$$+ : X \times X \to X \quad i \quad . : F \times X \to X$$

tako da za svako $\lambda, \mu \in F$ i $x, y, z \in X$ budu zadovoljeni sledeći uslovi.

(i) $x + y = y + x$, *(komutativnost sabiranja)*

(ii) $(x + y) + z = x + (y + z)$, *(asocijativnost sabiranja)*

(iii) $\exists e \in X$ *such that* $x + e = e + x = x$, *(postojanje nule)*

(iv) $\exists -x \in X$ *such that* $x + (-x) = (-x) + x = 0$, *(postojanje inverza za sabiranje)*

(v) $1.x = x$

(vi) $\lambda.(x + y) = \lambda.x + \lambda.y$

(vii) $(\lambda + \mu).x = \lambda.x + \mu.x$

(viii) $\lambda.(\mu.x) = (\lambda.\mu).x = \mu.(\lambda.x)$

tada uredjenu trojku $(X, +, .)$ nazivamo linearnim (ili vektorskim) prostorom nad poljem F.

Definicija 2. ***(Polumetrički prostor)****[Boos and Cass(2000)] Neka je X neprazan skup i $d : X \times X \to \mathbb{R}$ preslikavanje. Tada d nazivamo polumetrikom na X ako su sledeći uslovi* *(i)* $d(x, y) \geq 0$ *and* $d(x, x) = 0$, *(poludefinitnost)*

(ii) $d(x, y) = d(y, x)$, *(simetričnost)*

(iii) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$, *(nejednakost trougla).*

zadovoljeni za svako $x, y, z \in X$.

Dodatno, ako u prvom uslovu $d(x, y) > 0$ kada je $x \neq y$, onda d nazivamo metrikom na X. Ako je d polumetrika ili metrika na X, onda uredjeni par (X, d) nazivamo polumetričkim ili metričkim prostorom. Osim toga, $d(x, y)$ se naziva rastojanjem izmedju x i y.

Definicija 3. ***(Niz)****[R.G. Bartle(2011)] Niz realnih ili kompleksnih brojeva je funkcija definisana na skupu* $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, ...\}$ *prirodnih brojeva čiji domen je sadržan u skupu* $\mathbb{R}$ *realnih brojeva ili skupu* $\mathbb{C}$ *kompleksnih brojeva. Drugim rečima, funkcija* $X : \mathbb{N} \to \mathbb{R}/\mathbb{C}$ *odredjuje niz koji obeležavamo sa* x_n *gde* x_n *predstavlja vrednost* X *u* n.

Definicija 4. ***(Konvergentan niz)****[R.G. Bartle(2011)] Za niz* $x = (x_n)$ *u skupu* $\mathbb{R}$ *kažemo da konvergira ka* $L \in \mathbb{R}$, *ako za svako* $\epsilon > 0$ *postoji prirodan broj* $K(\epsilon)$ *tako da je* $|x_n - L| < \epsilon$ *za svako* $n \geq K(\epsilon)$. *Ako niz ima graničnu tačku, onda niz nazivamo konvergentnim, inače niz nazivamo divergentnim.*

Definicija 5. ***(Ograničen niz)****[R.G. Bartle(2011)] Niz* $x = (x_n)$ *realnih brojeva nazivamo ograničenim ako postoji realan broj* $M > 0$ *tako da važi* $|x_n| \leq M$ *za svako* $n \in \mathbb{N}$

Definicija 6. ***(Limes superior i limes inferior)****[R.G. Bartle(2011)] Neka je* $x = (x_n)$ *ograničen niz realnih brojeva.*

(i) Limes superior niza $x = (x_n)$ *je infimum skupa* V *za* $v \in \mathbb{R}$ *tako da je* $v < x_n$ *za najviše konačno mnogo* $n \in \mathbb{N}$. *Limes superior obeležavamo sa* $limsup(x_n)$ *ili* $\overline{lim}(x_n)$.

(ii) Limes inferior niza $x = (x_n)$ *je supremum skupa* W *za* $w \in \mathbb{R}$ *tako da je* $x_n < W$ *za najviše konačno mnogo* $n \in \mathbb{N}$. *Limes inferior obeležavamo sa* $liminf(x_n)$ *ili* $\underline{lim}(x_n)$.

Teorema 1. *Ograničeni niz* $x = (x_n)$ *je konvergentan ako i samo ako* $\overline{lim}(x_n) = \underline{lim}(x_n)$

Definicija 7. ***(Cauchijev niz)****[Malkowsky and Rakočević(2019)] Neka je* $x = (x_n)$ *niz realnih brojeva. Niz* $x = (x_n)$ *nazivamo Cauchijevim nizom ako i samo ako za svako* $\epsilon > 0$, *postoji realan broj* $N = N(\epsilon)$ *tako da važi* $|x_n - x_m| < \epsilon$ *za svako* $n, m > N(\epsilon)$.

Definicija 8. ***(Kompletan metrički prostor)****[Malkowsky and Rakočević(2019)] Za metrički prostor* (X, d) *kažemo da je kompletan ako i samo ako svaki Cauchijev niz konvergira ka nekoj tački iz* X. *Drugim rečima, ako* $d(x_n, x_m) \to 0$ *kada* $n, m \to \infty$, *onda postoji tačka* $x \in X$ *tako da* $d(x_n, x) \to o$ *kada* $n \to \infty$.

Definicija 9. ***(Paranorma)****[Wilansky(1978)] Neka je X linearni prostor. Ako su sledeći uslovi zadovoljeni za svako $x, y \in X$, onda preslikavanje $g : X \to \mathbb{R}$ nazivamo paranormom na X*

(i) $g(x) \geq 0$ *i* $g(\theta) = 0$

(ii) $g(-x) = g(x)$

(iii) $g(x + y) \leq g(x) + g(y)$

(iv) Ako je λ_n niz skalara takvih da $\lambda_n \to\to \lambda$ kada $n \to \infty$ i $x = (x_n)$ niz iz skupa X takav da $g(x_n - x) \to 0$ kada $n \to \infty$, onda $g(\lambda_n x_n - \lambda x) \to 0$ kada $n \to \infty$.

Paranormu nazivamo totalnom, ako $g(x) = 0$ implicira $x = 0$.

Definicija 10. ***(Polunorma)****[Boos and Cass(2000)] Neka je X linearni prostor na $\mathbb{R}(ili\mathbb{C})$. Preslikavanje $\rho : X \to \mathbb{R}$ je polunorma na prostoru X ako su za svako $x, y \in X$ i $\lambda \in \mathbb{R}(ili\mathbb{C})$ sledeći uslovi zadovoljeni.*

(i) $\rho(x) \geq 0$, *(poludefinitnost)*

(ii) $\rho(\lambda x) = |\lambda|\rho(x)$, *(pozitivna homogenost)*

(iii) $\rho(x + y) \leq \rho(x) + \rho(y)$, *(nejednakost trougla).*

Ako u prvom uslovu važi $\rho(x) > 0$ za svako $x \neq 0$, onda dato preslikavanje ρ nazivamo normom na prostoru X. Ako je preslikavanje ρ polunorma ili norma na X, onda uredjeni par (X, ρ) nazivamo polunormiranim ili normiranim prostorom.

Kada je (X, ρ) polunormiran prostor i d polumetrika na X definisana sa

$$d(x, y) = \rho(x, y), \ \textit{za svako } x, y \in X$$

onda d nazivamo polumetrikom na X generisanom polunormom ρ na X.

Definicija 11. ***(p-normirani prostor)****[Malkowsky and Rakočević(2019)] Neka je X realan ili kompleksan linearni prostor, $\|.\| : X \to \mathbb{R}$ i $p > 0$. Tada za uredjenu trojku $(X, \|.\|, p)$ kažemo da je p-normirani prostor, ako su zadovoljeni sledeći uslovi.*

(i) $\|x\| = 0$ *ako i samo ako* $x = 0$

(ii) $\|\lambda x\| = |\lambda|^p \|x\|$

(iii) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

Definicija 12. ***(preslikavanje očuvanja norme)****[Malkowsky and Rakočević(2019)] Za preslikavanje $T : X \to Y$ (na, 1-1) izmedju normiranih prostora X i Y kažemo da očuvava normu ako*

$$\forall x \in X, \|Tx\| = \|x\|$$

Ako je Y slika preslikavanja T onda za prostore X I Y kažemo da su izomorfni, a preslikavanje T nazivamo izomorfizmom.

Definicija 13. *Alfa-dual* λ^α*, beta-dual* λ^β *i gama-dual* λ^γ *nizovnog prostora* λ *definisani su sa*

$$\begin{aligned}
\lambda^\alpha &:= \{x = (x_k) \in \omega : xy = (x_k y_k) \in \ell_1 \quad \textit{za svako} \quad y = (y_k) \in \lambda\}\,, \\
\lambda^\beta &:= \{x = (x_k) \in \omega : xy = (x_k y_k) \in cs \quad \textit{za svako} \quad y = (y_k) \in \lambda\}\,, \\
\lambda^\gamma &:= \{x = (x_k) \in \omega : xy = (x_k y_k) \in bs \quad \textit{za svako} \quad y = (y_k) \in \lambda\}\,.
\end{aligned}$$

Glava 2

Dvostruki nizovi i redovi

U ovoj glavi, rezimirali smo dvostruke prostore nizova i neka topološka svojstva.

2.1 Dvostruki nizovi

U ovom poglavlju, definisali smo dvostruke nizove i njihove podskupove u datom redosledu.

Definicija 14. *Neka je X neprazan skup i f funkcija iz $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ u X tako da*

$$\begin{aligned} f \;\; : \;\; & \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to X \\ & (m, n) \to f(m, n) = x_{mn} \end{aligned}$$

tada funkciju f nazivamo dvostrukim nizom. Ako je $X = \mathbb{R}$ onda f nazivamo realnim nizom; ako je $X = \mathbb{C}$ onda f nazivamo nizom kompleksnih vrednosti.

Elementi bilo kog dvostrukog niza $x = x_{mn}$ mogu se prikazati preko neograničene matrice, na sledeći način

$$\begin{bmatrix} x_{00} & x_{01} & x_{02} & \cdots & x_{0n} & \cdots \\ x_{10} & x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} & \cdots \\ x_{20} & x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots \\ x_{m0} & x_{m1} & x_{m2} & \cdots & x_{mn} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}.$$

Skup svih dvostrukih prostore nizova sa kompleksnim vrednostima obeležavamo sa Ω.

$$\Omega := \{x = (x_{mn}) : x_{mn} \in \mathbb{C}, \quad \forall m, n \in \mathbb{N}\}$$

Ω je vektroski prostor, sa sabiranjem i skalarnim množenjem. Vektore iz skupa Ω nazivamo dvostrukim prostorima nizova.

Definicija 15. *[Patterson(2000)] Neka je f dvostruki niz na X i neka su*

$$\begin{aligned} i : \mathbb{N} &\rightarrow \mathbb{N} \\ m &\rightarrow i(m) = (i_m) \end{aligned}$$

i

$$\begin{aligned} j : \mathbb{N} &\rightarrow \mathbb{N} \\ n &\rightarrow j(n) = (j_n) \end{aligned}$$

dva rastuća jednostruka niza. Neka je funkcija h definisana sa

$$\begin{aligned} h : \mathbb{N} \times \mathbb{N} &\rightarrow \mathbb{N}x\mathbb{N} \\ (m,n) &\rightarrow h(m,n) = (i_m, j_n) \end{aligned}$$

Tada, kompozicija funkcija

$$\begin{aligned} f \circ h : \mathbb{N} \times \mathbb{N} &\rightarrow X \\ (m,n) &\rightarrow f \circ h(m,n) = (x_{i_m, j_n}) \end{aligned}$$

predstavlja podniz of (x_{mn}). Pošto beskonačni niz (x_{i_m,j_n}) skupa $\mathbb{N}x\mathbb{N}$ može biti odredjen, onda, može se reći da postoji beskonačni podniz (x_{mn}). Zapravo, podniz (x_{mn}) odredjujemo tako što brisemo pojedine vrste i kolone u originalnom nizu.

2.2 P-konvegencija prostora dvostrukih nizova

Definicija 16. *Neka je dvostruki niz $x = (x_{mn}) \in \Omega$. Ako za svako $\epsilon > 0$ postoji prirodan broj $n_0 = n_0(\epsilon)$ i $L \in \mathbb{C}$ tako da $|x_{mn} - L| < \epsilon$ za svako $m, n > n_0$, onda kažemo da je dvostruki niz $x = (x_{mn})$ konvergentan u Pringsheimovom smislu i da konvergira ka tački L i zapisujemo $p - \lim_{m,n \to \infty} x_{mn} = L$. Skup svih dvostrukih prostore nizova konvergentnih u Prigsheimovom smisl označavamo sa $\mathcal{C}_p$. Skup $\mathcal{C}_p$ definisan je sa*

$$\mathcal{C}_p := \{x = (x_{mn}) \in \Omega : \exists L \in \mathbb{C}, \forall \epsilon > 0 \exists k \in \mathbb{N}, \forall m, n \geq k \ni |x_{mn} - L| < \epsilon\}$$

je linearni prostor, sa koordinatnim sabiranjem i skalarnim množenjem.
Moricz[Moricz(1991)]je dokazao da je dvostruki prostor nizova $\mathcal{C}_p$ kompletan polunormiran prostor sa polunormom

$$\|x\|_\infty = \lim_{N \to \infty} \sup_{m,n \geq N} |x_{mn}|.$$

Definicija 17. *Za dvostruki niz $x = (x_{mn})$ kažemo da je ograničen ako $\|x\|_\infty = \sup_{m,n \in \mathbb{N}} |x_{mn}| < \infty$, gde je $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \cdots\}$. Prostor svih ograničenih dvostrukih prostore nizova obeležavase sa $\mathcal{M}_u$ i definisan je sa;*

$$\mathcal{M}_u := \{x = (x_{mn}) \in \Omega : \|x\|_\infty = \sup_{m,n \in \mathbb{N}} |x_{m,n}| < \infty\}$$

što predstavlja Banachov prostor sa normom $\|x\|_\infty$.

Za razliku od jednostrukih prostore nizova postoje dvostruki nizovi koji konvergiraju u Pringsheimovom smislu ali nisu ograničeni. Odnosno, skup $\mathcal{C}_p/\mathcal{M}_u$ nije prazan. Zapravo Boos[Boos and Cass(2000)] je pokazao, definisanjem niza $x = (x_{mn})$ sa

$$x_{mn} = \begin{cases} n & , \quad m = 0, n \in \mathbb{N}; \\ 0 & , \quad m \geq 1, n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

očigledno sledi $p - \lim_{m,n\to\infty} x_{mn} = 0$ ali $\|x\|_\infty = \sup_{m,n\in\mathbb{N}} |x_{mn}| = \infty$, dakle $x \in \mathcal{C}_p/\mathcal{M}_u$.

Definicija 18. *Neka je* $\mathcal{C}_{bp}$ *skup dvostrukih prostore nizova koji konvergiraju u Pringsheimovom smislu i takodje su ograničeni, odnosno* $\mathcal{C}_{bp} = \mathcal{C}_p \cap \mathcal{M}_u$, *tada je;*

$$\mathcal{C}_{bp} := \{x = x_{mn} \in \mathcal{C}_p : \|x\|_\infty = \sup_{m,n\in\mathbb{N}} |x_{mn}| < \infty\} = \mathcal{C}_p \cap \mathcal{M}_u.$$

Skup svih dvostrukih prostore nizova koji konvergiraju u Pringsheimovom smislu i dvostrukih ograničenih prostore nizova $\mathcal{C}_{bp}$ *je linearan Banachov prostor sa normom*

$$\|x\|_\infty = \sup_{m,n\in\mathbb{N}} |x_{mn}| < \infty$$

Definicija 19. *[Hardy(1904)] Za niz iz skupa* $\mathcal{C}_p$ *kažemo da regularno konvergira ako postoji jednostruki konvegentan niz za svaki indeks, skup svih regularno konvergentnih prostore nizova obeležavamo sa* $\mathcal{C}_r$, *skup* $\mathcal{C}_r$ *odredjen je sa;*

$$\mathcal{C}_r := \{x = x_{mn} \in \mathcal{C}_p \, \forall m \in \mathbb{N} \ni (x_{mn})_m \in c, \;\; i \, \forall n \in \mathbb{N} \ni (x_{mn})_n \in c\}.$$

Regularna konvergencija zahteva ograničenost dvostrukih prostore nizova, to je osnovna razlika izmedju regularnre i konvegencije u Pringsheimovom smislu. Štaviše, sa $\mathcal{C}_{bp0}$ *i* $\mathcal{C}_{r0}$, *mi obeležavamo prostore svih dvostrukih prostore nizova koji konvergiraju ka* 0 *sadržanih u prostorima* $\mathcal{C}_{bp}$ *i* $\mathcal{C}_r$, *u datom redosledu.*

Definicija 20. *[Basar and Sever(2009)] Prostor* $\mathcal{L}_q$ *svih apsolutno* $q-$*sumabilnih dvostrukih prostore nizova, koji odgovara prostoru* ℓ_q *svih* $q-$*sumabilnih jednostrukih prostore nizova, je odredjen sa*

$$\mathcal{L}_q := \left\{ x = (x_{kl}) \in \Omega : \sum_{k,l} |x_{kl}|^q < \infty \right\}, \quad (1 \leq q < \infty)$$

što predstavlja Banachov prostor sa normom $\|\cdot\|_q$ *definisanom sa*

$$\|x\|_q = \left(\sum_{k,l} |x_{kl}|^q \right)^{1/q}. \tag{2.1}$$

Prostor $\mathcal{L}_u$ *predstavlja poseban slučaj prostora* $\mathcal{L}_q$ *gde je* $q = 1$, *ovo je pokazao Zeltser [Zeltser(2002)].*

2.3 Skoro konvergentni prostori dvostrukih nizova

Lorentz[Lorentz(1948)] je uveo pojam skoro konvergentnih jednostrukih prostore nizova, a Móricz i Rhoades[Moricz and Rhoades(1988)] su proširili i izučavali taj pojam za dvostruke nizove.

Definicija 21. *[Moricz and Rhoades(1988)] Dvostruki niz $x = (x_{kl})$ kompleksnih brojeva skoro konvergira ka uopštenoj konstanti L ako*

$$p - \lim_{q,q'\to\infty} \sup_{m,n>0} \left| \frac{1}{(q+1)(q'+1)} \sum_{k=m}^{m+q} \sum_{l=n}^{n+q'} x_{kl} - L \right| = 0.$$

U tom slučaju, L nazivamo f_2-granicom dvostrukog niza x. U čitavom radu $\mathcal{C}_f$ predstavlja skup svih dvostrukih skoro konvergentnih prostore nizova.

$$\mathcal{C}_f := \Bigg\{ x = (x_{kl}) \in \Omega : \exists L \in \mathbb{C} \ni$$

$$p - \lim_{q,q'\to\infty} \sup_{m,n>0} \left| \frac{1}{(q+1)(q'+1)} \sum_{k=m}^{m+q} \sum_{l=n}^{n+q'} x_{kl} - L \right| = 0, \ \textit{uniformno po } m,n \Bigg\}.$$

Poznato je da je konvergentan niz skoro konvergentan. Ali, dobro je poznato i da je svaki ograničen konvergentan dvostruki niz takodje skoro konvergentan i da je svaki skoro konvergentan dvostruki niz ograničen. Odnostno, inkluzije $\mathcal{C}_{bp} \subset \mathcal{C}_f \subset \mathcal{M}_u$ važe i svaka inkluzija je prava.

Definicija 22. *[Cunjalo(2007)] Dvostruki niz $x = (x_{kl})$ nazivamo skoro Cauchijevim ako za svako $\epsilon > 0$ postoji pozitivan ceo broj K tako da*

$$\left| \frac{1}{(q_1+1)(q_1'+1)} \sum_{k=m_1}^{m_1+q_1} \sum_{l=n_1}^{n_1+q_1'} x_{kl} - \frac{1}{(q_2+1)(q_2'+1)} \sum_{k=m_2}^{m_2+q_2} \sum_{l=n_2}^{n_2+q_2'} x_{kl} \right| < \epsilon$$

za svako $q_1, q_1', q_2, q_2' > K$ i $(m_1, n_1), (m_2, n_2) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

Teorema 2. *[Mursaleen and Mohiuddine(2014)] Dvostruki niz je skoro konvergentan ako i samo ako je skoro Cauchijev.*

Móricz i Rhoades[Moricz and Rhoades(1988)] su izučavali četvordimenzionalne matrične transformacije svakog skoro konvergentnog dvostrukog niza i $p-$konvergentni dvostruki niz sa istom tačkom konvergencije. Skoro konzervativne i skoro regularne matrice za jednostruke nizove uveo je King [King(1966)] i skoro $\mathcal{C}_\vartheta-$konzervativne i skoro $\mathcal{C}_\vartheta$-regularne četvorodimenzinalne matrice za dvostruke nizove su karakterizovali i definisali Zeltsera [Zeltser et al.(2009)Zeltser, Mursaleen, and Mohiuddine]. Mursaleen [Mursaleen(2004)] je uveo skoro strogu regularnost za dvostruke nizove. Četvorodimenzionalna matrica $A = (a_{mnkl})$ je skoro strogo regularna ako transformiše svaki skoro konvergentan dvostruki niz u skoro konvergentan dvostruki niz sa istom graničnom vrednošću.

Definicija 23. *[Zeltser et al.(2009)Zeltser, Mursaleen, and Mohiuddine] Četvorodimenzionalna matrica $A = (a_{mnkl})$ je skoro $\mathcal{C}_\vartheta-$konzervativna matrica ako transformiše svaki $\vartheta-$konvergentan dvostruki niz $x = (x_{kl})$ u skoro konvergentan dvostruki niz, odnosno, $A = (a_{mnkl}) \in (\mathcal{C}_\vartheta : \mathcal{C}_f)$.*

Definicija 24. *[Zeltser et al.(2009)Zeltser, Mursaleen, and Mohiuddine] Četvorodimenzionalna matrica $A = (a_{mnkl})$ je skoro $\mathcal{C}_\vartheta-$regularna ako je $\mathcal{C}_\vartheta-$konzervativna i $f_2 - \lim Ax = \vartheta - \lim x$ za svako $x \in \mathcal{C}_\vartheta$.*

Neka je λ dvostruki prostor nizova, sa konvergencijom u odnosu na neko pravilo linearne konvergencije $\vartheta - \lim : \lambda \to \mathbb{C}$. Suma dvostrukih redova $\sum_{i,j} x_{ij}$ poštujući dato pravilo definisana je sa $\vartheta - \sum_{i,j} x_{ij} = \vartheta - \lim_{m,n\to\infty} \sum_{i,j=0}^{m,n} x_{ij}$. Svuda u tekstu sumiranje bez ograničenja ide od 0 do ∞, na primer $\sum_{i,j} x_{ij}$ predstavlja $\sum_{i,j=0}^{\infty} x_{ij}$.

U ovom delu,izučavamo četvorodimenzionalne matrične transformacije proizvoljnog dvostrukog prostora nizova λ u proizvoljan dvostruki prostor nizova μ. Neka je $A = (a_{mnkl})$ proizvoljna beskonačna matrica, pri čemu $m, n, k, l \in \mathbb{N}$, $x = (x_{kl})$ proizvoljan dvostruki niz, označićemo $Ax = \{(Ax)_{mn}\}_{m,n\in\mathbb{N}}$, gde je $A-$transformacija niza x, za svaki niz $x = (x_{kl}) \in \lambda$ postoji u skupu μ; pri čemu je

$$(Ax)_{mn} = \vartheta - \sum_{k,l} a_{mnkl} x_{kl} \quad \textit{za svako } m, n \in \mathbb{N}. \tag{2.2}$$

Domen četvorodimenzionalne matrice ima fundmentalan značaj za ovu tezu. Dakle, ovaj koncept je predstavljen u ovom poglavlju. $\vartheta-$summabilni domen $\lambda_A^{(\vartheta)}$ od A u prostoru λ dvostrukih prostore nizova odredjen je sa

$$\lambda_A^{(\vartheta)} = \left\{ x = (x_{kl}) \in \Omega : Ax = \left(\vartheta - \sum_{k,l} a_{mnkl} x_{kl} \right)_{m,n\in\mathbb{N}} \textit{ postoji i pripada } \lambda \right\}.$$

Iz (2.2) sledi da A slika prostor λ u prostor μ ako $\lambda \subset \mu_A^{(\vartheta)}$. Skup svih četvorodimenzinalnih matrica, koje preslikavaju prostor λ u prostor μ, obeležavamo sa $(\lambda : \mu)$. Prema tome, $A = (a_{mnkl}) \in (\lambda : \mu)$ ako i samo ako dvostruki niz sa desne strane jednakosti (2.2) konvergira u smislu ϑ za svako $m, n \in \mathbb{N}$, to jest, $A_{mn} \in \lambda^{\beta(\vartheta)}$ za svako $m, n \in \mathbb{N}$ i imamo $Ax \in \mu$ za svako $x \in \lambda$; gde je $A_{mn} = (a_{mnkl})_{k,l\in\mathbb{N}}$ za svako $m, n \in \mathbb{N}$. Štaviše, sledeće definicije su značajne za pravilnu klasifikaciju četvorodimenzionalne matrice. Četvorodimenzionalna matrica A je $\mathcal{C}_\vartheta$ *− konzervativna* ako je $\mathcal{C}_\vartheta \subset (\mathcal{C}_\vartheta)_A$, $\mathcal{C}_\vartheta$ *− regularna* i $\mathcal{C}_\vartheta$ *− konzervativna* i

$$\vartheta - \lim Ax = \vartheta - \lim_{m,n\to\infty} (Ax)_{mn} = \vartheta - \lim_{m,n\to\infty} x_{mn}, \ \textit{gde je } x = (x_{mn}) \in \mathcal{C}_\vartheta.$$

2.4 Dvostruki redovi

U ovom poglavlju, izlažemo pojedine rezulatete za prostore dvostrukih redova koje su definisali i proučavali Altay i Başar [Altay and Başar(2005)], i navodimo osnovne oznake i neke topološke osobine dvostrukih redova.

Definicija 25. *[Altay and Başar(2005)] Skup $\mathcal{BS}$ svih ograničenih redova čiji su nizovi parcijalnih suma ograničeni definisan je sa*

$$\mathcal{BS} = \left\{ x = (x_{kl}) \in \Omega : \sup_{m,n\in\mathbb{N}} |s_{mn}| < \infty \right\} \tag{2.3}$$

gde je niz $s_{mn} = \sum_{k,l=0}^{m,n} x_{kl}$ (m,n) parcijalna suma reda.

Prostor $\mathcal{BS}$ je linearan Banachov prostor sa normom definisanom sa

$$\|x\|_{\mathcal{BS}} = \sup_{m,n\in\mathbb{N}} \left| \sum_{k,l=0}^{m,n} x_{kl} \right|. \tag{2.4}$$

Ovaj prostor je linearno izomorfan nizovnom prostoru $\mathcal{M}_u$.

Definicija 26. *[Altay and Başar(2005)] Skup $\mathcal{CS}_\vartheta$ svih redova čiji su nizovi parcijalnih suma $\vartheta-$konvergentni u Pringsheimovom smislu definisan je sa*

$$\mathcal{CS}_\vartheta = \{x = (x_{kl}) \in \Omega : (s_{mn}) \in \mathcal{C}_\vartheta\} \tag{2.5}$$

gde je $\vartheta = \{p, bp, r\}$.

Prostor $\mathcal{CS}_p$ je linearan kompletan polunormiran prostor sa polunormom definisanom sa

$$\|x\|_\infty = \lim_{n\to\infty} \left(\sup_{k,l\geq n} \left| \sum_{i,j=0}^{k,l} x_{ij} \right| \right). \tag{2.6}$$

Ovaj prostor je izomorfan nizovnovnom prostoru $\mathcal{C}_p$.

Pored toga, skupovi $\mathcal{CS}_{bp}$ i $\mathcal{CS}_r$ su takodje i Banachovi prostori sa normom (2.4) i važi inkluzija $\mathcal{CS}_r \subset \mathcal{CS}_{bp}$.

Definicija 27. *[Altay and Başar(2005)] Skup $\mathcal{BV}$ Skup svih dvostrukih prostore nizova ograničenih varijacija definisan je sa*

$$\mathcal{BV} = \left\{ x = (x_{kl}) \in \Omega : \sum_{k,l} |x_{kl} - x_{k-1,l} - x_{k,l-1} + x_{k-1,l-1}| < \infty \right\}. \tag{2.7}$$

Prostor $\mathcal{BV}$ je linearan Banachov prostor sa nornom odredjenom sa

$$\|x\|_{\mathcal{BV}} = \sum_{k,l} |x_{kl} - x_{k-1,l} - x_{k,l-1} + x_{k-1,l-1}|. \tag{2.8}$$

Ovaj prostor je linearno izomorfan prostoru $\mathcal{L}_u$ apsolutno konvergentnih dvostrukih prostore nizova. Osim toga, važe stroge inkluzije $\mathcal{BV} \subset \mathcal{C}_\vartheta$ i $\mathcal{BV} \subset \mathcal{M}_u$.

2.5 α, β i $\gamma-$ duali prostora dvostrukih nizova

Definicija 28. *[Gupta and Kamthan(1980)] $\alpha-$dual λ^{α}, $\beta(\vartheta)-$dual $\lambda^{\beta(\vartheta)}$ u odnosu na $\vartheta-$konvegenciju i $\gamma-$dual λ^{γ} prostora dvostrukih nizova λ definisani su respektivno, sa*

$$\begin{aligned}
\lambda^{\alpha} &:= \left\{a=(a_{kl})\in\Omega:\sum_{k,l}|a_{kl}x_{kl}|<\infty \quad \textit{za svako} \quad x=(x_{kl})\in\lambda\right\},\\
\lambda^{\beta(\vartheta)} &:= \left\{a=(a_{kl})\in\Omega:\vartheta-\sum_{k,l}a_{kl}x_{kl} \quad \textit{postoji za svako} \quad x=(x_{kl})\in\lambda\right\},\\
\lambda^{\gamma} &:= \left\{a=(a_{kl})\in\Omega:\sup_{m,n\in\mathbb{N}}\left|\sum_{k,l=0}^{m,n}a_{kl}x_{kl}\right|<\infty \quad \textit{za svako} \quad x=(x_{kl})\in\lambda\right\}.
\end{aligned}$$

Za dva proizvoljna prostora λ i μ dvostrukih nizova važi $\mu^{\alpha}\subset\lambda^{\alpha}$ uvek kada $\lambda\subset\mu$ i $\lambda^{\alpha}\subset\lambda^{\gamma}$. Pored toga, poznato je da inkluzija $\lambda^{\alpha}\subset\lambda^{\beta(\vartheta)}$ važi, dok inkluzija $\lambda^{\beta(\vartheta)}\subset\lambda^{\gamma}$ ne važi, zato $\vartheta-$konvergencija dvostrukih prostore nizova parcijalnih suma dovstrukih redova nije garantovana ograničenošću.

Glava 3

$B(r, s, t, u)$ matrice i pojedini novi prostori dvostrukih nizova

U ovoj glavi, najpre smo definisali četvorodimenzionalnu uopštenu diferencnu matricu $B(r, s, t, u)$ i pojedine nove dvostruke prostore nizova $B(\mathcal{M}_u)$, $B(\mathcal{C}_p)$, $B(\mathcal{C}_{bp})$, $B(\mathcal{C}_r)$, $B(\mathcal{L}_q)$, $B(\mathcal{C}_f)$ i $B(\mathcal{C}_{f0})$ iz domena četvorodimenzionalne uopštene matrice razlika $B(r, s, t, u)$ u dvstrukim prostorima nizova $\mathcal{M}_u$, $\mathcal{C}_p$, $\mathcal{C}_{bp}$, $\mathcal{C}_r$, $\mathcal{L}_q$, $\mathcal{C}_f$ i $\mathcal{C}_{f0}$, respektivno. Nakon toga, pojedini topološki rezultati i pojedine inkluzijske relacije su predstavljene uz odredjene stroge uslove. ncna

3.1 Četvorodimenzionalna uopštena matrica razlika $B(r, s, t, u)$

Adams [Adams(1933)] je definisao četvorodimenzionalnu beskonačnu matricu $A = (a_{mnkl})$ nazvanu trougaonom matricom $a_{mnkl} = 0$ za $k > m$ ili $l > n$ ili oba. Takodje [Adams(1933)] za matricu $A = (a_{mnkl})$ kažemo da je trougaona ako $a_{mnmn} \neq 0$ za svako $m, n \in \mathbb{N}$. Pored toga, citirajući Cooka [Buck et al.(1952), Remark (a), p. 22] možemo reći da svaka trougaona matrica ima inverznu matricu koja je takodje tougaona.

Četvorodimenzionalna diferencna matrica $\Delta = (\delta_{mnkl})$ definisana sa

$$\delta_{mnkl} := \begin{cases} (-1)^{m+n-k-l} & , \quad m-1 \leq k \leq m, \quad n-1 \leq l \leq n, \\ 0 & , \quad \text{inače} \end{cases}$$

za svako $m, n, k, l \in \mathbb{N}$. Neka je niz $y = (y_{mn})$ $\Delta-$transformacija niza $x = (x_{mn})$, niz $y = (y_{mn})$ je odredjen sa

$$y_{mn} = (\Delta x)_{mn} = x_{mn} - x_{m-1,n} - x_{m,n-1} + x_{m-1,n-1}$$

za svako $m, n \in \mathbb{N}$. Osim toga, direktnim računanjem dobijamo inverznu matricu

$\Delta^{-1} = S = (s_{mnkl})$ odredjenu sa

$$s_{mnkl} := \begin{cases} 1 & , \quad 0 \leq k \leq m, \quad 0 \leq l \leq n, \\ 0 & , \quad \text{inače} \end{cases}$$

za svako $m, n, k, l \in \mathbb{N}$.

Koncept uopštene četvorodimenzionalne matrice razlika uveli su Tuğ i Başar [Tuğ and Başar(2016)] and Tuğ [Tuğ(2017a)],[Tuğ(2017b)],[Tuğ(2018)],[Tuğ(2018)]. Neka su $r, s, t, u \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$. Onda, četvorodimenzionalna uopštena diferencna matrica $B(r,s,t,u) = \{b_{mnkl}(r,s,t,u)\}$ definisana je sa

$$b_{mnkl}(r,s,t,u) := \begin{cases} su & , \quad (k,l) = (m-1, n-1), \\ st & , \quad (k,l) = (m-1, n), \\ ru & , \quad (k,l) = (m, n-1), \\ rt & , \quad (k,l) = (m,n) \\ 0 & , \quad \text{inače} \end{cases}$$

za svako $m, n, k, l \in \mathbb{N}$. Dakle, $B(r,s,t,u)-$transformacija dvostrukog niza $x = (x_{mn})$ je data sa

$$\begin{aligned} y_{mn} := \{B(r,s,t,u)x\}_{mn} &= \sum_{k,l} b_{mnkl}(r,s,t,u)x_{kl} \\ &= sux_{m-1,n-1} + stx_{m-1,n} + rux_{m,n-1} + rtx_{mn} \end{aligned} \tag{3.1}$$

za svako $m, n \in \mathbb{N}$. Prema tome, imamo inverz $B^{-1}(r,s,t,u)$

$$B^{-1}(r,s,t,u) = F(r,s,t,u) = \{f_{mnkl}(r,s,t,u)\},$$

odakle sledi

$$f_{mnkl}(r,s,t,u) := \begin{cases} \frac{(-s/r)^{m-k}(-u/t)^{n-l}}{rt} & , \quad 0 \leq k \leq m, \ 0 \leq l \leq n, \\ 0 & , \quad \text{inače} \end{cases}$$

za svako $m, n, k, l \in \mathbb{N}$. Dakle, niz $x = (x_{mn})$ možemo dobiti primenom inverzne matrice $F(r,s,t,u)$ na (3.1), imamo tada

$$x_{mn} = \frac{1}{rt} \sum_{k,l=0}^{m,n} \left(\frac{-s}{r}\right)^{m-k} \left(\frac{-u}{t}\right)^{n-l} y_{kl} \quad \text{za svako } m, n \in \mathbb{N}. \tag{3.2}$$

U tezi pretpostavljamo da dvostrukii nizovi $x = (x_{mn})$ i $y = (y_{mn})$ povezani sa relacijom (3.1). Ako je $p - \lim\{B(r,s,t,u)x\}_{mn} = l$, onda za niz $x = (x_{mn})$ kažemo da $B(r,s,t,u)$ konvergira ka l. Tada je $r = t = 1$ i $s = u = -1$ za svako $m, n \in \mathbb{N}$, četvorodimenzionalna uopštena diferencna matrica $B(r,s,t,u)$ se svodi na četvorodimenzionalnu diferencnu matricu $\Delta = B(1,-1,1,-1)$.

3.2 Pojedini novi prostori dvostrukih nizova

U ovom poglavlju, definisaćemo dvostruke prostore nizova $B(\mathcal{M}_u)$, $B(\mathcal{C}_p)$, $B(\mathcal{C}_{bp})$, $B(\mathcal{C}_r)$ i $B(\mathcal{L}_q)$ iz domena četvorodimenzionalne uopštene matrice razlika $B(r,s,t,u)$ u dvostrukim prostorima nizova $\mathcal{M}_u$, $\mathcal{C}_p$, $\mathcal{C}_{bp}$, $\mathcal{C}_r$ i $\mathcal{L}_q$, respektivno. Pored toga, definisaćemo nove skoro konvergentne prostore nizova $B(\mathcal{C}_f)$ i $B(\mathcal{C}_{f_0})$ izvedene iz domena četvorodimenzionalne matrice B u prosorima svih skoro konvergentnih i skoro nula dvostrukih prostore nizova $\mathcal{C}_f$ i $\mathcal{C}_{f_0}$, respektivno. Nakon toga dokazujemo da su $B(\mathcal{C}_{bp})$, $B(\mathcal{C}_r)$, $B(\mathcal{L}_q)$, $B(\mathcal{C}_f)$ i $B(\mathcal{C}_{f_0})$ Banachovi prostori i da je $B(\mathcal{C}_p)$ kompletan polunormiran prostor. Na kraju, zaključujemo poglavlje sa nekim inkuzijskim relacijama.

$$\begin{aligned}
B(\mathcal{M}_u) &:= \left\{x=(x_{mn})\in\Omega : \sup_{m,n\in\mathbb{N}} |\{B(r,s,t,u)x\}_{mn}|<\infty\right\},\\
B(\mathcal{C}_p) &:= \left\{x=(x_{mn})\in\Omega : \exists l\in\mathbb{C}\ni p-\lim_{m,n\to\infty} |\{B(r,s,t,u)x\}_{mn}-l|=0\right\},\\
B(\mathcal{C}_{bp}) &:= \{x=(x_{mn})\in\Omega : B(r,s,t,u)x\in\mathcal{C}_{bp}\},\\
B(\mathcal{C}_r) &:= \{x=(x_{mn})\in\Omega : B(r,s,t,u)x\in\mathcal{C}_r\},\\
B(\mathcal{L}_q) &:= \left\{x=(x_{mn})\in\Omega : \sum_{m,n} |\{B(r,s,t,u)x\}_{mn}|^q<\infty\right\},\ 0<q<\infty,\\
B(\mathcal{C}_f) &:= \Bigg\{x=(x_{kl})\in\Omega : \exists L\in\mathbb{C}\ni\\
&\quad p-\lim_{q,q'\to\infty}\sup_{m,n>0}\left|\frac{1}{(q+1)(q'+1)}\sum_{k=m}^{m+q}\sum_{l=n}^{n+q'}(Bx)_{kl}-L\right|=0,\ \textit{uni. u } m,n\Bigg\},\\
B(\mathcal{C}_{f_0}) &:= \Bigg\{x=(x_{kl})\in\Omega :\\
&\quad p-\lim_{q,q'\to\infty}\sup_{m,n>0}\left|\frac{1}{(q+1)(q'+1)}\sum_{k=m}^{m+q}\sum_{l=n}^{n+q'}(Bx)_{kl}\right|=0,\quad \textit{uni. u } m,n\Bigg\}.
\end{aligned}$$

3.3 Pojedini topološki rezultati

Iznećemo sada neke topološke rezulate i inkluzijske relacije uz stroge uslove.

Teorema 3. *Dvostruki prostori nizova $B(\mathcal{M}_u)$, $B(\mathcal{C}_{bp})$ i $B(\mathcal{C}_r)$ su linearni Banachovi prostori sa koordinatni sabiranjem i skalarnim množenjem, i linearno su izomorfni prostorima $\mathcal{M}_u$, $\mathcal{C}_{bp}$ i $\mathcal{C}_r$, respektivno, sa normom definisanom sa*

$$\|x\|_{B(\mathcal{M}_u)} = \sup_{k,l\in\mathbb{N}} |sux_{k-1,l-1}+stx_{k-1,l}+rux_{k,l-1}+rtx_{kl}|. \tag{3.3}$$

Dokaz. Dokazaćemo teoremu samo za prostor $B(\mathcal{M}_u)$, na identičan način je moguće dokazati teoremu i za ostale prostore. Lako je pokazati linearnost prostora, pa ćemo izostaviti detalje. Posmatrajmo Cauchijev niz $x^j=\{x^q_{mn}\}_{m,n\in\mathbb{N}}\in B(\mathcal{M}_u)$ kako bismo pokazali da je prostor $B(\mathcal{M}_u)$ Banachov prostor sa normom $\|x\|_{B(\mathcal{M}_u)}$

definisanom sa (3.3). Za proizvoljno $\epsilon > 0$, postoji pozitivan ceo broj $N(\epsilon) \in \mathbb{N}$ tako da

$$\|x^j - x^i\|_{B(\mathcal{M}_u)} = \sup_{m,n\in\mathbb{N}} |\{B(r,s,t,u)x^j\}_{mn} - \{B(r,s,t,u)x^i\}_{mn}| < \epsilon \tag{3.4}$$

za svako $i, j > N(\epsilon)$ Onda možemo reći da je $\{(B(r,s,t,u)x^j)_{mn}\}_{j\in\mathbb{N}}$ Cauchijev niz u $\mathcal{M}_u$ za svako $m, n \in \mathbb{N}$. Kako je $\mathcal{M}_u$ kompletan, zbog konvergencije, imamo

$$\{B(r,s,t,u)x^j\}_{mn} \to \{B(r,s,t,u)x\}_{mn} \ \textit{kada} \ p \to \infty.$$

Kada $p \to \infty$ iz jednakosti (3.4), imamo

$$|\{B(r,s,t,u)x^j\}_{mn} - \{B(r,s,t,u)x\}_{mn}| < \epsilon \ \textit{za svako} \ m,n \in \mathbb{N}.$$

Kako je $\{\{B(r,s,t,u)x^j\}_{mn}\} \in \mathcal{M}_u$, postoji pozitivan ceo broj K tako da

$$\sup_{m,n\in\mathbb{N}} |\{B(r,s,t,u)x^j\}_{mn}| \le K.$$

Dakle, sledeća nejednakost važi

$$\begin{aligned} |\{B(r,s,t,u)x\}_{mn}| &\le |\{B(r,s,t,u)x^j\}_{mn} - \{B(r,s,t,u)x\}_{mn}| \\ &+ |\{B(r,s,t,u)x^j\}_{mn}| < \epsilon + K \end{aligned}$$

Uzimajući supremum po $m, n \in \mathbb{N}$ objedinjenjem svih prethodno navedenih rezultata dobijamo $B(r,s,t,u)x \in \mathcal{M}_u$, odnosno, $x \in B(\mathcal{M}_u)$. Dakle, prostor $B(\mathcal{M}_u)$ je linearan Banachov prostor sa normom $\|\cdot\|_{B(\mathcal{M}_u)}$ odredjenom jednakošću (3.3). Pokazaćemo sada da je prostor $B(\mathcal{M}_u)$ linearno izomorfan prostoru $\mathcal{M}_u$, na identičan način se može pokazati i za ostale prostore. Sa notacijom iz (3.1), definisaćemo transformaciju T iz $B(\mathcal{M}_u)$ u $\mathcal{M}_u$ za $x \mapsto Tx = y = B(r,s,t,u)x$. Trivijalno je pokazati da je T linearno i injektivno. Neka je $y = (y_{kl}) \in \mathcal{M}_u$ i $x = (x_{mn})$ definisano preko y i relacije (3.2) za svako $m, n \in \mathbb{N}$. Dakle, iz (3.1) sledi

$$\begin{aligned} \{B(r,s,t,u)x\}_{mn} &= sux_{m-1,n-1} + stx_{m-1,n} + rux_{m,n-1} + rtx_{mn} \\ &= su \sum_{k,l=0}^{m-1,n-1} \left(\frac{-s}{r}\right)^{m-k-1} \left(\frac{-u}{t}\right)^{n-l-1} \frac{y_{kl}}{rt} \\ &+ st \sum_{k,l=0}^{m-1,n} \left(\frac{-s}{r}\right)^{m-k-1} \left(\frac{-u}{t}\right)^{n-l} \frac{y_{kl}}{rt} \\ &+ ru \sum_{k,l=0}^{m,n-1} \left(\frac{-s}{r}\right)^{m-k} \left(\frac{-u}{t}\right)^{n-l-1} \frac{y_{kl}}{rt} \\ &+ rt \sum_{k,l=0}^{m,n} \left(\frac{-s}{r}\right)^{m-k} \left(\frac{-u}{t}\right)^{n-l} \frac{y_{kl}}{rt} \\ &= y_{mn} \end{aligned}$$

za svako $m,n \in \mathbb{N}$ što nas dovodi do posledice da je

$$\|x\|_{B(\mathcal{M}_u)} = \sup_{m,n\in\mathbb{N}} \left|\{B(r,s,t,u)x\}_{mn}\right| = \sup_{m,n\in\mathbb{N}} \left|y_{mn}\right| = \|y\|_\infty < \infty.$$

Ovo znači da je niz $x = (x_{mn})$ definisan sa (3.2) u prostoru $B(\mathcal{M}_u)$, to jest, da je T surjektivno i očuvava normu

Ovim je teorema dokazana. □

Teorema 4. *Prostori nizova $B(\mathcal{C}_f)$ i $B(\mathcal{C}_{f_0})$ su Banachovi prostori linearno izomorfni prostorima $\mathcal{C}_f$ i $\mathcal{C}_{f_0}$, respektivno, sa normom definisanom sa*

$$\|x\|_{B(\mathcal{C}_f)} = \sup_{q,q',m,n\in\mathbb{N}} \left|\frac{1}{(q+1)(q'+1)} \sum_{k=m}^{m+q}\sum_{l=n}^{n+q'} (Bx)_{kl}\right|. \tag{3.5}$$

Dokaz. Dokazaćemo teoremu samo za prostor $B(\mathcal{C}_f)$, na identičan način se pokazuje i za prostor $B(\mathcal{C}_{f_0})$. Posmatrajmo Cauchijev niz $x^{(j)} = \{x^{(j)}_{kl}\}_{k,l\in\mathbb{N}} \in B(\mathcal{C}_f)$. Za dato $\epsilon > 0$, postoji pozitivan ceo broj $M(\epsilon) \in \mathbb{N}$ tako da

$$\begin{aligned} \|x^{(j)} - x^{(i)}\|_{B(\mathcal{C}_f)} &= \sup_{q,q',m,n\in\mathbb{N}} \left|\frac{1}{(q+1)(q'+1)} \sum_{k=m}^{m+q}\sum_{l=n}^{n+q'} \left[(Bx^{(j)})_{kl} - (Bx^{(i)})_{kl}\right]\right| \\ &< \epsilon \end{aligned} \tag{3.6}$$

za svako $i,j > M(\epsilon)$. Iz jednakosti (3.6) sledi da je niz $\{(Bx^{(j)})_{kl}\}_{j\in\mathbb{N}}$ Cauchijev u $\mathcal{C}_f$ za svako $k,l \in \mathbb{N}$.

Kako je $\mathcal{C}_f$ kompletan sa normom $\|x\|_{\mathcal{C}_f}$ (vidi[Yeşilkayagil and Başar(2016b)]), niz je konvergentan. Tada možemo reći da postoji dvostruki niz $x = (x_{kl}) \in \mathcal{C}_f$ tako da

$$\frac{1}{(q+1)(q'+1)} \sum_{k=m}^{m+q}\sum_{l=n}^{n+q'} (Bx^{(j)})_{kl} \to \frac{1}{(q+1)(q'+1)} \sum_{k=m}^{m+q}\sum_{l=n}^{n+q'} (Bx)_{kl}.$$

kada $j \to \infty$. Sada, uzimajući graničnu vrednost kada $i \to \infty$ iz jednakosti (3.6), za svako $\epsilon > 0$ i za svako važi $k,l \in \mathbb{N}$ imamo

$$\left|\frac{1}{(q+1)(q'+1)} \sum_{k=m}^{m+q}\sum_{l=n}^{n+q'} (Bx^{(j)})_{kl} - \frac{1}{(q+1)(q'+1)} \sum_{k=m}^{m+q}\sum_{l=n}^{n+q'} (Bx)_{kl}\right| < \epsilon$$

Sa druge strane, kako je $\{(Bx^{(j)})_{kl}\} \in \mathcal{C}_f$ i svaki skoro konvergentan dvostruki niz ograničen, postoji pozitivan realan broj K tako da

$$\sup_{m,n\in\mathbb{N}} \left|\frac{1}{(q+1)(q'+1)} \sum_{k=m}^{m+q}\sum_{l=n}^{n+q'} (Bx^{(j)})_{kl}\right| \le K.$$

Dakle, sledeće nejednakosti važe

$$\begin{aligned}
\left|\frac{1}{(q+1)(q'+1)}\sum_{k=m}^{m+q}\sum_{l=n}^{n+q'}(Bx)_{kl}\right| &\leq \left|\frac{1}{(q+1)(q'+1)}\sum_{k=m}^{m+q}\sum_{l=n}^{n+q'}(Bx^{(j)})_{kl}\right.\\
&- \left.\frac{1}{(q+1)(q'+1)}\sum_{k=m}^{m+q}\sum_{l=n}^{n+q'}(Bx)_{kl}\right|\\
&+ \left|\frac{1}{(q+1)(q'+1)}\sum_{k=m}^{m+q}\sum_{l=n}^{n+q'}(Bx^{(j)})_{kl}\right|\\
&< \epsilon + K.
\end{aligned}$$

Sada uzimajući supremum po $m,n \in \mathbb{N}$ i $p-$granicu kada $q,q' \to \infty$ iz pretodne nejednakosti imamo

$$\left(\sum_{k=m}^{m+q}\sum_{l=n}^{n+q'}(Bx)_{kl}/[(q+1)(q'+1)]\right) \in \mathcal{C}_f,$$

odnosno, $x \in B(\mathcal{C}_f)$. Možemo uočiti da je prostor $B(\mathcal{C}_f)$ Banachov prostor sa normom $\|\cdot\|_{B(\mathcal{C}_f)}$ odredjenom jednakošću (3.5).

Sada, treba pokazati da je $B(\mathcal{C}_f) \cong \mathcal{C}_f$. Da bismo ovo dokazali, treba pokazati postojanje linearne bijekcije izmedju prostora $B(\mathcal{C}_f)$ i $\mathcal{C}_f$. Posmatrajmo preslikavanje T iz $B(\mathcal{C}_f)$ u $\mathcal{C}_f$ odredjeno sa $x \mapsto Tx = y = Bx$, sa notacijom (3.1). Linearnost i injektivnost preslikavanja T su očigledni. Neka je $y = (y_{kl}) \in \mathcal{C}_f$ proizvoljan niz i neka je niz $x = (x_{kl})$ takav da sa nizom y zadovoljava relaciju (3.2) za svako $k,l \in \mathbb{N}$. Tada imamo sledeću jednakost

$$\begin{aligned}
(Bx)_{kl} &= sux_{k-1,l-1} + stx_{k-1,l} + rux_{k,l-1} + rtx_{kl}\\
&= su\sum_{i,j=0}^{k-1,l-1}\left(\frac{-s}{r}\right)^{k-i-1}\left(\frac{-u}{t}\right)^{l-j-1}\frac{y_{ij}}{rt}\\
&+ st\sum_{i,j=0}^{k-1,l}\left(\frac{-s}{r}\right)^{k-i-1}\left(\frac{-u}{t}\right)^{l-j}\frac{y_{ij}}{rt}\\
&+ ru\sum_{i,j=0}^{k,l-1}\left(\frac{-s}{r}\right)^{k-i}\left(\frac{-u}{t}\right)^{l-j-1}\frac{y_{ij}}{rt}\\
&+ rt\sum_{i,j=0}^{k,l}\left(\frac{-s}{r}\right)^{k-i}\left(\frac{-u}{t}\right)^{l-j}\frac{y_{ij}}{rt}\\
&= y_{kl}
\end{aligned}$$

za svako $k,l \in \mathbb{N}$. Prema tome, dolazimo do jednakosti

$$p-\lim_{q,q'\to\infty}\sum_{k=m}^{m+q}\sum_{l=n}^{n+q'}(Bx)_{kl}/[(q+1)(q'+1)] = p-\lim_{q,q'\to\infty}\sum_{k=m}^{m+q}\sum_{l=n}^{n+q'}y_{kl}/[(q+1)(q'+1)].$$

Ovo pokazuje da je niz $x=(x_{kl})\in B(\mathcal{C}_f)$. Odatle možemo reći da je T surjekcija. Štaviše, to se može dobiti iz sledeće nejednakosti

$$\begin{aligned}\|x\|_{B(\mathcal{C}_f)} &= \sup_{q,q',m,n\in\mathbb{N}}\left|\frac{1}{(q+1)(q'+1)}\sum_{k=m}^{m+q}\sum_{l=n}^{n+q'}(Bx)_{kl}\right| \\ &= \sup_{q,q',m,n\in\mathbb{N}}\left|\frac{1}{(q+1)(q'+1)}\sum_{k=m}^{m+q}\sum_{l=n}^{n+q'}y_{kl}\right| = \|y\|_{\mathcal{C}_f}<\infty.\end{aligned}$$

Dakle, T očuvava normu. Stoga, T je linearna bijekcija i $B(\mathcal{C}_f)$ i $\mathcal{C}_f$ su linearno izomorfni. Ovim je teorema dokazana. □

Teorema 5. *Prostor $B(\mathcal{C}_p)$ je linearan prostor sa koordinatnim sabiranjem i skalarnim množenjem, linearno je izomorfan prostoru $\mathcal{C}_p$. Takodje, $B(\mathcal{C}_p)$ je kompletam polunormiran prostor sa polunormom*

$$\|x\|_{B(\mathcal{C}_p)}=\lim_{k\to\infty}\left(\sup_{m,n\geq k}|\{B(r,s,t,u)x\}_{mn}|\right).$$

Dokaz. Dokaz je sličan dokazu Teoreme 3. Zbog toga, preskačemo detalje. □

Teorema 6. *Prostor $B(\mathcal{L}_q)$ je linearan prostor sa koordinatnim sabiranjem i sklarnim množenjem i važe sledeći iskazi:*

i) Ako je $0<q<1$, onda je $B(\mathcal{L}_q)$ kompletam $q-$normiran prostor sa normom

$$\widehat{\|x\|}_{B(\mathcal{L}_q)} = \sum_{m,n}|\{B(r,s,t,u)x\}_{mn}|^q$$

i izomorfan je u odnosu na $q-$normu prostoru $\mathcal{L}_q$.

ii) Ako je $1\leq q<\infty$, onda je $B(\mathcal{L}_q)$ Banachov prostor sa normom

$$\|x\|_{B(\mathcal{L}_q)} = \left[\sum_{m,n}|\{B(r,s,t,u)x\}_{mn}|^q\right]^{1/q}$$

i izomorfan je u odnosu na normu prostoru $\mathcal{L}_q$.

Dokaz. (i) Lako je pokazati linearnost prostora $B(\mathcal{L}_q)$ koji je $q-$normiran prostor. Zbog toga, preskočićemo detalje. Neka je $x^i=\left\{x_{mn}^{(i)}\right\}_{m,n\in\mathbb{N}}$ Cauchijev nis za svako fiksirano $i\in\mathbb{N}$ u prostoru $B(\mathcal{L}_q)$. Za dato $\epsilon>0$ postoji pozitivan realan broj $N(\epsilon)>0$ tako da važi

$$\widehat{\|x^i-x^j\|}_{B(\mathcal{L}_q)}=\sum_{m,n}\left|\{B(r,s,t,u)x^i\}_{mn}-\{B(r,s,t,u)x^j\}_{mn}\right|^q<\epsilon$$

za svako $i,j\geq N(\epsilon)$. Onda, zaključujemo da je $\{\{B(r,s,t,u)x^i\}_{mn}\}_{i\in\mathbb{N}}$ Cauchijev niz za svako fiksirano $m,n\in\mathbb{N}$. Na osnovu (i) Teoreme 2.1 Yeşilkayagil i Başar

[Yeşilkayagil and Başar(2017)] prostor $\mathcal{L}_q$ je kompletan $q-$normiran prostor. Zbog toga Cauchijev niz $\{(Bx^i)_{mn}\}_{i\in\mathbb{N}}$ konvergira u prostoru $\mathcal{L}_q$, kada $i\to\infty$, to jest postoji niz $B(r,s,t,u)x\in\mathcal{L}_q$ tako da je

$$\left|\{B(r,s,t,u)x^i\}_{mn}-\{B(r,s,t,u)x\}_{mn}\right|<\epsilon$$

za svako $m,n\in\mathbb{N}$. Osim toga, kako je $\{\{B(r,s,t,u)x^i\}_{mn}\}\in\mathcal{L}_q$ za svako fiksirano $i\in\mathbb{N}$, postoji pozitivan realan broj $M>0$ tako da važi $\sum_{m,n}|\{B(r,s,t,u)x^i\}_{mn}|^q\leq M$. Dalje, važe nejednakosti

$$\begin{aligned}\sum_{m,n}|(Bx)_{mn}|^q &\leq \sum_{m,n}\left(\left|\{B(r,s,t,u)x^i\}_{mn}-\{B(r,s,t,u)x\}_{mn}\right|\right.\\ &+ \left.\left|\{B(r,s,t,u)x^i\}_{mn}\right|\right)^q\\ &\leq \sum_{m,n}\left|\{B(r,s,t,u)x^i\}_{mn}-\{B(r,s,t,u)x\}_{mn}\right|^q\\ &+ \sum_{m,n}\left|\{B(r,s,t,u)x^i\}_{mn}\right|^q\\ &< \epsilon+M\end{aligned}$$

što znači da je $B(r,s,t,u)x\in\mathcal{L}_q$, odnosno, $x\in B(\mathcal{L}_q)$. Iz prethodnog imamo da je $B(\mathcal{L}_q)$ kompletan $q-$normiran prostor.

Definisaćemo sada bijektivno preslikavanje iz prostora $B(\mathcal{L}_q)$ u prostor $\mathcal{L}_q$ koje očuvava normu. Posmatrajmo preslikavanje T korišćeno u drugom delu dokaza Teoreme 4 za prostore $B(\mathcal{L}_q)$ i $\mathcal{L}_q$ umesto prostora $B(\mathcal{M}_u)$ i $\mathcal{M}_u$, respektivno. Lako je pokazati da je T linearno i bijektivno preslikavanje. Neka su $y=(y_{mn})\in\mathcal{L}_q$ i $x=(x_{mn})$ nizovi definisani relacijom (3.2). Dalje, sumirajući po $m,n\in\mathbb{N}$ dobijamo

$$\begin{aligned}|\{B(r,s,t,u)x\}_{mn}|^q &= |sux_{m-1,n-1}+stx_{m-1,n}+rux_{m,n-1}+rtx_{mn}|^q\\ &= \left|\frac{su}{rt}\sum_{k,l=0}^{m-1,n-1}\left(\frac{-s}{r}\right)^{m-k-1}\left(\frac{-u}{t}\right)^{n-l-1}y_{kl}\right.\\ &+ \frac{st}{rt}\sum_{k,l=0}^{m-1,n}\left(\frac{-s}{r}\right)^{m-k-1}\left(\frac{-u}{t}\right)^{n-l}y_{kl}\\ &+ \frac{ru}{rt}\sum_{k,l=0}^{m,n-1}\left(\frac{-s}{r}\right)^{m-k}\left(\frac{-u}{t}\right)^{n-l}y_{kl}\\ &+ \left.\frac{rt}{rt}\sum_{k,l=0}^{m,n}\left(\frac{-s}{r}\right)^{m-k}\left(\frac{-u}{t}\right)^{n-l}y_{kl}\right|^q\\ &= |y_{mn}|^q\end{aligned}$$

da je $\widehat{\|B(r,s,t,u)x\|}_{B(\mathcal{L}_q)}=\widehat{\|y\|}_q$, odnosno, $x\in B(\mathcal{L}_q)$. Prema tome, T je surjektivno preslikavanje. Ovim je završen dokau dela (i).

Kako deo (ii) možemo dokazati na identičan način, detalje ćemo izostaviti.

□

3.4 Pojedine inkluzijske relacije pod strogim uslovima

Teorema 7. *Neka je $s=-r, t=-u$. Stroge inkluzije $\mathcal{C}_f \subset B(\mathcal{C}_f)$ i $\mathcal{C}_{f_0} \subset B(\mathcal{C}_{f_0})$ važe.*

Dokaz. Najpre, pokazaćemo da važe inkluzije $\mathcal{C}_f \subset B(\mathcal{C}_f)$ i $\mathcal{C}_{f_0} \subset B(\mathcal{C}_{f_0})$. Kako je $s=-r, t=-u$, četvorodimenzionalna matrica $B=(b_{mnkl})$ zadovoljava uslove Leme 30. Tada za svako $x \in \mathcal{C}_f$(**ili** $\mathcal{C}_{f_0}$), $Bx \in \mathcal{C}_f$(**ili** $\mathcal{C}_{f_0}$) kada god je $x \in B(\mathcal{C}_f)$(**ili** $B(\mathcal{C}_{f_0})$) veže inkluzije $\mathcal{C}_f \subset B(\mathcal{C}_f)$ i $\mathcal{C}_{f_0} \subset B(\mathcal{C}_{f_0})$.

Da bismo pokazali da inkluzije strogo važe, treba pokazati da skupovi $B(\mathcal{C}_f)\setminus\mathcal{C}_f$ i $B(\mathcal{C}_{f_0})\setminus\mathcal{C}_{f_0}$nisu prazni, odnosno, da postoji dvostruki niz $x=(x_{mn})$ koji pripada skupu $B(\mathcal{C}_f)$ ali ne i skupu $\mathcal{C}_f$. Neka je $x=(x_{mn})$ dvostruki niz odredjen sa $x_{mn}=\frac{mn}{rt}$ za svako $m,n \in \mathbb{N}$. Kako niz nije ograničen, očigledno $x \notin \mathcal{C}_f$. Ali kako je $s=-r, t=-u$, onda dobijamo $B-$transformaciju od x datu sa

$$\begin{aligned}
(Bx)_{mn} = \{B(r,-r,t,-t)x\}_{mn} &= rtx_{m-1,n-1} - rtx_{m-1,n} - rtx_{m,n-1} + rtx_{mn} \\
&= rt\frac{(m-1)(n-1)}{rt} - rt\frac{(m-1)n}{rt} \\
&- rt\frac{m(n-1)}{rt} + rt\frac{mn}{rt} \\
&= 1
\end{aligned}$$

Dakle, imamo sledeću jednakost sa prethodno navedenim rezultatom

$$\frac{1}{(q+1)(q'+1)}\left|\sum_{k=m}^{m+q}\sum_{l=n}^{n+q'}(Bx)_{kl}\right| = 1$$

Nakon uzimanja supremuma po $m,n \in \mathbb{N}$ u prethodnoj jednakosti i primene $p-$granice kada $q,q' \to \infty$ vidimo da je $Bx \in \mathcal{C}_f$. Lako se može pokazati da niz $x_{mn}=\frac{m}{rt}$ za svako $m,n \in \mathbb{N}$ pripada skupu $B(\mathcal{C}_{f_0})\setminus\mathcal{C}_{f_0}$ na identičan način prethodnom. Zbog toga, izostavićemo detalje. □

Teorema 8. *Važi stroga inkluzija $\mathcal{M}_u \subset B(\mathcal{M}_u)$.*

Dokaz. Najpre, pokazaćemo da inkluzija $\mathcal{M}_u \subset B(\mathcal{M}_u)$ važi. Neka je $x=(x_{mn}) \in \mathcal{M}_u$, dvostruki niz tako da postoji realan pozitivan broj K tako da $\sup_{m,n\in\mathbb{N}}|x_{mn}| \leq K$. Dakle, lako se može uočiti da važi

$$\begin{aligned}
\sup_{m,n\in\mathbb{N}}|\{B(r,s,t,u)x\}_{mn}| &= \sup_{m,n\in\mathbb{N}}|sux_{m-1,n-1}+stx_{m-1,n}+rux_{m,n-1}+rtx_{mn}| \\
&\leq (|su|+|st|+|ru|+|rt|)K < \infty.
\end{aligned}$$

Ovo znači da je dvostrki niz $x=(x_{mn}) \in B(\mathcal{M}_u)$, odnosno, da važi inkluzija $\mathcal{M}_u \subset B(\mathcal{M}_u)$.

Pokazaćemo sada da je inkluzija stroga. Odnosno, da skup $B(\mathcal{M}_u)\setminus\mathcal{M}_u$ nije prazan. Neka je $x=(x_{mn})$ dvostruki niz odredjen sa $x_{mn}=(-1)^{m+n}(m+1)(n+1)$

za svako $m,n \in \mathbb{N}$. Očigledno je da x ne pripada skupu $\mathcal{M}_u$. Ako uzmemo da je $r = t = s = u$, onda dobijamo $\{B(r,s,t,u)\}-$transformaciju od x datu sa

$$\begin{aligned} \{B(r,r,r,r)x\}_{mn} &= r^2\left[(-1)^{m+n-2}mn + (-1)^{m+n-1}m(n+1)\right.\\ &+ \left.(-1)^{m+n-1}(m+1)n + (-1)^{m+n}(m+1)(n+1)\right]\\ &= (-1)^{m+n}r^2 \end{aligned}$$

što daje činjenicu $B(r,r,r,r)x \in \mathcal{M}_u$. Ovim je dokaz završen. □

Teorema 9. *Stroga inkluzija $\mathcal{C}_p \subset B(\mathcal{C}_p)$ važi.*

Dokaz. Pokazaćemo najpre da inkluzija $\mathcal{C}_p \subset B(\mathcal{C}_p)$ važi. Neka je dat niz $x = (x_{mn}) \in \mathcal{C}_p$. Onda, postoji kompleksan broj l tako da $p - \lim_{m,n\to\infty} |x_{mn} - l| = 0$. Uzimajući graničnu tačku $B(r,s,t,u)-$transformacije od x kada $m,n \to \infty$ u Pringsheimovom smislu imamo

$$\begin{aligned} p - \lim_{m,n\to\infty}\{B(r,s,t,u)x\}_{mn} &= p - \lim_{m,n\to\infty}(sux_{m-1,n-1} + stx_{m-1,n}\\ &+ rux_{m,n-1} + rtx_{mn})\\ &= su\left(p - \lim_{m,n\to\infty} x_{m-1,n-1}\right)\\ &+ st\left(p - \lim_{m,n\to\infty} x_{m-1,n}\right)\\ &+ ru\left(p - \lim_{m,n\to\infty} x_{m,n-1}\right)\\ &+ rt\left(p - \lim_{m,n\to\infty} x_{mn}\right). \end{aligned}$$

Kako je $x \in \mathcal{C}_p$, onda su svi podnizovi niza x takodje konvergentni. Prema tome, $B(r,s,t,u)x \in C_p$, to jest, $x \in B(\mathcal{C}_p)$.

Da bismo pokazali da inkuzija $\mathcal{C}_p \subset B(\mathcal{C}_p)$ strogo važi,pokazaćemo da skup $B(\mathcal{C}_p)\backslash\mathcal{C}_p$ nije prazan. Neka je $x = (x_{mn})$ dvostruki niz definisan sa $x_{mn} = (mn)/(rt)$ za svako $m,n \in \mathbb{N}$. Ako uzmemo da je $s = -r, u = -t$, onda imamo

$$\begin{aligned} \{B(r,-r,t,-t)x\}_{mn} &= rtx_{m-1,n-1} - rtx_{m-1,n} - rtx_{m,n-1} + rtx_{mn}\\ &= rt\frac{(m-1)(n-1)}{rt} - rt\frac{(m-1)n}{rt} - rt\frac{m(n-1)}{rt} + rt\frac{mn}{rt}\\ &= 1 \end{aligned}$$

za svako $m,n \in \mathbb{N}$. Prema tome, lako se može zapaziti da $x = (x_{mn}) \notin \mathcal{C}_p$. Ali, $p - \lim_{m,n\to\infty}\{B(r,s,t,u)x\}_{mn} = 1$, te je, $x \in B(\mathcal{C}_p)$. Ovim korakom je dokaz kompletiran. □

Teorema 10. *Važi stroga inkluzija $\mathcal{C}_{bp} \subset B(\mathcal{C}_{bp})$.*

Dokaz. Ovo je prirodna posledica Teorema 8 i 9. Zbog toga, izostavićemo dokaz ove teoreme. □

Teorema 11. *Stroga inkluzija $\mathcal{L}_q \subset B(\mathcal{L}_q)$ važi, za $1 \leq q < \infty$.*

Dokaz. Neka ja $x = (x_{mn}) \in \mathcal{L}_q$ dvostruki niz i $1 \leq q < \infty$. Onda je, $\sum_{m,n} |x_{mn}|^q < \infty$. Sada imamo

$$\begin{aligned}
\left[\sum_{m,n} |\{B(r,s,t,u)x\}_{mn}|^q\right]^{1/q} &= \Bigg(\sum_{m,n} |sux_{m-1,n-1} + stx_{m-1,n} \\
&+ \ rux_{m,n-1} + rtx_{mn}|^q\Big)^{1/q} \\
&\leq |su| \left(\sum_{m,n} |x_{m-1,n-1}|^q\right)^{1/q} \\
&+ |st| \left(\sum_{m,n} |x_{m-1,n}|^q\right)^{1/q} \\
&+ |ru| \left(\sum_{m,n} |x_{m,n-1}|^q\right)^{1/q} \\
&+ |rt| \left(\sum_{m,n} |x_{mn}|^q\right)^{1/q} < \infty
\end{aligned}$$

odakle sledi da je $B(r,s,t,u)x \in \mathcal{L}_q$, odnosno, $x \in B(\mathcal{L}_q)$.

Dokazaćemo sada da je inkluzija stroga, definisaćemo niz koji pripada skpu $B(\mathcal{L}_q)$ ali ne i skupu $\mathcal{L}_q$. Neka je niz $x = (x_{mn})$ definisan sa

$$x_{mn} = \left(\frac{-s}{r}\right)^m \left(\frac{-u}{t}\right)^n \frac{1}{rt}$$

za svako $m, n \in \mathbb{N}$. Ako je $\left(\frac{-s}{r}\right) > 1$ ili $\left(\frac{-u}{t}\right) > 1$, ili oba, onda očigledno $x \notin \mathcal{L}_q$. Ali pod istim ograničenjima imamo

$$\begin{aligned}
\sum_{m,n} |\{B(r,s,t,u)x\}_{mn}|^q &= \sum_{m,n} \Bigg| su \left(\frac{-s}{r}\right)^{m-1} \left(\frac{-u}{t}\right)^{n-1} \frac{1}{rt} \\
&+ \ st \left(\frac{-s}{r}\right)^{m-1} \left(\frac{-u}{t}\right)^{n} \frac{1}{rt} \\
&+ \ ru \left(\frac{-s}{r}\right)^{m} \left(\frac{-u}{t}\right)^{n-1} \frac{1}{rt} \\
&+ \ rt \left(\frac{-s}{r}\right)^{m} \left(\frac{-u}{t}\right)^{n} \frac{1}{rt} \Bigg|^q = 0.
\end{aligned}$$

Sledi da je $B(r,s,t,u)x \in \mathcal{L}_q$, odnosno, $x \in B(\mathcal{L}_q)$. Ovim je teorema dokazana. □

Teorema 12. *Neka je $1 \leq q < q_1 < \infty$. Tada inkluzija $B(\mathcal{L}_q) \subset B(\mathcal{L}_{q_1})$ važi.*

Dokaz. Neka je dvostruki niz $x = (x_{mn}) \in B(\mathcal{L}_q)$ što implicira $Bx \in \mathcal{L}_q$. Kako su Başara i Severa [Basar and Sever(2009)] pokazali da inkluzija $\mathcal{L}_q \subset \mathcal{L}_{q_1}$ važi za $1 \leq q < q_1 < \infty$, onda je $Bx \in \mathcal{L}_{q_1}$. Dakle, $x \in B(\mathcal{L}_{q_1})$, što je i trebalo pokazati. □

Glava 4

α, $\beta(\vartheta)$ i $\gamma-$duali prostora dvostrukih nizova

U ovoj glavi predstavili smo $\alpha-$dual prostora $B(\mathcal{M}_u)$, $B(\mathcal{C}_{bp})$ i $B(\mathcal{C}_f)$ dali neke osnovne leme i teoreme potrebne za odredjivanje $\beta(\vartheta)-$duala prostora $B(\mathcal{M}_u)$, $B(\mathcal{C}_p)$, $B(\mathcal{C}_{bp})$, $B(\mathcal{C}_r)$, $B(\mathcal{L}_q)$ i $B(\mathcal{C}_f)$. Nakon toga, definisan je $\gamma-$dual prostora $B(\mathcal{M}_u)$, $B(\mathcal{C}_{bp})$, $B(\mathcal{L}_q)$ i $B(\mathcal{C}_f)$. Na kraju, klasa četvordimenzionalnih matrica $(\mathcal{C}_f : \mathcal{M}_u)$ je karakterizovana za odredjivanje $\gamma-$duala prostora $B(\mathcal{C}_f)$.

4.1 α -duali pojedinih novih prostora dvostrukih nizova

Teorema 13. *α -dual prostora $B(\mathcal{M}_u)$ i $B(\mathcal{C}_{bp})$ je prostor $\mathcal{L}_u$.*

Dokaz. Da bi se dokazala jednakost $\{B(\mathcal{M}_u)\}^\alpha = \mathcal{L}_u$, treba pokazati da inkluzije $\mathcal{L}_u \subset \{B(\mathcal{M}_u)\}^\alpha$ i $\{B(\mathcal{M}_u)\}^\alpha \subset \mathcal{L}_u$ važe. Neka su dati nizovi $a = (a_{mn}) \in \mathcal{L}_u$ i $x = (x_{mn}) \in B(\mathcal{M}_u)$. Tada, postoji dvostruki niz $y = (y_{mn}) \in \mathcal{M}_u$ definisan relacijom (3.1) pri čemu postoji pozitivan realan broj $M > 0$ tako da $\sup_{m,n\in\mathbb{N}} |y_{mn}| \leq M$. Ako je $|s/r|, |u/t| < 1$, onda važi sledeća nejednakost

$$\begin{aligned}
\sum_{m,n} |a_{mn}x_{mn}| &= \sum_{m,n} |a_{mn}| \left| \sum_{k,l=0}^{m,n} \left(\frac{-s}{r}\right)^{m-k} \left(\frac{-u}{t}\right)^{n-l} \frac{y_{kl}}{rt} \right| \\
&\leq \frac{1}{|rt|} \sum_{m,n} |a_{mn}| \sum_{k,l=0}^{m,n} \left| \left(\frac{-s}{r}\right)^{m-k} \left(\frac{-u}{t}\right)^{n-l} \right| |y_{kl}| \\
&\leq \frac{M}{|rt|} \sum_{m,n} |a_{mn}| \sum_{k,l=0}^{m,n} \left|\frac{-s}{r}\right|^{m-k} \left|\frac{-u}{t}\right|^{n-l} \\
&= \frac{M}{|rt|} \sum_{m,n} |a_{mn}| \left(\frac{1 - \left|\frac{s}{r}\right|^{m-k}}{1 - \left|\frac{s}{r}\right|} \right) \left(\frac{1 - \left|\frac{u}{t}\right|^{n-l}}{1 - \left|\frac{u}{t}\right|} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{M}{|rt|}\left(\frac{1}{1-\left|\frac{s}{r}\right|}\right)\left(\frac{1}{1-\left|\frac{u}{t}\right|}\right)\sum_{m,n}|a_{mn}|\left(1-\left|\frac{s}{r}\right|^{m+1}\right)\left(1-\left|\frac{u}{t}\right|^{n+1}\right)\\
&= \frac{M}{|rt|}\left(\frac{1}{1-\left|\frac{s}{r}\right|}\right)\left(\frac{1}{1-\left|\frac{u}{t}\right|}\right)\sum_{m,n}|a_{mn}|\\
&< \infty
\end{aligned}$$

što znači da je $a = (a_{mn}) \in \{B(\mathcal{M}_u)\}^{\alpha}$. Dakle, inkluzija $\mathcal{L}_u \subset \{B(\mathcal{M}_u)\}^{\alpha}$ važi.

Pretpostavimo suportodno da je $(a_{mn}) \in \{B(\mathcal{M}_u)\}^{\alpha} \setminus \mathcal{L}_u$. Onda imamo

$$\sum_{m,n}|a_{mn}x_{mn}| < \infty$$

za svako $x = (x_{mn}) \in B(\mathcal{M}_u)$. Lako možemo uočiti u specijalnom slučaju

$$x = (x_{mn}) = \{(-1)^{m+n}\} \in B(\mathcal{M}_u)$$

da je

$$\sum_{m,n}|a_{mn}x_{mn}| = \sum_{m,n}|a_{mn}| = \infty.$$

Ovo znači da $(a_{mn}) \notin \{B(\mathcal{M}_u)\}^{\alpha}$ što je u suprtonosti sa pretpostavkom. Prema tome, niz (a_{mn}) mora biti u prostoru $\in \mathcal{L}_u$.

Teorema se za niz $B(\mathcal{C}_{bp})$ dokazuje na isti način. $\square$

Teorema 14. *Neka je $|s/r|, |u/t| < 1$. $\alpha-$dual prostora $B(\mathcal{C}_f)$ je prostor $\mathcal{L}_u$.*

Dokaz. Da bi se dokazala jednkost $\{B(\mathcal{C}_f)\}^{\alpha} = \mathcal{L}_u$ neophodno je pokazati da inkluzije $\mathcal{L}_u \subset \{B(\mathcal{C}_f)\}^{\alpha}$ i $\{B(\mathcal{C}_f)\}^{\alpha} \subset \mathcal{L}_u$ važe. Dokažimo najpre prvu inkluziju, neka su dati nizovi $a = (a_{kl}) \in \mathcal{L}_u$ i $x = (x_{kl}) \in B(\mathcal{C}_f)$. Tada, postoji dvostruki niz $y = (y_{kl}) \in \mathcal{C}_f$ odredjen relacijom (3.1) tako da

$$p-\lim_{q,q'\to\infty}\sup_{m,n>0}\left|\frac{1}{(q+1)(q'+1)}\sum_{k=m}^{m+q}\sum_{l=n}^{n+q'}y_{kl}\right| \text{ exists.}$$

Pored toga, inkluzija $\mathcal{C}_f \subset \mathcal{M}_u$ važi, postoji i pozitivan realan broj K tako da

$\sup_{k,l}|y_{kl}| \leq K$. Kako je $|s/r|, |u/t| < 1$, imamo sledeću nejednakost

$$\begin{aligned}
\sum_{k,l}|a_{kl}x_{kl}| &= \sum_{k,l}|a_{kl}|\left|\sum_{i,j=0}^{k,l}\left(\frac{-s}{r}\right)^{k-i}\left(\frac{-u}{t}\right)^{l-j}\frac{y_{ij}}{rt}\right| \\
&\leq \frac{1}{|rt|}\sum_{k,l}|a_{kl}|\sum_{i,j=0}^{k,l}\left|\left(\frac{-s}{r}\right)^{k-i}\left(\frac{-u}{t}\right)^{l-j}\right||y_{ij}| \\
&\leq \frac{K}{|rt|}\sum_{k,l}|a_{kl}|\sum_{i,j=0}^{k,l}\left|\frac{-s}{r}\right|^{k-i}\left|\frac{-u}{t}\right|^{l-j} \\
&= \frac{K}{|rt|}\sum_{k,l}|a_{kl}|\left(\frac{1-\left|\frac{s}{r}\right|^{k+1}}{1-\left|\frac{s}{r}\right|}\right)\left(\frac{1-\left|\frac{u}{t}\right|^{l+1}}{1-\left|\frac{u}{t}\right|}\right) \\
&= \frac{K}{|rt|}\left(\frac{1}{1-\left|\frac{s}{r}\right|}\right)\left(\frac{1}{1-\left|\frac{u}{t}\right|}\right)\sum_{k,l}|a_{kl}|\left(1-\left|\frac{s}{r}\right|^{k+1}\right)\left(1-\left|\frac{u}{t}\right|^{l+1}\right) \\
&\leq \frac{K}{|rt|}\left(\frac{1}{1-\left|\frac{s}{r}\right|}\right)\left(\frac{1}{1-\left|\frac{u}{t}\right|}\right)\sum_{k,l}|a_{kl}| \\
&< \infty
\end{aligned}$$

što znači da je $a = (a_{kl}) \in \{B(\mathcal{C}_f)\}^{\alpha}$. Dakle, inkluzija $\mathcal{L}_u \subset \{B(\mathcal{C}_f)\}^{\alpha}$ važi.

Pretpostavimo suprotno, da je $(a_{kl}) \in \{B(\mathcal{C}_f)\}^{\alpha}\backslash\mathcal{L}_u$. Onda, imamo $\sum_{k,l}|a_{kl}x_{kl}| < \infty$ za svako $x = (x_{kl}) \in B(\mathcal{C}_f)$. Kada definišemo dvostruki niz $x = (x_{kl})$ u specijalnom slučaju sa $x = (x_{kl}) = \{(-1)^{k+l}/(rt)\}$ za $r = \alpha s$, $t = \alpha u$ i $\alpha \in \mathbb{R} - [-1, 1]$, trivijalno je uočiti da je $x = (x_{kl}) = \{(-1)^{k+l}/(rt)\} \in B(\mathcal{C}_f)$ ali

$$\sum_{k,l}|a_{kl}x_{kl}| = \frac{1}{|rt|}\sum_{k,l}|a_{kl}| = \infty.$$

Ovo znači da $(a_{kl}) \notin \{B(\mathcal{C}_f)\}^{\alpha}$ što je kontradikcija. Dakle, niz (a_{kl}) mora pripadati prostoru $\mathcal{L}_u$. Odnosno, inkluzija $\{B(\mathcal{C}_f)\}^{\alpha} \subset \mathcal{L}_u$ važi. Ovime je dokaz završen. $\square$

4.2 Osnovne leme i teoreme

U ovom poglavlju, definisali smo leme i teoreme koje su nam potrebne.

Lema 15. *Četvorodimenzionalna matrica $A = (a_{mnkl}) \in (\mathcal{C}_{bp} : \mathcal{C}_\vartheta)$ ako i samo ako važe sledeći uslovi*

$$\sup_{m,n\in\mathbb{N}} \sum_{k,l} |a_{mnkl}| < \infty \tag{4.1}$$

$$\exists a_{kl} \in \mathbb{C} \ni \vartheta - \lim_{m,n\to\infty} a_{mnkl} = a_{kl} \text{ za svako } k,l \in \mathbb{N} \tag{4.2}$$

$$\exists l \in \mathbb{C} \ni \vartheta - \lim_{m,n\to\infty} \sum_{k,l} a_{mnkl} = l \text{ postoji} \tag{4.3}$$

$$\exists k_0 \in \mathbb{N} \ni \vartheta - \lim_{m,n\to\infty} \sum_{l} |a_{mnk_0l} - a_{k_0l}| = 0 \tag{4.4}$$

$$\exists l_0 \in \mathbb{N} \ni \vartheta - \lim_{m,n\to\infty} \sum_{k} |a_{mnkl_0} - a_{kl_0}| = 0 \tag{4.5}$$

U slučaju (4.5), $a = (a_{kl}) \in \mathcal{L}_u$ i

$$\vartheta - \lim_{m,n\to\infty} [Ax]_{m,n} = \sum_{k,l} a_{kl}x_{kl} + \left(l - \sum_{k,l} a_{kl} \right) bp - \lim_{m,n\to\infty} x_{mn}$$

važi za $x \in \mathcal{C}_{bp}$

Lema 16. *Četvorodimenzionalna matrica $A = (a_{mnkl}) \in (\mathcal{C}_p : \mathcal{C}_\vartheta)$ ako i samo ako su ispunjeni uslovi (4.1)-(4.3) i takodje važe sledeći uslovi:*

$$\forall k \in \mathbb{N}, \exists l_0 \in \mathbb{N} \ni a_{mnkl} = 0 \text{ za svako } l > l_0 \text{ i } m,n \in \mathbb{N}, \tag{4.6}$$

$$\forall l \in \mathbb{N}, \exists k_0 \in \mathbb{N} \ni a_{mnkl} = 0 \text{ za svako } k > k_0 \text{ i } m,n \in \mathbb{N} \tag{4.7}$$

U slučaju (4.7) $\exists k_0, l_0 \in \mathbb{N}$ tako da $a = (a_{kl}) \in \mathcal{L}_u$ i $(a_{kl_0})_{k\in\mathbb{N}}, (a_{k_0l})_{l\in\mathbb{N}} \in \varphi$, gde φ predstavlja prostor svih konačnih nenula prostore nizova i

$$\vartheta - \lim_{m,n\to\infty} [Ax]_{m,n} = \sum_{k,l} a_{kl}x_{kl} + \sum_{k} \left(L - \sum_{k,l} a_{kl} \right) p - \lim_{m,n\to\infty} x_{mn}$$

važi za $x = (x_{kl}) \in \mathcal{C}_p$.

Lema 17. *Četvorodimenzionalna matrica $A = (a_{mnkl}) \in (\mathcal{C}_r : \mathcal{C}_\vartheta)$ ako i samo ako su ispunjeni (4.1)-(4.3) i takodje važe sledeći uslovi:*

$$\exists l_0 \in \mathbb{N} \ni \vartheta - \lim_{m,n\to\infty} \sum_{k} a_{mnkl_0} = u_{l_0} \tag{4.8}$$

$$\exists k_0 \in \mathbb{N} \ni \vartheta - \lim_{m,n\to\infty} \sum_{l} a_{mnk_0l} = v_{k_0} \tag{4.9}$$

U slučaju (4.9), $a = (a_{kl}) \in \mathcal{L}_u$ *i* $(u_l), (v_k) \in \ell_1$ *i*

$$\begin{aligned}\vartheta - \lim_{m,n\to\infty}[Ax]_{m,n} &= \sum_{k,l} a_{kl}x_{kl} + \sum_k \left(v_k - \sum_l a_{kl}\right) x_k + \sum_l \left(u_l - \sum_k a_{kl}\right) x_l \\ &+ \left(L + \sum_{k,l} a_{kl} - \sum_k v_k - \sum_l u_l\right) r - \lim_{m,n\to\infty} x_{mn}\end{aligned}$$

važi za $x \in \mathcal{C}_r$.

Teorema 18. *Četvorodimenzionalna matrica* $A = (a_{mnkl}) \in (\mathcal{C}_{bp} : \mathcal{M}_u)$ *ako i samo ako uslov (4.1) važi .*

Dokaz. Neka je četvorodimenzionalna matrica $A = (a_{mnkl}) \in (\mathcal{C}_{bp} : \mathcal{M}_u)$. Onda postoji Ax u skupu $\mathcal{M}_u$ za svaki niz $x = (x_{kl}) \in \mathcal{C}_{bp}$. Odnosno, $A_{mn} \in \mathcal{M}_u$ za svako $m, n \in \mathbb{N}$. Dakle,

$$\begin{aligned}||Ax||_\infty &= \sup_{m,n\in\mathbb{N}} \left|\sum_{k,l} a_{mnkl}x_{kl}\right| \\ &\leq \sup_{m,n\in\mathbb{N}} \sum_{k,l} |a_{mnkl}||x_{kl}| < \infty\end{aligned}$$

Onda je uslov (4.1) dovoljan.

Obrnuto, pretpostavimo da je uslov (4.1) zadovoljen za svaki $x = (x_{kl}) \in \mathcal{C}_{bp}$. Onda

$$\left|\sum_{k,l} a_{mnkl}x_{kl}\right| \leq \sum_{k,l} |a_{mnkl}||x_{kl}|$$

Uzimajući supremum po $m, n \in \mathbb{N}$ imamo

$$\sup_{m,n\in\mathbb{N}} \left|\sum_{k,l} a_{mnkl}x_{kl}\right| \leq \sup_{m,n\in\mathbb{N}} \sum_{k,l} |a_{mnkl}|M < \infty$$

Iz poslednjih nejednakosti sledi da je $Ax \in \mathcal{M}_u$. Ovim je teorema dokazana.

□

Lema 19. *[Yeşilkayagil and Başar(2018)] Neka je* $A = (a_{mnkl})$ *četvorodimenzionalna matrica. Tada, važe sledeći iskazi:*

(i) Za $0 < q \leq 1$, $A \in (\mathcal{L}_q : \mathcal{M}_u)$ *ako i samo ako*

$$\sup_{m,n,k,l\in\mathbb{N}} |a_{mnkl}| < \infty. \tag{4.10}$$

(ii) Za $1 < q < \infty$, $A \in (\mathcal{L}_q : \mathcal{M}_u)$ *ako i samo ako*

$$\sup_{m,n\in\mathbb{N}} \sum_{k,l} |a_{mnkl}|^{q'} < \infty, \ \text{gde je } \frac{1}{q} + \frac{1}{q'} = 1. \tag{4.11}$$

Lema 20. *[Yeşilkayagil and Başar(2018)] Neka je $A = (a_{mnkl})$ četvorodimenzionalna matrica. Tada, važe sledeći iskazi:*

(i) Za $0 < q \leq 1$, $A \in (\mathcal{L}_q : \mathcal{C}_{bp})$ ako i samo ako uslovi (4.2) i (4.10) važe za $\vartheta = bp$.

(ii) Za $1 < q < \infty$, $A \in (\mathcal{L}_q : \mathcal{C}_{bp})$ ako i samo ako uslovi (4.2) i (4.11) važe za $\vartheta = bp$.

Lema 21. *[Cakan et al.(2006)Cakan, Altay, and Mursaleen] Četvorodimenzionalna matrica $A = (a_{mnkl}) \in (\mathcal{M}_u : \mathcal{C}_{bp})$ ako i samo ako su zadovoljeni uslovi (4.1)-(4.2) i pored toga važe sledeći uslovi:*

$$\exists a_{kl} \in \mathbb{C} \ni bp - \lim_{m,n\to\infty} \sum_{k,l} |a_{mnkl} - a_{kl}| = 0 \tag{4.12}$$

$$bp - \lim_{m,n\to\infty} \sum_{l=0}^{n} a_{mnkl} \text{ postoji za svako } k \in \mathbb{N} \tag{4.13}$$

$$bp - \lim_{m,n\to\infty} \sum_{k=0}^{m} a_{mnkl} \text{ postoji za svako } l \in \mathbb{N} \tag{4.14}$$

$$\sum_{k,l} |a_{mnkl}| \text{ konvergira.} \tag{4.15}$$

Lema 22. *[Yeşilkayagil and Başar(2016)] Četvorodimenzionalna matrica $A = (a_{mnkl}) \in (\mathcal{M}_u : \mathcal{M}_u)$ ako i samo ako je uslov (4.1) zadovoljen.*

Lema 23. *[Yeşilkayagil and Başar(2016a)] Četvorodimenzionalna matrica $A = (a_{mnkl}) \in (\mathcal{M}_u : \mathcal{C}_p)$ ako i samo ako uslovi (4.2), (4.6) i (4.7) važe.*

Lema 24. *[Zeltser et al.(2009)Zeltser, Mursaleen, and Mohiuddine] Sledeći iskazi važe:*

(a) četvorodimenzionalna matrica $A = (a_{mnkl})$ je skoro $\mathcal{C}_{bp}-$konzervativna, to jest,

$A \in (\mathcal{C}_{bp} : \mathcal{C}_f)$ *ako i samo ako sledeıci uslovi važe*

$$\sup_{m,n\in\mathbb{N}} \sum_{k,l} |a_{mnkl}| < \infty \tag{4.16}$$

$$\exists a_{ij} \in \mathbb{C} \ni bp - \lim_{q,q'\to\infty} a(i,j,q,q',m,n) = a_{ij},$$
$$\text{uniformno u } m,n \in \mathbb{N} \text{ za svako } i,j \in \mathbb{N} \tag{4.17}$$

$$\exists u \in \mathbb{C} \ni bp - \lim_{q,q'\to\infty} \sum_{i,j} a(i,j,q,q',m,n) = u,$$
$$\text{uniformno u } m,n \in \mathbb{N} \tag{4.18}$$

$$\exists a_{ij} \in \mathbb{C} \ni bp - \lim_{q,q'\to\infty} \sum_{i} |a(i,j,q,q',m,n) - a_{ij}| = 0,$$
$$\text{uniformno } m,n \in \mathbb{N} \text{ za svako } j \in \mathbb{N} \tag{4.19}$$

$$\exists a_{ij} \in \mathbb{C} \ni bp - \lim_{q,q'\to\infty} \sum_{j} |a(i,j,q,q',m,n) - a_{ij}| = 0,$$
$$\text{uniformno } m,n \in \mathbb{N} \text{ za svako } i \in \mathbb{N} \tag{4.20}$$

gde je $a(i,j,q,q',m,n) = \sum_{k=m}^{m+q} \sum_{l=n}^{n+q'} a_{klij}/[(q+1)(q'+1)]$. *U ovom slučaju,* $a = (a_{ij}) \in \mathcal{L}_u$ *i*

$$f_2 - \lim Ax = \sum_{i,j} a_{ij}x_{ij} + \left(u - \sum_{i,j} a_{ij}\right) bp - \lim_{i,j\to\infty} x_{ij},$$

odnosno,

$$bp - \lim_{q,q'\to\infty} \sum_{i,j} a(i,j,q,q',m,n)x_{ij} = \sum_{i,j} a_{ij}x_{ij} + \left(u - \sum_{i,j} a_{ij}\right) bp - \lim_{i,j\to\infty} x_{ij},$$
$$\text{uniformno u } m,n \in \mathbb{N}.$$

(b) *četvorodimenzionalna matrica* $A = (a_{mnkl})$ *je skoro* $\mathcal{C}_{bp}-$*regularna, to jest.,* $A \in (\mathcal{C}_{bp} : \mathcal{C}_f)_{reg}$ *ako i samo ako su zadovoljeni uslovi (4.16)-(4.20) za* $a_{ij} = 0$ *za svako* $i,j \in \mathbb{N}$ *i* $u = 1$

Lema 25. *[Zeltser et al.(2009)Zeltser, Mursaleen, and Mohiuddine] Sledeći iskazi važe:*

(a) *četvorodimenzionalna matrica* $A = (a_{mnkl})$ *je skoro* $\mathcal{C}_r-$*konzervativna, to jest,* $A \in (\mathcal{C}_r : \mathcal{C}_f)$ *ako i samo ako su sledeći uslovi (4.16)-(4.18) zadovoljeni i pored toga* *važe uslovi*

$$\exists j_0 \in \mathbb{N} \ni bp - \lim_{q,q'\to\infty} \sum_i a(i, j_0, q, q', m, n) = u_{j_0},$$
$$\textit{uniformno u } m, n \in \mathbb{N}, \tag{4.21}$$

$$\exists i_0 \in \mathbb{N} \ni bp - \lim_{q,q'\to\infty} \sum_j a(i_0, j, q, q', m, n) = v_{i_0},$$
$$\textit{uniformno u } m, n \in \mathbb{N}, \tag{4.22}$$

gde je $a(i, j, q, q', m, n)$ *definisano Lemom 24. U ovom slučaju,* $a = (a_{ij}) \in \mathcal{L}_u$*;* $(u_j), (v_i) \in \ell_1$ *i*

$$\begin{aligned} f_2 - \lim Ax &= \sum_{ij} a_{ij}x_{ij} + \sum_i \left(v_i - \sum_j a_{ij}\right) x_i + \sum_j \left(u_j - \sum_i a_{ij}\right) x_j \\ &+ \left(u + \sum_{i,j} a_{ij} - \sum_i v_i - \sum_j u_j\right) r - \lim_{i,j\to\infty} x_{ij}. \end{aligned}$$

(b) četvorodimenzionalna matrica $A = (a_{mnkl})$ *je skoro* $\mathcal{C}_r-$*regularna, to jest,* $A \in (\mathcal{C}_r : \mathcal{C}_f)_{reg}$ *ako i samo ako su zadovoljeni uslovi (4.16)-(4.22) i takodje je* $a_{ij} = u_j = v_i = 0$ *za svako* $i, j \in \mathbb{N}$ *i* $u = 1$.

Lema 26. *[Zeltser et al.(2009)Zeltser, Mursaleen, and Mohiuddine] Važe sledeći iskazi:*

(a) Četvorodimenzionalna matrica $A = (a_{mnkl})$ *je skoro* $\mathcal{C}_p-$*konzervativna, to jest,* $A \in (\mathcal{C}_p : \mathcal{C}_f)$ *ako i samo ako uslovi (4.16)-(4.18) važe. U ovom slučaju je* $a = (a_{ij}) \in \mathcal{L}_u, (a_{ij_0})_{i\in\mathbb{N}}, (a_{i_0j})_{j\in\mathbb{N}} \in \varphi$ *gde* φ *označava skup svih konačnih nenula prostore nizova i*

$$f_2 - \lim Ax = \sum_{i,j} a_{ij}x_{ij} + \left(u - \sum_{i,j} a_{ij}\right) p - \lim_{i,j\to\infty} x_{ij}.$$

(b) Četvorodimenzionalna matrica $A = (a_{mnkl})$ *je skoro* $\mathcal{C}_p-$*regularna, to jest,* $A \in (\mathcal{C}_r : \mathcal{C}_f)_{reg}$ *ako i samo ako su zadovljeni uslovi (4.16)-(4.18) i* $a_{ij} = 0$ *za svako* $i, j \in \mathbb{N}$ *i* $u = 1$.

Lema 27. *[Moricz and Rhoades(1988)] Važe sledeći iskazi:*

(a) Četvorodimenzionalna matrica $A = (a_{mnkl}) \in (\mathcal{C}_f : \mathcal{C}_{bp})$ *ako i samo ako važe*

uslovi (4.16) i takodje su zadovoljeni sledeći uslovi:

$$\exists a_{kl} \in \mathbb{C} \ni, bp - \lim_{m,n\to\infty} a_{mnkl} = a_{kl} \text{ za svako } k,l \in \mathbb{N}, \tag{4.23}$$

$$\exists u \in \mathbb{C} \ni, bp - \lim_{m,n\to\infty} \sum_{k,l} a_{mnkl} = u, \tag{4.24}$$

$$\exists k_0 \in \mathbb{N} \ni, bp - \lim_{m,n\to\infty} \sum_{l} |a_{mn,k_0,l} - a_{k_0,l}| = 0 \text{ za svako } l \in \mathbb{N}, \tag{4.25}$$

$$\exists l_0 \in \mathbb{N} \ni, bp - \lim_{m,n\to\infty} \sum_{k} |a_{mnk,l_0} - a_{k,l_0}| = 0 \text{ za svako } k \in \mathbb{N}, \tag{4.26}$$

$$bp - \lim_{m,n\to\infty} \sum_{k} \sum_{l} |\Delta_{01} a_{mnkl}| = 0, \tag{4.27}$$

$$bp - \lim_{m,n\to\infty} \sum_{k} \sum_{l} |\Delta_{10} a_{mnkl}| = 0. \tag{4.28}$$

(b) Četvorodimenzionalna matrica $A = (a_{mnkl})$ je strogo regularna, to jest, $A \in (\mathcal{C}_f : \mathcal{C}_{bp})_{reg}$ ako i samo ako važe uslovi (4.16) i (4.23)-(4.28) i $a_{kl} = 0$ za svako $k,l \in \mathbb{N}$ i $u = 1$.

gde je $\Delta_{10} a_{mnkl} = a_{mnkl} - a_{m,n,k+1,l}$ and $\Delta_{01} a_{mnkl} = a_{mnkl} - a_{m,n,k,l+1}$, $(m,n,k,l = 0,1,2,...)$.

Lema 28. *[Yeşilkayagil and Başar(2016a)] Četvorodimenzionalna matrica $A = (a_{mnkl}) \in (\mathcal{M}_u : \mathcal{C}_f)$ ako i samo ako uslov (4.16) i sledeći uslov važe*

$$\exists \beta_{kl} \in \mathbb{C} \ni f_2 - \lim_{m,n\to\infty} a_{mnkl} = \beta_{kl} \text{ za svako } k,l \in \mathbb{N}, \tag{4.29}$$

$$\text{Za svako } m,n,j \in \mathbb{N}, \exists K \in \mathbb{N} \ni \frac{1}{(q+1)(q'+1)} \sum_{k=m}^{m+q} \sum_{l=n}^{n+q'} a_{klij} = 0,$$
$$\text{za svako } q,q',i > K, \tag{4.30}$$

$$\text{Za svako } m,n,i \in \mathbb{N}, \exists L \in \mathbb{N} \ni \frac{1}{(q+1)(q'+1)} \sum_{k=m}^{m+q} \sum_{l=n}^{n+q'} a_{klij} = 0,$$
$$\text{za svako } q,q',j > L. \tag{4.31}$$

Lema 29. *[Mursaleen and Savaş(2003)] Četvorodimenzionalna matrica $A = (a_{mnkl})$ je skoro regularna, to jest, $A \in (\mathcal{C}_{bp} : \mathcal{C}_f)_{reg}$ ako i samo ako uslov (4.16) i sledeći* *uslov važe*

$$\lim_{q,q'\to\infty} a(i,j,q,q',m,n) = 0,$$
$$\text{uniformno po } m,n \in \mathbb{N} \text{ za svako } i,j \in \mathbb{N}, \tag{4.32}$$

$$\lim_{q,q'\to\infty} \sum_{i,j} a(i,j,q,q',m,n) = 1,$$
$$\text{uniformno pom}, n \in \mathbb{N}, \tag{4.33}$$

$$\lim_{q,q'\to\infty} \sum_{i} |a(i,j,q,q',m,n)| = 0,$$
$$\text{uniformno po } m,n \in \mathbb{N} \text{ za svako } j \in \mathbb{N}, \tag{4.34}$$

$$\lim_{q,q'\to\infty} \sum_{j} |a(i,j,q,q',m,n)| = 0,$$
$$\text{uniformno po } m,n \in \mathbb{N} \text{ za svako } i \in \mathbb{N}, \tag{4.35}$$

gde je $a(i,j,q,q',m,n)$ definisano Lemom 24.

Lema 30. *[Mursaleen(2004)] Četvorodimenzionalna matrica $A = (a_{mnkl})$ je skoro strogo regularna, to jest, $A \in (\mathcal{C}_f : \mathcal{C}_f)_{reg}$ ako i samo ako A je skoro regularna i važe sledeća dva uslova*

$$\lim_{q,q'\to\infty} \sum_{i}\sum_{j} |\Delta_{10} a(i,j,q,q',m,n)| = 0 \text{ uniformno za } m,n \in \mathbb{N}, \tag{4.36}$$
$$\lim_{q,q'\to\infty} \sum_{j}\sum_{i} |\Delta_{01} a(i,j,q,q',m,n)| = 0 \text{ uniformno za } m,n \in \mathbb{N}, \tag{4.37}$$

gde je

$$\Delta_{10} a(i,j,q,q',m,n) = a(i,j,q,q',m,n) - a(i+1,j,q,q',m,n),$$
$$\Delta_{01} a(i,j,q,q',m,n) = a(i,j,q,q',m,n) - a(i,j+1,q,q',m,n).$$

4.3 $\beta(\vartheta)$ i $\gamma-$duali pojedinih novih prostora dvostrukih nizova

α i γduali dvostrukih prostora nizova su jedinstveni. Ali može biti više $\beta(\vartheta)$duala u skladu sa $\vartheta-$konvergencijom. U ovom delu, bavimo se $\beta(\vartheta)$ i γdualima dvostrukih prostora nizova. Uslovi karakterizacije četvorodimenzionalnih matrica transformisali su prostore $\mathcal{C}_{bp}, \mathcal{C}_r$ i $\mathcal{C}_p$ u prostor $\mathcal{C}_{bp}$ kao što je pokazano. (vidi [Hamilton et al.(1936)], [Zeltser et al.(2009)Zeltser, Mursaleen, and Mohiuddine] i [Zeltser(2002)]).

Definišimo skup $d_k(r,s,t,u)$ za $k \in \{1,2,\dots,17\}$, na sledeći način:

$$d_1(r,s,t,u) = \left\{ a = (a_{kl}) \in \Omega : \sup_{m,n\in\mathbb{N}} \sum_{k,l} \left| \sum_{j,i=k,l}^{m,n} \left(\frac{-s}{r}\right)^{j-k} \left(\frac{-u}{t}\right)^{i-l} \frac{a_{ji}}{rt} \right|^{q'} < \infty \right\}$$

$$d_2(r,s,t,u) = \Bigg\{ a = (a_{kl}) \in \Omega :$$

$$\exists \beta_{kl} \in \mathbb{C} \ni \vartheta - \lim_{m,n\to\infty} \sum_{j,i=k,l}^{m,n} \left(\frac{-s}{r}\right)^{j-k} \left(\frac{-u}{t}\right)^{i-l} a_{ji} = \beta_{kl} \Bigg\}$$

$$d_3(r,s,t,u) = \Bigg\{ a = (a_{kl}) \in \Omega :$$

$$\exists l \in \mathbb{C} \ni \vartheta - \lim_{m,n\to\infty} \sum_{k,l} \sum_{j,i=k,l}^{m,n} \left(\frac{-s}{r}\right)^{j-k} \left(\frac{-u}{t}\right)^{i-l} \frac{a_{ji}}{rt} = l \ postoji \Bigg\}$$

$$d_4(r,s,t,u) = \Bigg\{ a = (a_{kl}) \in \Omega :$$

$$\exists l_0 \in \mathbb{N} \ni \vartheta - \lim_{m,n\to\infty} \sum_{k} \left| \sum_{j,i=k,l_0}^{m,n} \left(\frac{-s}{r}\right)^{j-k} \left(\frac{-u}{t}\right)^{i-l_0} a_{ji} - \beta_{kl_0} \right| = 0 \Bigg\}$$

$$d_5(r,s,t,u) = \Bigg\{ a = (a_{kl}) \in \Omega :$$

$$\exists k_0 \in \mathbb{N} \ni \vartheta - \lim_{m,n\to\infty} \sum_{l} \left| \sum_{j,i=k_0,l}^{m,n} \left(\frac{-s}{r}\right)^{j-k_0} \left(\frac{-u}{t}\right)^{i-l} a_{ji} - \beta_{k_0 l} \right| = 0 \Bigg\}$$

$$d_6(r,s,t,u) = \Bigg\{ a = (a_{kl}) \in \Omega :$$

$$\forall k \in \mathbb{N}, \exists l_0 \in \mathbb{N} \ni \sum_{j,i=k,l}^{m,n} \left(\frac{-s}{r}\right)^{j-k} \left(\frac{-u}{t}\right)^{i-l} \frac{a_{ji}}{rt} = 0 \ \forall l > l_0 \ i \ \forall m,n \in \mathbb{N} \Bigg\}$$

$$d_7(r,s,t,u) = \Bigg\{ a = (a_{kl}) \in \Omega :$$

$$\forall l \in \mathbb{N}, \exists k_0 \in \mathbb{N} \ni \sum_{j,i=k,l}^{m,n} \left(\frac{-s}{r}\right)^{j-k} \left(\frac{-u}{t}\right)^{i-l} \frac{a_{ji}}{rt} = 0 \ \forall k > k_0 \ i \ \forall m,n \in \mathbb{N} \Bigg\}$$

$$d_8(r,s,t,u) = \left\{ a = (a_{kl}) \in \Omega : \sup_{m,n\in\mathbb{N}} \left| \sum_{j,i=k,l}^{m,n} \left(\frac{-s}{r}\right)^{j-k} \left(\frac{-u}{t}\right)^{i-l} \frac{a_{ji}}{rt} \right|^{q'} < \infty \right\}$$

$$d_9(r,s,t,u)=\Big\{a=(a_{kl})\in\Omega:$$

$$\exists l_0\in\mathbb{N}\ni\vartheta-\lim_{m,n\to\infty}\sum_k\sum_{j,i=k,l_0}^{m,n}\left(\frac{-s}{r}\right)^{j-k}\left(\frac{-u}{t}\right)^{i-l_0}\frac{a_{ji}}{rt}=u_{l_0}\Big\}$$

$$d_{10}(r,s,t,u)=\Big\{a=(a_{kl})\in\Omega:$$

$$\exists k_0\in\mathbb{N}\ni\vartheta-\lim_{m,n\to\infty}\sum_l\sum_{j,i=k_0,l}^{m,n}\left(\frac{-s}{r}\right)^{j-k_0}\left(\frac{-u}{t}\right)^{i-l}\frac{a_{ji}}{rt}=v_{k_0}\Big\}$$

$$d_{11}(r,s,t,u)=\Big\{a=(a_{kl})\in\Omega:$$

$$\exists\beta_{kl}\in\mathbb{C}\ni\vartheta-\lim_{m,n\to\infty}\sum_{k,l}\left|\sum_{j,i=k,l}^{m,n}\left(\frac{-s}{r}\right)^{j-k}\left(\frac{-u}{t}\right)^{i-l}\frac{a_{ji}}{rt}-\beta_{kl}\right|=0.\Big\}$$

$$d_{12}(r,s,t,u)=\Big\{a=(a_{kl})\in\Omega:$$

$$\forall k\in\mathbb{N}\ni\vartheta-\lim_{m,n\to\infty}\sum_{l=0}^{n}\sum_{j,i=k,l_0}^{m,n}\left(\frac{-s}{r}\right)^{j-k}\left(\frac{-u}{t}\right)^{i-l_0}\frac{a_{ji}}{rt}\ \textit{postoji}\Big\}$$

$$d_{13}(r,s,t,u)=\Big\{a=(a_{kl})\in\Omega:$$

$$\forall l\in\mathbb{N}\ni\vartheta-\lim_{m,n\to\infty}\sum_{k=0}^{m}\sum_{j,i=k,l_0}^{m,n}\left(\frac{-s}{r}\right)^{j-k}\left(\frac{-u}{t}\right)^{i-l_0}\frac{a_{ji}}{rt}\ \textit{postoji}\Big\}$$

$$d_{14}(r,s,t,u)=\Big\{a=(a_{kl})\in\Omega:\sum_{k,l}\left|\sum_{j,i=k,l_0}^{m,n}\left(\frac{-s}{r}\right)^{j-k}\left(\frac{-u}{t}\right)^{i-l_0}\frac{a_{ji}}{rt}\right|\ \textit{konvergira}\Big\}$$

$$d_{15}(r,s,t,u)=\Big\{a=(a_{kl})\in\Omega:\sup_{m,n\in\mathbb{N}}\sum_{k,l}\left|\sum_{j,i=k,l}^{m,n}\left(\frac{-s}{r}\right)^{j-k}\left(\frac{-u}{t}\right)^{i-l}\frac{a_{ji}}{rt}\right|<\infty\Big\},$$

$$d_{16}(r,s,t,u)=\Big\{a=(a_{kl})\in\Omega:$$

$$\vartheta-\lim_{m,n\to\infty}\sum_k\sum_l\left|\Delta_{01}\left\{\sum_{j,i=k,l}^{m,n}\left(\frac{-s}{r}\right)^{j-k}\left(\frac{-u}{t}\right)^{i-l}\frac{a_{ji}}{rt}\right\}\right|=0\Big\},$$

$$d_{17}(r,s,t,u)=\Big\{a=(a_{kl})\in\Omega:$$

$$\vartheta-\lim_{m,n\to\infty}\sum_k\sum_l\left|\Delta_{10}\left\{\sum_{j,i=k,l}^{m,n}\left(\frac{-s}{r}\right)^{j-k}\left(\frac{-u}{t}\right)^{i-l}\frac{a_{ji}}{rt}\right\}\right|=0\Big\}.$$

Teorema 31. *Važe sledeći iskazi:*

(i) $\{B(\mathcal{M}_u)\}^\gamma = d_1(r,s,t,u)$ *sa* $q' = 1$

(ii) $\{B(\mathcal{L}_q)\}^\gamma = \begin{cases} d_1(r,s,t,u) &, \ 1 \le q < \infty; \\ d_8(r,s,t,u) &, \ 0 < q < 1. \end{cases}$

(iii) $\{B(\mathcal{C}_{bp})\}^\gamma = d_1(r,s,t,u)$ *za* $q' = 1$.

Dokaz. (iii) Neka je $a = (a_{mn}) \in \Omega$ i $x = (x_{mn}) \in B(\mathcal{C}_{bp})$. Onda, imamo $y = Bx \in \mathcal{C}_{bp}$. Dakle, za m,n-tu parcijalnu sumu $\sum_{k,l} a_{kl}x_{kl}$ imamo sledeću jednakost

$$\begin{aligned} \sum_{k,l=0}^{m,n} a_{kl}x_{kl} &= \sum_{k,l=0}^{m,n} a_{kl} \sum_{j,i=0}^{m,n} \left(\frac{-s}{r}\right)^{k-j} \left(\frac{-u}{t}\right)^{l-i} \frac{y_{ji}}{rt} \\ &= \sum_{k,l=0}^{m,n} \sum_{j,i=k,l}^{m,n} \left(\frac{-s}{r}\right)^{j-k} \left(\frac{-u}{t}\right)^{i-l} \frac{a_{ji}}{rt} y_{kl} \\ &= (Dy)_{mn}, \end{aligned} \tag{4.38}$$

gde je četvorodimenzinalna matrica $D = (d_{mnkl})$ definisana

$$d_{mnkl} = \begin{cases} \sum_{j,i=k,l}^{m,n} \left(\frac{-s}{r}\right)^{j-k} \left(\frac{-u}{t}\right)^{i-l} \frac{a_{ji}}{rt} &, \ 0 \le k \le m, 0 \le l \le n; \\ 0 &, \ \text{inače} \end{cases}$$

za svako $k, k, m, n \in \mathbb{N}$. Onda je $ax \in \mathcal{BS}$ uvek kada je $x = (x_{mn}) \in B(\mathcal{C}_{bp})$ ako i samo ako je $Dy \in \mathcal{M}_u$ uvek kada je $y = (y_{mn}) \in \mathcal{C}_{bp}$. Ovo znači da je $a = (a_{mn}) \in \{B(\mathcal{C}_{bp})\}^\gamma$ ako i samo ako $D \in (\mathcal{C}_{bp} : \mathcal{M}_u)$. Prema tome, lako možemo uočiti da uslov Teoreme 18 važi, odnosno

$$\sup_{m,n\in\mathbb{N}} \sum_{k,l} \left| \sum_{j,i=k,l}^{m,n} \left(\frac{-s}{r}\right)^{j-k} \left(\frac{-u}{t}\right)^{i-l} \frac{a_{ji}}{rt} \right| < \infty$$

što je skup $d_1(r,s,t,u)$ za $q' = 1$. Ovim smo dokazali iskaz (iii).

Dokazi dela (i) i (ii) mogu se izvesti na identičan način korišćenjem Lema 22 i 19, u datom poretku, umesto Leme 18. □

Teorema 32. *Sledeći iskazi važe:*

(i) $\{B(\mathcal{C}_{bp}\}^{\beta(\vartheta)} = \bigcap_{i=1}^{5} d_i(r,s,t,u)$ *za* $q' = 1$.

(ii) $\{B(\mathcal{C}_p\}^{\beta(\vartheta)} = \bigcap_{i=1}^{3} d_i(r,s,t,u) \cap d_6(r,s,t,u) \cap d_7(r,s,t,u)$ *za* $q' = 1$.

(iii) $\{B(\mathcal{C}_r\}^{\beta(\vartheta)} = \bigcap_{i=1}^{3} d_i(r,s,t,u) \cap d_9(r,s,t,u) \cap d_{10}(r,s,t,u)$ *za* $q' = 1$.

(iv) $\{B(\mathcal{L}_q\}^{\beta(bp)} = d_1(r,s,t,u) \cap d_2(r,s,t,u)$ *za* $1 < q < \infty$.

(v) $\{B(\mathcal{L}_q\}^{\beta(bp)} = d_2(r,s,t,u) \cap d_8(r,s,t,u)$ *za* $q' = 1$ *za* $0 < q \le 1$.

(vi) $\{B(\mathcal{M}_u\}^{\beta(bp)} = d_1(r,s,t,u) \cap d_2(r,s,t,u) \bigcap_{i=11}^{14} d_i(r,s,t,u)$.

(vii) $\{B(\mathcal{M}_u\}^{\beta(p)} = d_2(r,s,t,u) \cap d_6(r,s,t,u) \cap d_7(r,s,t,u)$.

Dokaz. Pretpostavimo da je $a = (a_{mn}) \in \Omega$ i $x = (x_{mn}) \in B(\mathcal{C}_{bp})$. Onda, postoji niz $y = (y_{mn}) \in \mathcal{C}_{bp}$ sa $Bx = y$. Dakle, kako (4.38) važi, može se zaključiti da je $ax \in \mathcal{CS}_\vartheta$ uvek kada je $x = (x_{mn}) \in B(\mathcal{C}_{bp})$ ako i samo ako $Dy \in \mathcal{C}_\vartheta$ uvek kada je $y = (y_{mn}) \in \mathcal{C}_{bp}$. Odavde sleda da je $a = (a_{mn}) \in \{B(\mathcal{C}_{bp})\}^{\beta(\vartheta)}$ ako i samo ako $D \in (\mathcal{C}_{bp} : \mathcal{C}_\vartheta)$. Dakle, uslovi Leme 15 su zadovoljeni za d_{mnkl} umesto a_{mnkl}. Dakle važi,

$$
\begin{aligned}
&\sup_{m,n\in\mathbb{N}} \sum_{k,l} |d_{mnkl}| < \infty, \\
&\exists \beta_{kl} \in \mathbb{C} \ni \vartheta - \lim_{m,n\to\infty} d_{mnkl} = \beta_{kl} \textit{ for all } k,l \in \mathbb{N}, \\
&\exists l \in \mathbb{C} \ni \vartheta - \lim_{m,n\to\infty} \sum_{k,l} d_{mnkl} = l \textit{ exists}, \\
&\exists k_0 \in \mathbb{N} \ni \vartheta - \lim_{m,n\to\infty} \sum_{l} |d_{mnk_0l} - \beta_{k_0l}| = 0 \\
&\exists l_0 \in \mathbb{N} \ni \vartheta - \lim_{m,n\to\infty} \sum_{k} |d_{mnkl_0} - \beta_{kl_0}| = 0
\end{aligned}
$$

što na daje da je $\beta(\vartheta)$-dual prostora $B(\mathcal{C}_{bp})$ skup $\bigcap_{i=1}^{5} d_i(r,s,t,u)$. Ovim je kompletiran dokaz dela (i). Kako se iskazi (ii)-(vii) mogu dokazati na identičan način pomoću Lema 16, 17, 20, 21 i 23, respektivno, da bismo izblegli pojavljivanje sličnih dokaza izotavićemo detalje. $\square$

Teorema 33. *$\beta(bp)-$dual prostora $B(\mathcal{C}_f)$ je skup*

$$\bigcap_{i=2}^{5} d_i(r,s,t,u) \bigcap_{i=15}^{17} d_i(r,s,t,u)$$

Dokaz. Neka je $a = (a_{mn}) \in \Omega$ i $x = (x_{mn}) \in B(\mathcal{C}_f)$. Onda, važi $y = Bx \in \mathcal{C}_f$. Dakle, na osnovu jednakosti (3.16) [Tuğ(2017a), Teorem 3.11, str.14] za m,n-tu parcijalnu sumu $\sum_{k,l} a_{kl}x_{kl}$ da $\sum_{k,l=0}^{m,n} a_{kl}x_{kl} = (Dy)_{mn}$. Uzimajući granicu kada $m,n \to \infty$ iz ovo jednakosti, imamo četvorodimenzionalu matricu $D = (d_{mnkl})$ koja je takodje definisana od strane Tuğa[Tuğ(2017a), p. 14] sa

$$
d_{mnkl} = \begin{cases} \sum_{j,i=k,l}^{m,n} \left(\frac{-s}{r}\right)^{j-k} \left(\frac{-u}{t}\right)^{i-l} \frac{a_{ji}}{rt} & , \ 0 \le k \le m, 0 \le l \le n; \\ 0 & , \ \text{inače} \end{cases} \tag{4.39}
$$

za svako $k,l,m,n \in \mathbb{N}$. Onda, iz prethodno navedenih jednakosti dobijamo da je $ax \in \mathcal{CS}_{bp}$ uvek kada je $x = (x_{mn}) \in B(\mathcal{C}_f)$ ako i samo ako $Dy \in \mathcal{C}_{bp}$ uvek kada $y = (y_{mn}) \in \mathcal{C}_f$. Ovo nam govori da je $a = (a_{mn}) \in \{B(\mathcal{C}_f)\}^{\beta(\vartheta)}$ ako i samo ako $D \in (\mathcal{C}_f : \mathcal{C}_{bp})$. Prema tome, možemo reći da uslovi Leme 27(a) važe za d_{mnkl} umesto

a_{mnkl}, to jest,

$$\sup_{m,n\in\mathbb{N}}\sum_{k,l}\left|\sum_{j,i=k,l}^{m,n}\left(\frac{-s}{r}\right)^{j-k}\left(\frac{-u}{t}\right)^{i-l}\frac{a_{ji}}{rt}\right|<\infty,$$

$$\exists\beta_{kl}\in\mathbb{C}\ni, bp-\lim_{m,n\to\infty}\sum_{j,i=k,l}^{m,n}\left(\frac{-s}{r}\right)^{j-k}\left(\frac{-u}{t}\right)^{i-l}a_{ji}=\beta_{kl},$$

$$\exists u\in\mathbb{C}\ni, bp-\lim_{m,n\to\infty}\sum_{k,l}\sum_{j,i=k,l}^{m,n}\left(\frac{-s}{r}\right)^{j-k}\left(\frac{-u}{t}\right)^{i-l}\frac{a_{ji}}{rt}=u,$$

$$\exists l_0\in\mathbb{N}\ni, bp-\lim_{m,n\to\infty}\sum_{k}\left|\sum_{j,i=k,l_0}^{m,n}\left(\frac{-s}{r}\right)^{j-k}\left(\frac{-u}{t}\right)^{i-l_0}a_{ji}-\beta_{k,l_0}\right|=0,$$

za svako $k\in\mathbb{N}$,

$$\exists k_0\in\mathbb{N}\ni, bp-\lim_{m,n\to\infty}\sum_{l}\left|\sum_{j,i=k_0,l}^{m,n}\left(\frac{-s}{r}\right)^{j-k_0}\left(\frac{-u}{t}\right)^{i-l}a_{ji}-\beta_{k_0,l}\right|=0,$$

za svako $l\in\mathbb{N}$,

$$bp-\lim_{m,n\to\infty}\sum_{k}\sum_{l}\left|\Delta_{01}\left\{\sum_{j,i=k,l}^{m,n}\left(\frac{-s}{r}\right)^{j-k}\left(\frac{-u}{t}\right)^{i-l}\frac{a_{ji}}{rt}\right\}\right|=0,$$

$$bp-\lim_{m,n\to\infty}\sum_{k}\sum_{l}\left|\Delta_{10}\left\{\sum_{j,i=k,l}^{m,n}\left(\frac{-s}{r}\right)^{j-k}\left(\frac{-u}{t}\right)^{i-l}\frac{a_{ji}}{rt}\right\}\right|=0.$$

što je skup $\bigcap_{i=2}^{5}d_i(r,s,t,u)\bigcap_{i=15}^{17}(r,s,t,u)$. Ovo predstavlja željeni rezultat. $\Box$

Sada možemo karakterizovati novu klasu četvorodimenzionalnih matrica $(\mathcal{C}_f:\mathcal{M}_u)$ što ćemo koristiti kada se budemo bavili $\gamma-$dualo skupa $\mathcal{C}_f$ i u nekim posledicama petog odeljka ovog rada.

Teorema 34. *Četvorodimenzionalna matrica* $A=(a_{mnkl})\in(\mathcal{C}_f:\mathcal{M}_u)$ *ako i samo ako* $A_{mn}\in\mathcal{C}_f^{\beta(\vartheta)}$ *i uslov (4.16) važi.*

Dokaz. Pretpostavimo da je $A=(a_{mnkl})\in(\mathcal{C}_f:\mathcal{M}_u)$. Onda, Ax postoji u skupu $\mathcal{M}_u$ za svako $x\in\mathcal{C}_f$. Onda je $A_{mn}\in\mathcal{C}_f^{\beta(\vartheta)}$ za svako $m,n\in\mathbb{N}$. Povrh toga, poznato je iz [Mursaleen and Mohiuddine(2014)] da inkluzija $\mathcal{C}_f\subset\mathcal{M}_u$ važi. Tada, možemo reći da inkluzija $(\mathcal{C}_f:\mathcal{M}_u)\subset(\mathcal{M}_u:\mathcal{M}_u)$ važi i to nam daje rezultat da je uslov (4.16) neophodan.

I obratno, pretpostavimo da uslov (4.16) važi i $A_{mn}\in\mathcal{C}_f^{\beta(\vartheta)}$. Neka je dat prozivoljan niz $x=(x_{kl})\in\mathcal{C}_f\subset\mathcal{M}_u$, dakle porostoji $M\in\mathbb{R}^+$ tako da $\sup_{k,l\in\mathbb{N}}|x_{kl}|<M$. Kako je $A_{mn}\in\mathcal{C}_f^{\beta(\vartheta)}$ za svako $m,n\in\mathbb{N}$, onda Ax postoji. Kako nejednakost

$$\left|\sum_{k,l}a_{mnkl}x_{kl}\right|\leq\sum_{k,l}|a_{mnkl}x_{kl}|$$

važi za svako fiksirano $m,n\in\mathbb{N}$, može se dobiti uzimanjem supremuma po $m,n\in\mathbb{N}$

da je

$$\begin{aligned}
\sup_{m,n\in\mathbb{N}}\left|\sum_{k,l} a_{mnkl}x_{kl}\right| &\leq \sup_{m,n\in\mathbb{N}}\sum_{k,l}|a_{mnkl}||x_{kl}| \\
&\leq M\sup_{m,n\in\mathbb{N}}\sum_{k,l}|a_{mnkl}| < \infty.
\end{aligned}$$

Iz prethodne jednakosti dobijamo da $Ax \in \mathcal{M}_u$ čime je kompletiran dokaz. □

Teorema 35. *$\gamma-$dual prostora $B(\mathcal{C}_f)$ je skup $d_1(r,s,t,u) \cap CS_\vartheta$.*

Dokaz. Pretpostavimo da $a = (a_{mn}) \in \Omega$ i $x = (x_{mn}) \in B(\mathcal{C}_f)$. Onda, imamo $y = Bx \in \mathcal{C}_f$. Prema tome, koristeći isti princip koji smo koristili u dokazu Teoreme 33, možemo reći da je $ax \in \mathcal{BS}$ uvek kada je $x = (x_{mn}) \in B(\mathcal{C}_f)$ ako i samo ako $Dy \in \mathcal{M}_u$ uvek kada je $y = (y_{mn}) \in \mathcal{C}_f$, gde je matrica $D = (d_{mnkl})$ definisana sa (4.39). Ovo znači da je $a = (a_{mn}) \in \{B(\mathcal{C}_f)\}^\gamma$ ako i samo ako $D \in (\mathcal{C}_f : \mathcal{M}_u)$. Prema tome, može se videti da uslovi Teoreme 34 važe za matricu $D = (d_{mnkl})$. Odnosno da je, $D_{mn} \in \mathcal{C}_f^{\beta(\vartheta)}$ za svako fiksirano $m, n \in \mathbb{N}$ i

$$\sup_{m,n\in\mathbb{N}}\sum_{k,l}\left|\sum_{j,i=k,l}^{m,n}\left(\frac{-s}{r}\right)^{j-k}\left(\frac{-u}{t}\right)^{i-l}\frac{a_{ji}}{rt}\right| < \infty.$$

Što znači da je $\gamma-$dual prostora $B(\mathcal{C}_f)$ skup $d_1(r,s,t,u) \cup CS_\vartheta$ što je trebalo i pokazati. □

Glava 5

Karakterizacija pojedinih novih četvorodimenzionalnih matričnih transformacija

U ovoj glavi, četvorodimenzionalne matrične transformacije dvostrukih prostora nizova $B(\mathcal{M}_u)$, $B(\mathcal{C}_p)$, $B(\mathcal{C}_{bp})$, $B(\mathcal{C}_r)$, $B(\mathcal{L}_q)$ i $B(\mathcal{C}_f)$ se navode korišćenjem koncepta četvorodimenzionalnog dualnog summabilnog metoda za dvostruke nizovve prostore predstavljenog i proučenog od strane Başara [Basar(2012)], i Yeşilkayagila Başara[Yeşilkayagil and Başar(2015)], i od nedavno Tuğa[Tug(2018)]. Pored toga, navode se potrebni i dovoljni uslovi za karakterizaciju klasa pojedinih novih četvorodimenzionalnih matrica $(B(\mathcal{M}_u) : \mathcal{C}_f)$, $(\mathcal{M}_u : B(\mathcal{C}_f))$, $(\mathcal{L}_{s'} : \mathcal{C}_f)$, $(B(\mathcal{L}_{s'}) : \mathcal{C}_f)$ i $(\mathcal{L}_{s'} : B(\mathcal{C}_f))$ za $0 < s' < 1$ i $1 < s' < \infty$. Na kraju, glava se završava nekim značajnim rezulatima za četvorodimenzionalna matrična preslikavanja.

5.1 Dualni sumabilni metod koristeći $B(r, s, t, u)$ matrice

Pretpostavimo da četvorodimenzionalne matrice $A = (a_{mnkl})$ i $E = (e_{mnkl})$ transformišu nizove $x = (x_{mn})$ i $y = (y_{mn})$ koji su povezani relacijom (3.1) u dvostruke nizove $s = (s_{mn})$ i $z = (z_{mn})$, respektivno, odnosno

$$s_{mn} = (Ax)_{mn} = \sum_{k,l=0}^{\infty} a_{mnkl}x_{kl} \ \textit{za svako}\ m, n \in \mathbb{N}, \tag{5.1}$$

$$z_{mn} = (Ey)_{mn} = \sum_{k,l=0}^{\infty} e_{mnkl}y_{kl} \ \textit{za svako}\ m, n \in \mathbb{N}. \tag{5.2}$$

Očigledno metod B je primenjen na $B(r, s, t, u)-$transformaciju niza x, dok je metod A direktno primenjen na elemente niza x. Onda, možemo reći da su metodi A i E suštinski različiti.

Pretpostavimo da uobičajeni proizvod $EB(r, s, t, u)$ postoji, što je mnogo slabija hipoteza od uslova da matrica E pripada bilo kojoj klasi matrica, u globlalu.

Možemo u ovom slučaju reći da su matrice A i E u (5.1) i (6.12)dualni sumabilni metodi ako se s redukuje na z ili obrnuto koristeći uobičajeno sumiranje po delovima. Ovo nas dovodi do činjenice da $EB(r,s,t,u)$ postoji i jednak je A i $Ax = \{EB(r,s,t,u)x\} = E\{B(r,s,t,u)x\} = Ey$ formalno važi, ako jedna strana postoji. Ova izjava je ekvivalentna odnosu izmedju elemenata matrica $A = (a_{mnkl})$ i $E = (e_{mnkl})$

$$a_{mnkl} = sue_{mn,m-1,n-1} + ste_{mn,m-1,n} + rue_{mnm,n-1} + rte_{mnmn} \tag{5.3}$$

ili ekvivalentno

$$e_{mnkl} = \sum_{i,j=k,l}^{\infty} \left(\frac{-s}{r}\right)^{i-k} \left(\frac{-u}{t}\right)^{j-l} \frac{a_{mnij}}{rt}$$

za svako $m,n,k,l \in \mathbb{N}$. Trivijalno relacija (6.3) izmedju elemenata matrica $A = (a_{mnkl})$ i $E = (e_{mnkl})$ može biti navedena matričnim proizovodom, kao što sledi;

$$A = EB(r,s,t,u) \textit{ ili ekvivalentno } E = AF(r,s,t,u).$$

Zbog jednostavnosti oznaka, takodje možemo pisati i za svako $m,n,k,l \in \mathbb{N}$ da je

$$\begin{aligned}
e(m,n) &= \sum_{k,l=0}^{m,n} \sum_{i,j=k,l}^{\infty} \left(\frac{-s}{r}\right)^{i-k} \left(\frac{-u}{t}\right)^{j-l} \frac{a_{mnij}}{rt},\\
\Delta_{10}^{kl} a_{mnkl} &= a_{mnkl} - a_{mn,k+1,l},\\
\Delta_{01}^{kl} a_{mnkl} &= a_{mnkl} - a_{mnk,l+1},\\
\Delta_{11}^{kl} a_{mnkl} &= \Delta_{10}^{kl}(\Delta_{01}^{kl} a_{mnkl}) = \Delta_{01}^{kl}(\Delta_{10}^{kl} a_{mnkl}).
\end{aligned}$$

Sada, možemo dati sledeće generalizovane teoreme korišćenjem jednakosti (6.3) izmedju metoda A i E.

Teorema 36. *Pretpostavimo da su elementi četvorodimenzionalnih beskonačnih matrica $A = (a_{mnkl})$ i $E = (e_{mnkl})$ povezani relacijom (6.3). Tada, $A \in (B(\lambda) : \mu)$ ako i samo ako $A_{mn} \in [B(\lambda)]^{\beta(\vartheta)}$ za svako $m,n \in \mathbb{N}$ i $E \in (\lambda : \mu)$; gde su $\lambda, \mu \in \{\mathcal{M}_u, \mathcal{C}_p, \mathcal{C}_{bp}, \mathcal{C}_r, \mathcal{L}_q\}$.*

Dokaz. Pretpostavimo da je $A \in (B(\lambda) : \mu)$. Onda, Ax postoji u μ za svaki niz $x = (x_{mn}) \in B(\lambda)$ što implicira da je $A_{mn} \in [B(\lambda)]^{\beta(\vartheta)}$ za svako $m,n \in \mathbb{N}$. Prema tome, imamo sledeću jednakost izvedenu iz parcijalne sume serije $\sum_{k,l} a_{mnkl}x_{kl}$ i relacije (6.3) da je

$$\sum_{k,l=0}^{m,n} a_{mnkl}x_{kl} = \sum_{k,l=0}^{m,n} \left[\sum_{i,j=k,l}^{m,n} \left(\frac{-s}{r}\right)^{i-k} \left(\frac{-u}{t}\right)^{j-l} \frac{a_{mnij}}{rt}\right] y_{kl} \tag{5.4}$$

za svakom $m,n \in \mathbb{N}$. Onda, uzimanjem $\vartheta-$granice u (5.4) kada $m,n \to \infty$ imamo $Ax = Ey$. Dakle, $Ey \in \mu$ uvek kada je $y \in \lambda$, to jest, $E \in (\lambda : \mu)$.

Obrnuto, pretpostavimo da je $A_{mn} \in [B(\lambda)]^{\beta(\vartheta)}$ za svako $m,n \in \mathbb{N}$ i $E \in (\lambda : \mu)$, i neka je $v = (v_{kl}) \in B(\lambda)$ za $u = Bv$. Onda, Av postoji. Prema tome, može se izvući iz (ξ, ϱ)-te pravougaone parcijalne sume serije $\sum_{k,l} a_{mnkl} v_{kl}$ za svako $m, n, \xi, \varrho \in \mathbb{N}$ da je

$$\sum_{k,l=0}^{\xi,\varrho} a_{mnkl} v_{kl} = \sum_{k,l=0}^{\xi,\varrho} a_{mnkl} \sum_{i,j=0}^{k,l} f_{klij} u_{ij} = \sum_{k,l=0}^{\xi,\varrho} \left(\sum_{i,j=k,l}^{\xi,\varrho} a_{mnij} f_{ijkl} \right) u_{kl}$$

što daje uzimanjem p-granice $\xi, \varrho \to \infty$ da je

$$\sum_{k,l} a_{mnkl} v_{kl} = \sum_{k,l} e_{mnkl} u_{kl} \quad \text{za svako} \quad m, n \in \mathbb{N}.$$

Odnosno, $Av = Eu$ što dovodi do činjenice $A \in (B(\lambda) : \mu)$, što je trebalo i pokazati. □

Zamenom uloga prostora $B(\lambda)$ i μ u Teoremi 36, dobijamo sledeću lemu:

Lema 37. *[Yeşilkayagil and Başar(2017), Theorem 4.7] Neka su λ i μ iz Teoreme 36, i neka su elementi četvorodimenzionalnih matrica $A = (a_{mnkl})$ i $G = (g_{mnkl})$ povezani sa relacijom*

$$g_{mnkl} = \sum_{i,j=0}^{m,n} b_{mnij}(r, s, t, u) a_{ijkl} \quad \text{za svako} \quad m, n, k, l \in \mathbb{N}. \tag{5.5}$$

Onda je, $A \in (\mu : B(\lambda))$ ako i samo ako je $G \in (\mu : \lambda)$.

Teorema 38. *Neka su elementi četvorodimenzionalnih matrica $A = (a_{mnkl})$ i $H = (h_{mnkl})$ povezani relacijom*

$$h_{mnkl} = \sum_{i,j=k,l}^{m,n} b_{mnij}(r, s, t, u) e_{ijkl} \text{ za svako } m, n, k, l \in \mathbb{N}, \tag{5.6}$$

gde je četvorodimenzionalna matrica $E = (e_{mnkl})$ definisana sa (6.3). Tada je, $A \in (B(\lambda) : B(\mu))$ ako i samo ako je $H \in (\lambda : \mu)$; gde su $\lambda, \mu \in \{\mathcal{M}_u, \mathcal{C}_p, \mathcal{C}_{bp}, \mathcal{C}_r, \mathcal{L}_q\}$.

Dokaz. Neka je $A \in (B(\lambda) : B(\mu))$. Tada Ax postoji u $B(\mu)$ za svaki niz $x = (x_{mn}) \in B(\lambda)$ i $\{B(Ax)\}_{mn} \in \mu$ za svako $m, n \in \mathbb{N}$. Povrh toga, možemo reći da relacija $Bx = y \in \lambda$ implicira da je $B(AB^{-1}y) \in \mu$. Korišćenjem relacije (6.7) izmedju matrica $A = (a_{mnkl})$ i $H = (H_{mnkl})$ i relacije (3.2) izmedju $x = (x_{mn})$ i $y = (y_{mn})$, imamo sledeću jednakost izvedenu iz parcijalne summe $\sum_{kl} h_{mnkl} y_{kl}$ da

$$\sum_{k,l=0}^{m,n} h_{mnkl} y_{kl} = \sum_{k,l=0}^{m,n} \sum_{i,j=k,l}^{m,n} b_{mnij}(r, s, t, u) e_{ijkl} y_{kl} \tag{5.7}$$

za svako $m, n, k, l \in \mathbb{N}$. Primenom ϑ-granice na jednakost (6.12) kada $m, n \to \infty$ imamo da je $Ax = Hy$. Dakle, $Hy \in \mu$ uvek kada je $y \in \lambda$, znači da je $H \in (\lambda : \mu)$. Ovim je teorema dokazana. □

5.2 Karakterizacija pojedinih novih matričnih transformacija

U ovom poglavlju bavićemo se karaktrizacijom pojedinih novih četvorodimenzionalnih matričnih transformacija $(B(\mathcal{M}_u) : \mathcal{C}_f)$, $(\mathcal{M}_u : B(\mathcal{C}_f))$, $(\mathcal{L}_{s'} : \mathcal{C}_f)$, $(B(\mathcal{L}_{s'}) : \mathcal{C}_f)$ i $(\mathcal{L}_{s'} : B(\mathcal{C}_f))$ za $0 < s' < 1$ i $1 < s' < \infty$.

Teorema 39. *Četvorodimenzionalna matrica $A = (a_{mnkl}) \in (B(\mathcal{C}_f) : \mathcal{M}_u)$ ako i samo ako $A_{mn} \in \{B(\mathcal{C}_f)\}^{\beta(\vartheta)}$ i važi sledeći uslov*

$$\sup_{m,n\in\mathbb{N}} \sum_{k,l} \left| \sum_{i,j=k,l}^{m,n} \left(\frac{-s}{r}\right)^{i-k} \left(\frac{-u}{t}\right)^{j-l} \frac{a_{mnij}}{rt} \right| < \infty. \tag{5.8}$$

Dokaz. Neka je $A = (a_{mnkl}) \in (B(\mathcal{C}_f) : \mathcal{M}_u)$. Onda, Ax postoji u $\mathcal{M}_u$ za svaki niz $x = (x_{mn}) \in B(\mathcal{C}_f)$ što implicira dalje $A_{mn} \in \{B(\mathcal{C}_f)\}^{\beta(\vartheta)}$ za svako $m, n \in \mathbb{N}$. Prema tome, imamo sledeću jednakost, izvedenu iz parcijalne sume $\sum_{k,l} a_{mnkl}x_{kl}$, važi dakle

$$\begin{aligned} \sum_{k,l=0}^{m,n} a_{mnkl}x_{kl} &= \sum_{k,l=0}^{m,n} a_{mnkl} \sum_{j,i=0}^{k,l} \left(\frac{-s}{r}\right)^{k-j} \left(\frac{-u}{t}\right)^{l-i} \frac{y_{ji}}{rt} \\ &= \sum_{k,l=0}^{m,n} \sum_{j,i=k,l}^{m,n} \left(\frac{-s}{r}\right)^{j-k} \left(\frac{-u}{t}\right)^{i-l} \frac{a_{mnji}}{rt} y_{kl} \\ &= (Ey)_{mn}, \end{aligned} \tag{5.9}$$

gde je četvrodimenzionalna matrica $E = (e_{mnkl})$ definisana sa

$$e_{mnkl} = \begin{cases} \sum_{j,i=k,l}^{m,n} \left(\frac{-s}{r}\right)^{j-k} \left(\frac{-u}{t}\right)^{i-l} \frac{a_{mnji}}{rt} & , \quad 0 \le k \le m, 0 \le l \le n; \\ 0 & , \quad \text{inače} \end{cases}$$

za svako $m, n \in \mathbb{N}$. Tada, uzimajući $\vartheta-$granicu u (5.9) kada $m, n \to \infty$, imamo da je $Ax = Ey$. Dakle, $Ey \in \mathcal{M}_u$ uvek kada je $y \in \mathcal{C}_f$, odnosno, $E \in (\mathcal{C}_f : \mathcal{M}_u)$. U ovom slučaju uslovi Teoreme 34 važe za $E = (e_{mnkl})$ umesto $A = (a_{mnkl})$, to jest., $E_{mn} \in \{\mathcal{C}_f\}^{\beta(\vartheta)}$ i $\sup_{m,n\in\mathbb{N}} \sum_{k,l} |e_{mnkl}| < \infty$. Ovim je teorema dokazana. □

Teorema 40. *Četvorodimenzionalna matrica $A = (a_{mnkl}) \in (\mathcal{C}_f : B(\mathcal{M}_u))$ ako i samo ako $A_{mn} \in \{\mathcal{C}_f\}^{\beta(\vartheta)}$ i važi sledeći uslov*

$$\sup_{m,n\in\mathbb{N}} \sum_{k,l} \left| \sum_{i,j=0}^{m,n} b_{mnij}(r, s, t, u)a_{ijkl} \right| < \infty. \tag{5.10}$$

Dokaz. Teoremu možemo dokazati na identičan način kao i teoremu Theorem 39 korišćenjem relacije (4.6) [Yeşilkayagil and Başar(2017), Theorem 4.7] izmedju elemenata četvorodimenzionalnih matrica $A = (a_{mnkl})$ i $G = (g_{mnkl})$. □

Teorema 41. *Neka je $A = (a_{mnkl})$ četvorodimenzionalna beskonačna matrica. Tada važe sledeći iskazi.*

(a) Ako je $0 < s' \leq 1$. *Tada,* $A = (a_{mnkl}) \in (\mathcal{L}_{s'} : \mathcal{C}_f)$ *ako i samo ako*

$$\sup_{m,n,k,l\in\mathbb{N}} |a_{mnkl}| < \infty, \tag{5.11}$$

$$\exists (a_{kl}) \in \mathbb{C} \text{ tako da } f_2 - \lim_{m,n\to\infty} a_{mnkl} = a_{kl} \text{ za svako } k, l \in \mathbb{N} \tag{5.12}$$

(b) Ako je $1 < s' < \infty$. *Tada,* $A = (a_{mnkl}) \in (\mathcal{L}_{s'} : \mathcal{C}_f)$ *ako i samo ako uslov (5.12) važi i pored toga važi*

$$\sup_{m,n\in\mathbb{N}} \sum_{k,l} |a_{mnkl}|^{s'} < \infty. \tag{5.13}$$

Dokaz. (a) Neka je $0 < s' \leq 1$ i $A = (a_{mnkl}) \in (\mathcal{L}_{s'} : \mathcal{C}_f)$. Tada, Ax postoji u $\mathcal{C}_f$ za svaki niz $x = (x_{kl}) \in \mathcal{L}_{s'}$. Kako inkluzija $(\mathcal{L}_{s'} : \mathcal{C}_f) \subset (\mathcal{L}_{s'} : \mathcal{M}_u)$ važi, onda je uslov (5.11) neophodan. Pored toga, kako Ax postoji u $\mathcal{C}_f$ za svaki $x = (x_{kl}) \in \mathcal{L}_{s'}$, takodje je dokazano za $x = e^{kl} \in \mathcal{L}_{s'}$ da je $Ae^{kl} = (a_{mnkl})_{m,n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{C}_f$ odakle dobijamo neophodnost uslova (5.12).

Pretpsotavimo sada da uslovi (5.11) i (5.12) važe i neka je $x = (x_{kl})$ proizvoljan dvostruki niz u $\mathcal{L}_{s'}$.
$A_{mn} \in \mathcal{L}_{s'}^{\beta(\vartheta)}$ dobijamo kao posledicu 3.2 iz [Yeşilkayagil and Başar(2017)] za svako $m, n \in \mathbb{N}$, onda Ax postoji. Primenom (5.11) i (5.12) za svako $k, l \in \mathbb{N}$ dobijamo sledeću nejednakost

$$|a_{kl}| = f_2 - \lim_{m,n\to\infty} |a_{mnkl}| \leq \sup_{m,n\in\mathbb{N}} |a_{mnkl}|$$

tada sledi da je $a_{kl} \in \mathcal{M}_u$. Prema tome, serija $\sum_{k,l} a_{kl}x_{kl}$ je konvergentna za svaki $x \in \mathcal{L}_{s'}$. Pored toga, primenom (5.12) dobijamo da za svako $\epsilon > 0$ postoji pozitivno $n_0 \in \mathbb{N}$ tako da važi

$$\frac{1}{(q+1)(q'+1)} \sum_{k=j}^{j+q} \sum_{l=i}^{i+q'} |a_{mnkl} - a_{kl}| < \epsilon$$

za svako $m, n > n_0$. onda imamo

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{(q+1)(q'+1)} \sum_{k=j}^{j+q} \sum_{l=i}^{i+q'} \left(\left| \sum_{v,v'}^{k,l} a_{mnv,v'} x_{v,v'} - \sum_{v,v'}^{k,l} a_{v,v'} x_{v,v'} \right|^{s'} \right) \\
= \; &\frac{1}{(q+1)(q'+1)} \sum_{k=j}^{j+q} \sum_{l=i}^{i+q'} \left(\left| \sum_{v,v'}^{k,l} (a_{mnv,v'} - a_{v,v'}) x_{v,v'} \right|^{s'} \right) \\
\leq \; &\frac{\epsilon^{s'}}{(q+1)(q'+1)} \sum_{k=j}^{j+q} \sum_{l=i}^{i+q'} \left(\sum_{v,v'}^{k,l} |x_{v,v'}| \right)^{s'} < \frac{\epsilon^{s'}}{(q+1)(q'+1)} \sum_{k=j}^{j+q} \sum_{l=i}^{i+q'} \left(\sum_{v,v'}^{k,l} |x_{v,v'}|^{s'} \right)
\end{aligned}$$

To nam daje da $p - \lim_{q,q'\to\infty} \frac{1}{(q+1)(q'+1)} \sum_{k=j}^{j+q} \sum_{l=i}^{i+q'} (Ax)_{kl}$ postoji, odnosno $Ax \in \mathcal{C}_f$.

Ovimo smo dokazali (a).

(b) Neka je $1 < s' < \infty$. Neophodnost (5.12) i (5.13) se lako može pokazi kao u delu (a) primenom Hölderove nejednakosti.

Prestpostavimo sada da (5.12) i (5.13) važe i neka je $x = (x_{kl})$ proizvoljan dvostruki niz iz skupa $\mathcal{L}_{s'}$. Primenom (5.12) za svako $k, l \in \mathbb{N}$ imamo

$$\sum_{v,v'=0}^{k,l} |a_{v,v'}|^{s'} = f_2 - \lim_{m,n\to\infty} \sum_{v,v'=0}^{k,l} |a_{mnv,v'}|^{s'} \leq \sup_{m,n\mathbb{N}} \sum_{v,v'=0}^{k,l} |a_{mnv,v'}|^{s'} < \infty \tag{5.14}$$

što nam govori da je $a = (a_{v,v'}) \in \mathcal{L}_{s'}$. Dakle, dvostruka serija $\sum_{v,v'=0}^{k,l} a_{v,v'}x_{v,v'}$ je konvergentna za svako $x \in \mathcal{L}_{s'}$. Pored toga, za svako $\epsilon > 0$, postoji $N_0 \in \mathbb{N}$ tako da je

$$\frac{1}{(q+1)(q'+1)} \sum_{k=j}^{j+q} \sum_{l=i}^{i+q'} \left(\sum_{v,v'=0}^{k,l} |(a_{mnv,v'} - a_{v,v'})|^{s'} \right) < \epsilon \tag{5.15}$$

za svako $m, n > N_0$. Primenom Hölderove nejednakosti i (5.14) i (5.15) možemo zapisati

$$\frac{1}{(q+1)(q'+1)} \sum_{k=j}^{j+q} \sum_{l=i}^{i+q'} \left| \sum_{v,v'=0}^{k,l} a_{mnv,v'}x_{v,v'} - \sum_{v,v'=0}^{k,l} a_{v,v'}x_{v,v'} \right| =$$
$$\frac{1}{(q+1)(q'+1)} \sum_{k=j}^{j+q} \sum_{l=i}^{i+q'} \left| \sum_{v,v'=0}^{k,l} (a_{mnv,v'} - a_{v,v'})x_{v,v'} \right|$$

za svako $m, n \in \mathbb{N}$. Nakon prolaska p-granice kada $q, q' \to \infty$ dobijamo da $Ax \in \mathcal{C}_f$. Ovim je dokaz završen. $\square$

Teorema 42. *Neka je $A = (a_{mnkl})$ četvorodimenzionalna beskonačan matrica. Tada važe sledeći iskazi:*

(a) Ako je $0 < s' \leq 1$. Tada, $A = (a_{mnkl}) \in (\mathcal{L}_{s'} : B(\mathcal{C}_f))$ ako i samo ako

$$\sup_{m,n,k,l\in\mathbb{N}} \left| \sum_{i,j=0}^{m,n} b_{mnij}a_{ijkl} \right| < \infty, \tag{5.16}$$

$$\exists e_{kl} \in \Omega \ \ni f_2 - \lim_{m,n\to\infty} \sum_{i,j=0}^{m,n} b_{mnij}a_{ijkl} = e_{kl} \text{ za svako } k, l \in \mathbb{N} \tag{5.17}$$

(b) Ako je $1 < s' < \infty$. Tada, $A = (a_{mnkl}) \in (\mathcal{L}_{s'} : B(\mathcal{C}_f))$ ako i samo ako (5.17) važi i pored toga

$$\sup_{m,n\in\mathbb{N}} \sum_{k,l} \left| \sum_{i,j=0}^{m,n} b_{mnij}a_{ijkl} \right|^{s'} < \infty. \tag{5.18}$$

Dokaz. Neka je četvorodimenzionalna matrica $A = (a_{mnkl}) \in (\mathcal{L}_{s'} : B(\mathcal{C}_f))$. Tada, Ax postoji u skupu $B(\mathcal{C}_f)$ za svaki niz $x \in \mathcal{L}_{s'}$. Kako je $Ax \in B(\mathcal{C}_f)$ možemo reći da je $B(Ax) \in \mathcal{C}_f$. Pored toga, sledeća jednakost

$$\sum_{i,j=0}^{m,n} b_{mnij} \sum_{v,v'=0}^{k,l} a_{ijv,v'} x_{v,v'} = \sum_{v,v'=0}^{k,l} \left(\sum_{i,j=0}^{m,n} b_{mnij} a_{ijv,v'} \right) x_{v,v'} \tag{5.19}$$

važi za svako $m, n, k, l \in \mathbb{N}$. Dakle, uzimanjem granice kada $k, l \to \infty$ u (5.19) imamo da je $B(Ax) = (BA)x$. Sada možemo definisati novu četvordimenzionalnu matricu $BA = G = (g_{mnkl})$ sa

$$g_{mnkl} = \sum_{i,j=0}^{m,n} b_{mnij} a_{ijv,v'}.$$

Dakle, možemo reći da je $Ax \in B(\mathcal{C}_f)$ uvek kada je $x \in \mathcal{L}_{s'}$ako i samo ako $Gx \in \mathcal{C}_f$ uvek kada je $x \in \mathcal{L}_{s'}$ što nam govori da je $G = (g_{mnkl}) \in (\mathcal{L}_{s'} : \mathcal{C}_f)$. Prema tome, uslovi (5.11) i (5.12) važe za $0 < s' \leq 1$, a uslovi (5.12) i (5.13) važe za $1 < s' < \infty$ i g_{mnkl} umesto a_{mnkl}. Ovim smo dobili željene rezultate. □

Teorema 43. *Neka je $A = (a_{mnkl})$ četvorodimnzionalna beskonačna matrica. Tada važe sledeći iskazi.*

(a) Ako je $0 < s' \leq 1$. Tada, $A = (a_{mnkl}) \in (B(\mathcal{L}_{s'}) : \mathcal{C}_f)$ ako i samo ako

$$\sup_{m,n,k,l \in \mathbb{N}} \left| \sum_{i,j=k,l}^{m,n} \left(\frac{-s}{r} \right)^{i-k} \left(\frac{-u}{t} \right)^{j-l} \frac{a_{mnij}}{rt} \right| < \infty, \tag{5.20}$$

$$\exists e_{kl} \in \Omega \;\ni f_2 - \lim_{m,n \to \infty} \sum_{i,j=k,l}^{m,n} \left(\frac{-s}{r} \right)^{i-k} \left(\frac{-u}{t} \right)^{j-l} \frac{a_{mnij}}{rt} = e_{kl} \tag{5.21}$$

(b) Ako je $1 < s' < \infty$. Tada, $A = (a_{mnkl}) \in (B(\mathcal{L}_{s'}) : \mathcal{C}_f)$ ako i samo ako uslov (5.21) važi i

$$\sup_{m,n \in \mathbb{N}} \sum_{k,l} \left| \sum_{i,j=k,l}^{m,n} \left(\frac{-s}{r} \right)^{i-k} \left(\frac{-u}{t} \right)^{j-l} \frac{a_{mnij}}{rt} \right|^{s'} < \infty. \tag{5.22}$$

Dokaz. Pretpostavimo da je četvorodimenzionalna matrica $A = (a_{mnkl}) \in (B(\mathcal{L}_{s'}) : \mathcal{C}_f)$. Tada, primenom metoda korišćenog u dokazu Teoreme 42, imamo da Ax postoji u $\mathcal{C}_f$ za svaki niz $x \in B(\mathcal{L}_{s'})$. Kako je $x \in B(\mathcal{L}_{s'})$ onda možemo reći da je $Bx = y \in \mathcal{L}_{s'}$ i da sledeća jednakost

$$\sum_{i,j=0}^{m,n} a_{mnij} x_{v,v'} = \sum_{v,v'=0}^{k,l} \left(\sum_{i,j=k,l}^{m,n} \left(\frac{-s}{r} \right)^{i-k} \left(\frac{-u}{t} \right)^{j-l} \frac{a_{mnij}}{rt} \right) y_{v,v'} \tag{5.23}$$

važi za svako $m, n, k, l \in \mathbb{N}$. Dakle, imamo $Ax = AB^{-1}y = Ey$ uzimanjem granice kada $k, l \to \infty$ u (5.23). Sada možemo definisati četvorodimenzionalnu matricu

$AB^{-1} = E = (e_{mnkl})$ sa

$$e_{mnkl} = \sum_{i,j=k,l}^{m,n} \left(\frac{-s}{r}\right)^{i-k} \left(\frac{-u}{t}\right)^{j-l} \frac{a_{mnij}}{rt}.$$

Dakle, ovde možemo reći da je $Ax \in \mathcal{C}_f$ uvek kada je $x \in B(\mathcal{L}_{s'})$ iako i samo ako $Ey \in \mathcal{C}_f$ uvek kada je $y \in \mathcal{L}_{s'}$ što znači da je $E = (e_{mnkl}) \in (\mathcal{L}_{s'} : \mathcal{C}_f)$. Prema tome, (5.11) i (5.12) važe za $0 < s' \leq 1$, a (5.12) i (5.13) važe za $1 < s' < \infty$ i e_{mnkl} i umesto a_{mnkl}. Ovo nam daje tražene rezultate i završava dokaz. □

5.3 Neki značajni rezultati

U ovom poglavlju, navedene su neke direktne posledice koje proizilaze iz prethodno navedenih teorema.

Posledica 44. *Neka je $A = (a_{mnkl})$ četvorodimenzionalna beskonačna matrica . Tada važe sledeći iskazi.*

(i) $A \in (B(\mathcal{C}_p) : \mathcal{C}_\vartheta)$ *ako i samo ako (4.1)-(4.3), (4.6) i (4.7) važe za* e_{mnkl} *umesto* a_{mnkl}.

(ii) $A \in (B(\mathcal{C}_{bp}) : \mathcal{C}_\vartheta)$ *ako i samo ako (4.1)-(4.3), (4.4) i (4.5) važe za* e_{mnkl} *umesto* a_{mnkl}.

(iii) $A \in (B(\mathcal{C}_r) : \mathcal{C}_\vartheta)$ *ako i samo ako 4.1)-(4.3), (4.8) i (4.9) važe za* e_{mnkl} *umesto* a_{mnkl}.

(iv) $A \in (B(\mathcal{L}_q) : \mathcal{C}_{bp})$ *ako i samo ako (4.2) i (4.11) važe za* $1 < q < \infty$ *i* e_{mnkl} *umesto* a_{mnkl}.

(v) $A \in (B(\mathcal{L}_q) : \mathcal{C}_{bp})$ *ako i samo ako (4.2) i (4.10)važe za* $0 < q \leq 1$ *i* e_{mnkl} *umesto* a_{mnkl}.

(vi) $A \in (B(\mathcal{L}_q) : \mathcal{M}_u)$ *ako i samo ako (4.10) važi za* $0 < q < 1$ *i* e_{mnkl} *umesto* a_{mnkl}.

(vii) $A \in (B(\mathcal{L}_q) : \mathcal{M}_u)$ *ako i samo ako (4.11) važi za* $1 < q < \infty$ *i* e_{mnkl} *umesto* a_{mnkl}.

(viii) $A \in (B(\mathcal{M}_u) : \mathcal{C}_{bp})$ *ako i samo ako (4.1), (4.3), (4.12), (4.13),(4.14) i (4.15) važe za* e_{mnkl} *umesto* a_{mnkl}

(ix) $A \in (B(\mathcal{M}_u) : \mathcal{C}_p)$ *ako i samo ako (4.2), (4.6) i (4.7) važe za* e_{mnkl} *umesto* a_{mnkl}

(x) $A \in (B(\mathcal{C}_{bp}) : \mathcal{M}_u)$ *ako i samo ako (4.1) važi za* e_{mnkl} *umesto* a_{mnkl}.

Posledica 45. *Neka je $E = (e_{mnkl})$ četvorodimenzionalna beskonačna matrica . Tada važe sledeći iskazi.*

(i) $A \in (\mathcal{C}_p : B(\mathcal{C}_\vartheta))$ *ako i samo ako (4.1)-(4.3), (4.6) i (4.7) važe za* g_{mnkl} *umesto* a_{mnkl}.

(ii) $A \in (\mathcal{C}_{bp} : B(\mathcal{C}_\vartheta))$ *ako i samo ako (4.1)-(4.3), (4.4) i (4.5) važe za* g_{mnkl} *umesto* a_{mnkl}.

(iii) $A \in (\mathcal{C}_r : B(\mathcal{C}_\vartheta))$ *ako i samo ako (4.1)-(4.3), (4.8) i (4.9) važe za* g_{mnkl} *umesto* a_{mnkl}.

(iv) $A \in (\mathcal{L}_q : B(\mathcal{C}_{bp}))$ *ako i samo ako (4.2) i (4.10) važe za* $0 < q \leq 1$ *i* g_{mnkl} *umesto* a_{mnkl}.

(v) $A \in (\mathcal{L}_q : B(\mathcal{C}_{bp}))$ *ako i samo ako (4.2) i (4.11) važe za* $1 < q < \infty$ *i* g_{mnkl} *umesto* a_{mnkl}.

(vi) $A \in (\mathcal{L}_q : B(\mathcal{M}_u))$ *ako i samo ako (4.10) važi za* $0 < q <\leq 1$ *i* g_{mnkl} *umesto* a_{mnkl}.

(vii) $A \in (\mathcal{L}_q : B(\mathcal{M}_u))$ *ako i samo ako (4.11) vaqv zi za* $1 < q < \infty$ *i* g_{mnkl} *umesto* a_{mnkl}.

(viii) $A \in (\mathcal{M}_u : B(\mathcal{C}_{bp}))$ *ako i samo ako (4.1), (4.3), (4.12), (4.13),(4.14) i (4.15) važe za* g_{mnkl} *umesto* a_{mnkl}

(ix) $A \in (\mathcal{M}_u : B(\mathcal{C}_p))$ *ako i samo ako (4.2), (4.6) i (4.7) važe za* g_{mnkl} *umesto* a_{mnkl}

(x) $A \in (\mathcal{C}_{bp} : B(\mathcal{M}_u))$ *ako i samo ako (4.1) važi za* g_{mnkl} *umesto* a_{mnkl}.

Posledica 46. *Neka je* $A = (a_{mnkl})$ *četvorodimenzionalna beskonačna matrica . Tada važe sledeći iskazi.*

(i) $A \in (B(\mathcal{C}_p) : B(\mathcal{C}_\vartheta))$ *ako i samo ako (4.1)-(4.3), (4.6) i (4.7) va v ze za* h_{mnkl} *umesto* a_{mnkl}.

(ii) $A \in (B(\mathcal{C}_{bp}) : B(\mathcal{C}_\vartheta))$ *ako i samo ako (4.1)-(4.3), (4.4) i (4.5) važe za* h_{mnkl} *umesto* a_{mnkl}.

(iii) $A \in (B(\mathcal{C}_r) : B(\mathcal{C}_\vartheta))$ *ako i samo ako (4.1)-(4.3), (4.8) i (4.9) važe za* h_{mnkl} *umesto* a_{mnkl}.

(iv) $A \in (B(\mathcal{L}_q) : B(\mathcal{C}_{bp}))$ *ako i samo ako (4.2) i (4.10) važe za* $0 < q \leq 1$ *i* h_{mnkl} *umesto* a_{mnkl}.

(v) $A \in (B(\mathcal{L}_q) : B(\mathcal{C}_{bp}))$ *ako i samo ako (4.2) i (4.11) važe za* $1 < q < \infty$ *i* h_{mnkl} *umesto* a_{mnkl}.

(vi) $A \in (B(\mathcal{L}_q) : B(\mathcal{M}_u))$ *ako i samo ako (4.10) važi za* $0 < q \leq 1$ *i* h_{mnkl} *umesto* a_{mnkl}.

(vii) $A \in (B(\mathcal{L}_q) : B(\mathcal{M}_u))$ *ako i samo ako (4.11) važi za* $1 < q < \infty$ *i* h_{mnkl} *umesto* a_{mnkl}.

(viii) *$A \in (B(\mathcal{M}_u) : B(\mathcal{C}_{bp}))$ ako i samo ako (4.1), (4.3), (4.12), (4.13),(4.14) i (4.15) važe za h_{mnkl} umesto a_{mnkl}.*

(ix) *$A \in (B(\mathcal{M}_u) : B(\mathcal{C}_p))$ ako i samo ako (4.2), (4.6) i (4.7) važe za h_{mnkl} umesto a_{mnkl}.*

(x) *$A \in (B(\mathcal{C}_{bp}) : B(\mathcal{M}_u))$ ako i samo ako (4.1) važi za h_{mnkl} umesto a_{mnkl}.*

Posledica 47. *Neka je $A = (a_{mnkl})$ četvorodimenzionalna beskonačna matrica . Tada važe sledeći iskazi.*

(i) *$A \in (B(\mathcal{C}_p) : \mathcal{CS}_\vartheta)$ ako i samo ako (4.1)-(4.3), (4.6) i (4.7) važe za $e(m,n)$ umesto a_{mnkl}.*

(ii) *$A \in (B(\mathcal{C}_{bp}) : \mathcal{CS}_\vartheta)$ ako i samo ako (4.1)-(4.3), (4.4) i (4.5) važe za $e(m,n)$ umesto a_{mnkl}.*

(iii) *$A \in (B(\mathcal{C}_r) : \mathcal{CS}_\vartheta)$ ako i samo ako (4.1)-(4.3), (4.8) i (4.9) važe za $e(m,n)$ umesto a_{mnkl}.*

(iv) *$A \in (B(\mathcal{L}_q) : \mathcal{CS}_{bp})$ ako i samo ako (4.2) i (4.11) važe za $1 < q < \infty$ i $e(m,n)$ umesto a_{mnkl}.*

(v) *$A \in (B(\mathcal{L}_q) : \mathcal{CS}_{bp})$ ako i samo ako (4.2) i (4.10) važe za $0 < q \leq 1$ i h $e(m,n)$ umesto a_{mnkl}.*

(vi) *$A \in (B(\mathcal{L}_q) : \mathcal{BS})$ ako i samo ako (4.10) važi za $0 < q < 1$ i $e(m,n)$ umesto a_{mnkl}.*

(vii) *$A \in (B(\mathcal{L}_q) : \mathcal{BS})$ ako i samo ako (4.11) važi za $1 < q < \infty$ i $e(m,n)$ umesto a_{mnkl}.*

(viii) *$A \in (B(\mathcal{M}_u) : \mathcal{CS}_{bp})$ ako i samo ako (4.1), (4.3), (4.12), (4.13),(4.14) i (4.15) važe za $e(m,n)$ umesto a_{mnkl}*

(ix) *$A \in (B(\mathcal{M}_u) : \mathcal{CS}_p)$ ako i samo ako (4.2), (4.6) i (4.7) važe za $e(m,n)$ umesto a_{mnkl}*

(x) *$A \in (B(\mathcal{C}_{bp}) : \mathcal{BS})$ ako i samo ako (4.1) važi za $e(m,n)$ umesto a_{mnkl}.*

Takodje možemo dati sledeće rezultate koji proizilaze iz Teorema (4.1), (4.2) i (4.3) i dokazani su od Altaya i Başara [Altay and Başar(2005)] primenom relacije (5.5).

Posledica 48. *Neka su elementi četvorodimenzionalnih matrica $A = (a_{mnkl})$ i $G = (g_{mnkl})$ povezani relacijom (5.5). Tada $A = (a_{mnkl}) \in (\mathcal{CS}_{bp} : B(\mathcal{C}_p))$ ako i samo ako uslovi (4.1) i (4.2) važe z $\Delta_{11}^{kl} g_{mnkl}$ umesto a_{mnkl} i pored toga važe sledeći uslovi*

(i) *$\lim_{l\to\infty} \Delta_{10}^{kl} g_{mnkl} = 0$ za svako fiksirano $k \in \mathbb{N}$ za svako $m, n \in \mathbb{N}$,*

(ii) *$\lim_{k\to\infty} \Delta_{01}^{kl} g_{mnkl} = 0$ za svako fiksirano $l \in \mathbb{N}$ za svako $m, n \in \mathbb{N}$,* *(iii)* $\exists g_{kl} \in \mathbb{C} \ni bp - \lim_{m,n\to\infty} \sum_l |\Delta_{10}^{kl} g_{mnkl}| = \sum_k |g_{kl}|$

Posledica 49. *Neka su elementi četvorodimenzionalnih matrica $A = (a_{mnkl})$ i $G = (g_{mnkl})$ povezani relacijom (5.5). Tada $A = (a_{mnkl}) \in (\mathcal{CS}_r : B(\mathcal{C}_p))$ ako i samo ako uslov (4.1) važi za $\Delta_{11}^{kl} g_{mnkl}$ umesto a_{mnkl} i pored toga važe sledeći uslovi*

(i) $(g_{mnk0})_{k\in\mathbb{N}}, (g_{mn0l})_{l\in\mathbb{N}} \in bv$ *za svakom*, $n \in \mathbb{N}$,

(ii) $\exists L \in \mathbb{N} \ni \Delta_{11}^{kl} g_{mnkl} = 0$ *za svako* $k \in \mathbb{N}$*uvek kada su* $m, n, l > L$,

(iii) $\exists K \in \mathbb{N} \ni \Delta_{11}^{kl} g_{mnkl} = 0$*za svako* $l \in \mathbb{N}$*uvek kada su* $m, n, k > K$,

(iv) $\exists g_{kl} \in \mathbb{C} \ni p - \lim_{m,n\to\infty} \sum_l |\Delta_{10}^{kl} g_{mnkl}| = \sum_k |g_{kl}|$

Posledica 50. *Neka su elementi četvorodimenzionalnih matrica $A = (a_{mnkl})$ i $G = (g_{mnkl})$ povezani relacijom (5.5). Tada $A = (a_{mnkl}) \in (\mathcal{CS}_r : B(\mathcal{C}_r))$ ako i samo ako uslov (4.1) važi za $\Delta_{11}^{kl} g_{mnkl}$ umesto a_{mnkl} i uslovi Posledice (49) važe i pored toga važe sledeći uslovi*

(i) $r - \lim_{m,n\to\infty} \Delta_{11}^{kl} g_{mnkl} = g_{kl}$ *za svako* $l_0 \in \mathbb{N}$,

(ii) $r - \lim_{m,n\to\infty} \sum_k \Delta_{11}^{kl} g_{mnkl} = u_{l_0}$ *za svako* $l_0 \in \mathbb{N}$,

(iii) $r - \lim_{m,n\to\infty} \sum_l \Delta_{11}^{kl} g_{mnkl} = u_{k_0}$ *za svako* $k_0 \in \mathbb{N}$,

(iv) $r - \lim_{m,n\to\infty} \sum_{k,l} \Delta_{11}^{kl} g_{mnkl} = u$

Posledica 51. $A = (a_{mnkl}) \in (B(\mathcal{C}_p) : \mathcal{C}_p; p)$ *ako i samo ako*

(i) $p - \lim_{m,n\to\infty} e_{mnkl} = 0$ *za svako* $k, l \in \mathbb{N}$,

(ii) $p - \lim_{m,n\to\infty} \sum_{k,l} e_{mnkl} = 1$,

(iii) $p - \lim_{m,n\to\infty} \sum_k |e_{mnkl}| = 0$ *za svako* $l \in \mathbb{N}$,

(iv) $p - \lim_{m,n\to\infty} \sum_l |e_{mnkl}| = 0$ *za svako* $k \in \mathbb{N}$,

(v) $\exists v \in \mathbb{C} \ni p - \lim_{m,n\to\infty} \sum_{k,l} |e_{mnkl}| = v$ *za svako* $l \in \mathbb{N}$,

(vi) $\sup_{K\in\mathbb{N}} \sum_{k,l>K} |e_{mnkl}| < \infty$.

Posledica 52. *Neka je* $A = (a_{mnkl})$ *četvorodimenzionalna beskonačna matrica. Tada važe sledeći iskazi.*

(i) $A \in (\mathcal{C}_p : B(\mathcal{C}_p); p)$ *ako i samo ako (51)-(51) važe za* f_{mnkl} *umesto* a_{mnkl}.

(ii) $A \in (B(\mathcal{C}_p) : B(\mathcal{C}_p); p)$ *ako i samo ako (51)-(51) važe za* h_{mnkl} *umesto* a_{mnkl}.

(iii) $A \in (B(\mathcal{C}_p) : \mathcal{CS}_p; p)$ *ako i samo ako (51)-(51) važe za* $e(m,n)$ *umesto* a_{mnkl}.

(iv) $A \in (\mathcal{CS}_p : B(\mathcal{C}_p); p)$ *ako i samo ako (51)-(51) važe za* $\Delta_{11}^{kl} g_{mnkl}$ *umesto* a_{mnkl}

Sada možemo dati sledeće nove značajne rezultate za četvorodimenzionalne beskonačne matrice $A = (a_{mnkl})$.

Posledica 53. *Važe sledeći iskazi.*

(i) $A \in (B(\mathcal{C}_{bp}) : \mathcal{C}_f)$ *ako i samo ako (4.16)-(4.20) važe za* e_{mnkl} *umesto* a_{mnkl}.

(ii) $A \in (B(\mathcal{C}_r) : \mathcal{C}_f)$ *ako i samo ako (4.16)-(4.18) i (4.21)-(4.22) važe za* e_{mnkl} *umesto* a_{mnkl}.

(iii) $A \in (B(\mathcal{C}_p) : \mathcal{C}_f)$ *ako i samo ako (4.16)-(4.18) važe za* e_{mnkl} *umesto* a_{mnkl}.

(iv) $A \in (B(\mathcal{M}_u) : \mathcal{C}_f)$ *ako i samo ako (4.16) i (4.29)-(4.31) važe za* e_{mnkl} *umesto* a_{mnkl}.

(v) $A \in (B(\mathcal{C}_f) : \mathcal{C}_{bp})$ *ako i samo ako (4.16) i (4.23)-(4.28) važe za* e_{mnkl} *umesto* a_{mnkl}.

Posledica 54. *Važe sledeći iskazi.*

(i) $A \in (\mathcal{C}_p : B(\mathcal{C}_f))$ *ako i samo ako (4.16)-(4.18) važe za* g_{mnkl} *umesto* a_{mnkl}.

(ii) $A \in (\mathcal{C}_{bp} : B(\mathcal{C}_f))$ *ako i samo ako (4.16)-(4.20) važe za* g_{mnkl} *umesto* a_{mnkl}.

(iii) $A \in (\mathcal{C}_r : B(\mathcal{C}_f))$ *ako i samo ako (4.16)-(4.18) i (4.21)-(4.22) važe za* g_{mnkl} *umesto* a_{mnkl}.

(iv) $A \in (\mathcal{M}_u : B(\mathcal{C}_f))$ *ako i samo ako (4.16) i (4.29)-(4.31) važe za* g_{mnkl} *umesto* a_{mnkl}.

(v) $A \in (\mathcal{C}_f : B(\mathcal{C}_{bp}))$ *ako i samo ako (4.16) i (4.23)-(4.28) važe za* g_{mnkl} *umesto* a_{mnkl}.

Posledica 55. *Važe sledeći iskazi.*

(i) $A \in (B(\mathcal{C}_p) : B(\mathcal{C}_f))$ *ako i samo ako (4.16)-(4.18) važe za* h_{mnkl} *umesto* a_{mnkl}.

(ii) $A \in (B(\mathcal{C}_{bp}) : B(\mathcal{C}_f))$ *ako i samo ako (4.16)-(4.20) važe za* h_{mnkl} *umesto* a_{mnkl}.

(iii) $A \in (B(\mathcal{C}_r) : B(\mathcal{C}_f))$ *ako i samo ako 4.16)-(4.18) i (4.21)-(4.22) važe za* h_{mnkl} *umesto* a_{mnkl}.

(iv) $A \in (B(\mathcal{M}_u) : B(\mathcal{C}_f))$ *ako i samo ako (4.16) i (4.29)-(4.31) važe za* h_{mnkl} *umesto* a_{mnkl}.

(v) $A \in (B(\mathcal{C}_f) : B(\mathcal{C}_{bp}))$ *ako i samo ako (4.16) i (4.23)-(4.28) važe za* h_{mnkl} *umesto* a_{mnkl}.

(vi) $A \in (B(\mathcal{C}_f) : B(\mathcal{M}_u))$ *ako i samo ako (4.16) važi za* h_{mnkl} *umesto* a_{mnkl}.

Posledica 56. *Važe sledeći iskazi.*

(i) $A \in (B(\mathcal{C}_f) : \mathcal{CS}_{bp})$ *ako i samo ako (4.16) i (4.23)-(4.28) važe za* $e(m,n)$ *umesto* a_{mnkl}.

(ii) $A \in (B(\mathcal{C}_f) : \mathcal{BS})$ *ako i samo ako (4.16) važi za* $e(m,n)$ *umesto* a_{mnkl}.

Posledica 57. *Važe sledeći iskazi.*

(i) $A \in (B(\mathcal{C}_f) : \mathcal{C}_f; p)$ *ako i samo ako (4.16), (4.32)-(4.37) važe za* e_{mnkl} *umesto* a_{mnkl}.

(ii) $A \in (\mathcal{C}_f : B(\mathcal{C}_f); p)$ *ako i samo ako (4.16), (4.32)-(4.37) važe za* g_{mnkl} *umesto* a_{mnkl}.

(iii) $A \in (B(\mathcal{C}_f) : B(\mathcal{C}_f); p)$ *ako i samo ako ((4.16), (4.32)-(4.37) važe za* h_{mnkl} *umesto* a_{mnkl}.

Posledica 58. *Neka su elementi četvorodimenzionalnih beskonačnih matrica* $A = (a_{mnkl})$ *i* $H = (h_{mnkl})$ *povezani relacijom*

$$h_{mnkl} = \sum_{i,j=k,l}^{m,n} b_{mnij} e_{ijkl} \text{ za svako } m,n,k,l \in \mathbb{N}.$$

Tada važe sledeći iskazi.

(i) Ako je $0 < s' \leq 1$. *Tada* $A \in (B(\mathcal{L}_{s'}) : B(\mathcal{C}_f))$ *ako i samo ako (5.11) i (5.12) važe za* h_{mnkl} *umesto* a_{mnkl}.

(ii) Ako je $1 < s' < \infty$. *Tada* $A \in (B(\mathcal{L}_{s'}) : B(\mathcal{C}_f))$ *ako i samo ako (5.12) i (5.13) važe za* h_{mnkl} *umesto* a_{mnkl}.

Glava 6

Primena Hausdorffove mere nekompaktnosti na matrične operatore izmedju B-Summabilnih prostora dvostrukih nizova

U ovom poglavlju, subklasa $\mathcal{K}(X,Y)$ kompaktnih operatora, gde je $X = \{B(\mathcal{M}_u), B(\mathcal{C}_\vartheta), B(\mathcal{C}_{\vartheta 0}), B(\mathcal{L}_q)(1 < q < \infty), B(\mathcal{L}_u)\}$ i $Y = \{\mathcal{M}_u, \mathcal{C}_\vartheta, \mathcal{C}_{\vartheta 0}, \mathcal{L}_q, \mathcal{L}_u\}$ pri čemu je $\vartheta = \{bp, r\}$ je karakterizovana pomoću Hausdorffove mere nekompaktnosti za matrične operatore na pojedinim prostorima dvostrukih nizova.

Iznećemo najpre neke osnove ovog poglavlja

6.1 Schauderova dvostruka baza

Koncept Schauderove dvostruke baze nedavno je uveden i proučen od strane Loganathan S. u [Loganathan and Moorthy(2016)]. On je definisao uopštenu dvostruku bazu i Schauderovu dvostruku bazu, pored toga je izneo i pojedine primene. Ovaj novi koncept koji uključuje više uslova je složeniji nego Schauderov baza klasičnih jednostrukih nizova. U ovoj sekciji, definisali smo dvostruku osnovu i neke potrebne informacije.

Definicija 29. *Dvostruki niz (x_{mn}) u konačno dimenzionalno topološko vektorskom prostoru (TVS) X je dvostruka baza X, ako za svako $x \in X$, postoji jedinstveni dvostruki niz skalara α_{mn} tako da $\sum \alpha_{mn} x_{mn}$ konvergira ka x, odnosno, $x = \sum \alpha_{mn} x_{mn}$.*

Pretpostavimo da je (a_{mn}) dvostruki niz skalara i definišimo normu

$$\|a_{mn}\| = \sup \left\{ \left| \sum_{k,l=1}^{m,n} a_{kl} \right| : (m,n) \in \mathbb{N}x\mathbb{N} \right\}. \tag{6.1}$$

Neka je X skup svih dvostrukih nizova skalara (a_{mn}) čija je norma $\|a_{mn}\|$ konačna. Tada, je par $(X, \|.\|)$ Banachov prostor sa uobičajenim koordinatnim sabiranjem i skalarnim množenjem.

Sada, definišimo e^{kl}_{mn}, e^{l}, e_k *i* e kao dvostruki niz (a_{mn}) skalara tako da je

$$e^{kl}_{mn} = \begin{cases} 1 & , \quad (k,l) = (m,n); \\ 0 & , \quad inae. \end{cases}, \tag{6.2}$$

$e^1 = \sum_k e^{kl}$, dvostruki niz takav da su svi elementi l-te kolone jedan, ostali nula

$e_k = \sum_l e^{kl}$, dvostruki niz takav da su svi elementi k-te vrste jedan, ostali nula

$e = \sum_{kl} e^{kl}$dvostruki niz čiji su svi elementi jednaki nuli.

Pokazano je u [Loganathan and Moorthy(2016)] da za svako $a_{mn} \in X$, relacija $a_{mn} = \sum_{kl} a_{mn} e^{kl}_{mn}$ ne mora važiti, ovo znači da ako je $a_{1,n} = (-1)^n$ i $a_{mn} = 0$ za $m \neq 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Tada je $a_{mn} \in X$ ali $\sum_{kl} a_{mn} e^{kl}_{mn}$ ne konvergira u X.

Definicija 30. *[Loganathan and Moorthy(2016)] Dvostruka baza (b_{mn}) u topološko vektrorskom prostoru X je Schauderova dvostruka baza, ako je funkcional koeficijenata f_{mn} definisan sa*

$$f_{mn}(\sum_{kl} a_{kl} b_{kl}) = a_{kl}, \tag{6.3}$$

za $\sum_{kl} a_{kl} b_{kl} \in X$ i $(m,n) \in \mathbb{N}x\mathbb{N}$, linearni neprekidni funkcional na X. Za datu dvostruku bazu (b_{mn}) koeficijentni funkcional ima oblik dvostrukog niza f_{mn}. Dvostruki niz f_{mn} naziva se pridruženi dvostruki niz funkcionala za (b_{mn}).

Svaka baza u kompletno metrizabilnom prostoru je Schauderova baza.

Definicija 31. *Dvostruka baza (x_{mn}) u topološko vektorskom prostoru X je rcb dvostruka baza, ako za svako fiksirano $k = 1, 2, ...,$ $\left\{\sum_{j=1}^{m} \alpha_{jk} x_{jk} : m = 1, 2, ...\right\}$ ograničena i za svako fiksirano $j = 1, 2, ...,$ $\{\sum_{k=1}^{n} \alpha_{jk} x_{jk} : n = 1, 2, ...\}$ ograničena, uvek kada $\sum \alpha_{jk} x_{jk}$ konvergira u X.*

6.2 Hausdorffova mera nekompaktnosti za matrične operatore između prostora dvostrukih nizova

U ovoj sekciji, uvodimo Hausdorffovu meru nekompaktnosti za četvorodimenzionalne matrične operatore nekih dvostrukih prostora nizova, pored toga iznosimo i izučavamo karakterizaciju kompaktnih operatora na dvostruke prostore nizova.

Definicija 32. *Neka su X i Y Banachovi prostori. Linearni operator $L : X \to Y$ nazivamo kompaktnim ako je ceo X i za svaki ograničen dovstruki niz (x_{mn}) iz X, niz $L(x_{mn})$ ima konvergentan podniz u Pringsheimovom smislu u Y. Označavamo skup svih kompaktnih operatora sa $\mathcal{K}(X, Y)$.*

Definicija 33. *Neka je X Banachov prostor i neka je $\mathcal{M}_X$ ograničen podskup skupa X. Tada je funkcional $\mu : \mathcal{M}_X \to [0, \infty)$ mera nekompaktnosti ako*

(i) $\mu(Q) = 0$ *ako i samo ako je Q relativno kompaktan(totalno ograničen),*

(ii) $\mu(Q) = \mu(\bar{Q})$ *za svako $Q \in \mathcal{M}_X$,*

(iii) $\mu(Q_1 \cup Q_2) = \max\{\mu(Q_1), \mu(Q_2)\}$ *za svako $Q_1, Q_2 \in \mathcal{M}_X$.*

Hausdorffovu mera nekompaktnosti(ili loptastu meru nekompaktnosti), su uveli i izučili Goldenštein, Gohberg i Markus
[Gohberg et al.(1957)Gohberg, Goldenstein, and Markus](videti [Malkowsky and Rakočević, 2019] za više detalja).

Definicija 34. *[Gohberg et al.(1957)Gohberg, Goldenstein, and Markus] Neka je (X, d) metrički prostor i neka je Q ograničen podskup skupa X. Tada Hausdorffovu ili ball meru nekompaktnosti ili $\chi-$meru skupa Q, označavamo sa $\chi(Q)$, is definišemo kao infimum skupa za svako $\epsilon > 0$ tako da Q može biti pokriveno konačnim brojem lopti radii $< \epsilon$, odnostno,*

$$\chi(Q) = \inf\left\{\epsilon > 0 : Q \subset \bigcup_{i=1}^{n} B(x_i, r_i),\ x_i \in X,\ r_i < \epsilon \quad (i = 1, 2, 3, ..., n) \quad n \in \mathbb{N}\right\}.$$

Funkciju χ nazivamo Hausdorffovom merom nekompaktnosti.

Treba ovde napomenuti da za Hausdorffova mera nekompaktnosti skupa Q centar lopte koja prekriva skup Q ne mora pripadati Q. Dakle, jednakost (34) se može ekvivalentno formulisati kao što sledi:

$$\chi(Q) = \inf\{\epsilon > 0 : Q \text{ sadri konanu } \epsilon - \text{mreu u } X\}.$$

Neka je X Banachov prostor sa Schauderovom dvostrukom bazom $(b_{mn})_{m,n=1}^{\infty}$. Tada svako $x \in X$ možemo na jedinstveni način predstaviti sa

$$x = \sum_{m,n=1}^{\infty} \alpha_{mn}(x) b_{mn}$$

pri čemu je funkcija $\alpha_{mn}(x)$ baza funckionala. Neka je $P_{mn} : X \to X$ projekcija linearnog spana $(b_{kl})_{k,l=1}^{m,n}$., odnosno,

$$P_{mn}(x) = \sum_{k,l=1}^{mn} \alpha_{kl}(x) b_{kl}.$$

Tada, na osnovu Banach-Steinhausove teoreme, operatori P_{mn} i $I - P_{mn}$ su ekviograničeni.

Teorema 59. *Pretpostavimo da je X Banachov prostor sa Schauderovom dvostrukom bazom $(b_{kl})_{k,l=1}^{\infty}$, Q ograničen podskup skupa X, $P_{mn} : X \to X$ projekcija linearnog spana $(b_{kl})_{k,l=1}^{m,n}$ i*

$$\mu(Q) = \lim \sup_{m,n\to\infty} (\sup_{x\in Q} \|(I - P_{mn})x\|),$$

tada važe sledeće nejednakosti:

$$\frac{1}{a}\mu(Q) \le q(Q) \le \inf_{m,n} \sup_{x\in Q} \|(I - P_{mn})x\| \le \mu(Q),$$

pri čemu je $a = \limsup_{m,n\to\infty} \|I - P_{mn}\|$

Definicija 35. *Neka su X i Y proizvoljni prostori dvostrukih nizova koji su Banachovi prostori i pretpostavimo da operator $L \in \mathfrak{B}(X, Y)$. Tada Hausdorffovu meru nekompaktnosti operatora L označavamo sa $\|L\|_q^2$ definišemo na sledeći način*

$$\|L\|_q^2 = q(AB_1) \quad gdeje \quad B_1 = \{x \in X : \|x\| \le 1\} \tag{6.4}$$

Dakle, L je kompaktan ako i samo ako važi $\|L\|_q^2 = 0$.

Teorema 60. *Neka je $L \in \mathfrak{B}(\mathcal{C}_\vartheta, \mathcal{C}_\vartheta)$ i neka je $\vartheta = \{bp, bp0, r, r0\}$ i neka je*

$$\exists \alpha \in \mathbb{C} \ \ni, \quad \vartheta - \lim_{m,n\to\infty} \sum_{kl} a_{mnkl} = \alpha, \tag{6.5}$$

$$\exists a_{kl} \in \mathbb{C} \ \ni, \quad \vartheta - \lim_{m,n\to\infty} a_{mnkl} = a_{kl}, \quad k, l \in \mathbb{N}. \tag{6.6}$$

Tada, važe sledeće nejednakosti.

$$\frac{1}{2} \lim_{m,n\to\infty} \sup \left(\left| a_{mn00} - \alpha + \sum_{k,l=1}^{\infty} a_{kl} \right| + \sum_{k,l=1}^{\infty} |a_{mnkl} - a_{kl}| \right)$$
$$\le \|A\|_q^2 \le \lim_{m,n\to\infty} \sup \left(\left| a_{mn00} - \alpha + \sum_{k,l=1}^{\infty} a_{kl} \right| + \sum_{k,l=1}^{\infty} |a_{mnkl} - a_{kl}| \right)$$

Dokaz. Pretpostavimo da važi $L \in \mathfrak{B}(\mathcal{C}_\vartheta, \mathcal{C}_\vartheta)$ i da dvostruki niz $x = (x_{mn}) \in \mathcal{C}_\vartheta$,

$\vartheta - \lim_{m,n\to\infty} x_{mn} = x_{00}$ i $Ax = y$. Tada važi

$$y_{mn} = (L(x))_{mn} = a_{mn00}x_{00} + \sum_{k,l=1}^{\infty} a_{mnkl}x_{kl}, \qquad m, n = 1, 2, ...$$

i

$$y_{00} = \lim_{m,n\to\infty} y_{mn} = x_{00}\left(\alpha - \sum_{k,l=1}^{\infty} a_{kl}\right) + \sum_{k,l=1}^{\infty} a_{kl}x_{kl}.$$

Elementi $e = \sum_{kl} e^{kl}$ i e^{kl}_{mn} određeni sa (6.2) su iz skupa $\mathcal{C}_\vartheta$. Neka je

$$P_{mn} : \mathcal{C}_\vartheta \to \mathcal{C}_\vartheta$$

projekcija određena sa

$$P_{mn}(x) = x_{00}e + \sum_{k,l=1}^{m,n} (x_{kl} - x_{00})e^{kl}_{mn},$$

očigledno $\|I - P_{mn}\| = 2$ na osnovu jednakosti (3.2) važiće

$$\begin{aligned}
\sup_{\|x\|\le 1} \|(I - P_{mn})Ax\| &= \sup_{\|x\|\le 1} \sup_{\substack{i\ge m+1,\\ j\ge n+1}} |y_{ij} - y_{00}| \\
&= \sup_{\|x\|\le 1} \sup_{\substack{i\ge m+1,\\ j\ge n+1}} \left| a_{ij00}x_{00} + \sum_{k,l=1}^{\infty} a_{ijkl}x_{kl} - \left(x_{00}\left(\alpha - \sum_{k,l=1}^{\infty} a_{kl}\right) + \sum_{k,l=1}^{\infty} a_{kl}x_{kl}\right)\right| \\
&= \sup_{\|x\|\le 1} \sup_{\substack{i\ge m+1,\\ j\ge n+1}} \left| x_{00}\left(a_{ij00} - \alpha + \sum_{k,l=1}^{\infty} a_{kl}\right) + \sum_{k,l=1}^{\infty} (a_{ijkl} - a_{kl}x_{kl})\right| \\
&= \sup_{\substack{i\ge m+1,\\ j\ge n+1}} \left(\left| a_{ij00} - \alpha + \sum_{k,l=1}^{\infty} a_{kl}\right| + \sum_{k,l=1}^{\infty} |a_{ijkl} - a_{kl}|\right).
\end{aligned}$$

Takođe na osnovu jednakosti (3.2) i na osnovu prethodnih jednakosti možemo zaključiti dokaz teoreme. □

Teorema 61. *Neka je $L \in \mathfrak{B}(\mathcal{C}_\vartheta)$ pri čemu je $\vartheta = \{bp, bp0, r, r0\}$. L je kompaktan ako i samo ako*

$$\vartheta - \lim_{m,n\to\infty} \left(\left| a_{mn00} - \alpha + \sum_{k,l=1}^{\infty} a_{kl}\right| + \sum_{k,l=1}^{\infty} |a_{mnkl} - a_{kl}|\right) = 0$$

Dokaz. Dokaz sledi iz jednakosti (6.5) i (6.6) i činjenica $\alpha = 1$ i $a_{kl} = 0$ za svako $k, l \in \mathbb{N}$. Dokaz ove teoreme preskačemo da bismo izbegli ponavaljanje. □

Posledica 62. *Neka je* $L \in \mathfrak{B}(\mathcal{C}_\vartheta)$ *gde je* $\vartheta = \{bp, bp0, r, r0\}$ *regularna trnasformacija. Tada je L komapkt ako i samo ako*

$$\vartheta - \lim_{m,n\to\infty}\left(|a_{mn00} - 1| + \sum_{k,l=1}^{\infty}|a_{mnkl}|\right) = 0$$

6.3 Primena Hausdorffove mere nekompaktnosti na matrične operatore između B-Sumabilnih prostora dvostrukih nizova

U ovoj sekciji određujemo Hausdorffovu meru nekompaktnosti matričnih operatora na određene B-sumabilne prostore dvostrukih nizova. B-sumabilnost prostora dvostrukih nizova su uveli i izučavali Tug i Başar [Tuğ and Başar(2016)], and Tug [Tuğ(2017a)]-[Tuğ(2018)].

Dakle, kao u poglavlju 5, pretpostavimo da četvorodimenzionalne matrice $A = (a_{mnkl})$ i $E = (e_{mnkl})$ transofrmišu nizove $x = (x_{mn})$ i $y = (y_{mn})$ koji su povezani relacijom (3.1) sa dvostrukim nizovima $s = (s_{mn})$ i $z = (z_{mn})$, respektivno, odnosno

$$s_{mn} = (Ax)_{mn} = \sum_{k,l=0}^{\infty} a_{mnkl}x_{kl} \text{ za svako } m, n \in \mathbb{N}, \tag{6.7}$$

$$z_{mn} = (Ey)_{mn} = \sum_{k,l=0}^{\infty} e_{mnkl}y_{kl} \text{ za svako } m, n \in \mathbb{N}. \tag{6.8}$$

Očigledno je da je metod B primenjen na $B(r, s, t, u)-$transformaciju niza x, dok se metod A primenjuje na elemente niza x. Tada, možemo reći da su metodi A i E suštinski različiti.

Pretpostavimo da uobičajeni proizvod matrica $EB(r, s, t, u)$ postoji što je mnogo slabija hipoteza od uslova da matrica E pripada bilo kojoj klasi matrica, u globalu. U ovom slučaju, kažemo da matrice A i E u (6.7) i (6.8) dualni sumabilni metodi ako se s redukuje na z ili obrnuto koristeći uobičajeno sumiranje po delovima. Ovo nas dovodi do činjenica da $EB(r, s, t, u)$ postoji i jednak je A i $Ax = \{EB(r, s, t, u)x\} = E\{B(r, s, t, u)x\} = Ey$ formalno važi, ako jedna strane jednakosti postoji. Ova izjava je ekvivalentna odnosu između elemenata matrica $A = (a_{mnkl})$ i $E = (e_{mnkl})$

$$a_{mnkl} = sue_{mn,m-1,n-1} + ste_{mn,m-1,n} + rue_{mnm,n-1} + rte_{mnmn}$$

ili ekvivalentno

$$e_{mnkl} = \sum_{i,j=k,l}^{\infty}\left(\frac{-s}{r}\right)^{i-k}\left(\frac{-u}{t}\right)^{j-l}\frac{a_{mnij}}{rt} \tag{6.9}$$

za svako $m, n, k, l \in \mathbb{N}$. Trivijalno relacija (6.3) između elemenata matrica $A = (a_{mnkl})$ i $E = (e_{mnkl})$ može biti navedena matričnim proizvodom, kao što sledi;

$$A = EB(r, s, t, u) \text{ ili ekvivalentno } E = AF(r, s, t, u).$$

Teorema 63. *Neka je X normiran prostor i neka χ_T i χ predstavljaju Hausdorffove mere nekompaktnosti na $\mathcal{M}_{X_T}$ i $\mathcal{M}_X$, kolekcijama svih ograničenih skupova u X_T i X, respektivno. Tada,*

$$\chi_T(Q) = \chi(T(Q)), \quad za \quad svako \quad Q \in \mathcal{M}_{X_T} \tag{6.10}$$

Teorema 64. *Ako je $A \in (B(X), Y)$ za $X = \{\mathcal{C}_{\vartheta 0}, \mathcal{M}_u\}$ i $Y = \{\mathcal{C}_{\vartheta 0}, \mathcal{C}_\vartheta, \mathcal{M}_u\}$ pri čemu je $\vartheta = \{bp, r\}$, tada*

$$\|A\|_{(B(X),Y)} = \sup_{m,n\in\mathbb{N}} \|E_{mn}\|_q^2 = \sup_{m,n\in\mathbb{N}} \sum_{k,l} |e_{mnkl}|.$$

Teorema 65. *Ako je $A \in (B(\mathcal{L}_{s'}), \mathcal{M}_u)$ ili $A \in (B(\mathcal{L}_{s'}), \mathcal{C}_{bp})$, tada*

$$\|A\|_{(B(\mathcal{L}_{s'}),Y)} = \sup_{m,n\in\mathbb{N}} \|E_{mn}\|_q^2 = \sup_{m,n\in\mathbb{N}} \sum_{k,l} |e_{mnkl}|^{s'}, \quad za \quad 1 < s' < \infty.$$

i

$$\|L_A\|_q^2 = \lim_{i,j\to\infty} \left(\sup_{\substack{m\geq i,\\ n\geq j}} \|E_{mn}\|_q^2 \right) = \lim_{i,j\to\infty} \left(\sup_{\substack{m\geq i,\\ n\geq j}} \sum_{k,l} |e_{mnkl}|^{s'} \right), \quad za \quad 1 < s' < \infty.$$

Teorema 66. *Ako je $A \in (B(\mathcal{L}_u), Y)$ za $Y = \{\mathcal{C}_{\vartheta 0}, \mathcal{C}_\vartheta, \mathcal{M}_u\}$ gde je $\vartheta = \{bp, r\}$, tada*

$$\|A\|_{(B(\mathcal{L}_u),Y)} = \sup_{m,n\in\mathbb{N}} \|E_{mn}\|_q^2 = \sup_{m,n\in\mathbb{N}} |e_{mnkl}|.$$

i

$$\|L_A\|_q^2 = \lim_{i,j\to\infty} \left(\sup_{\substack{m\geq i,\\ n\geq j}} \|E_{mn}\|_q^2 \right) = \lim_{i,j\to\infty} \left(\sup_{\substack{m\geq i,\\ n\geq j,\\ k,l\in\mathbb{N}}} |e_{mnkl}| \right).$$

Teorema 67. *Ako je $A \in (B(\mathcal{C}_\vartheta), \mathcal{C}_{\vartheta 0})$ ili $A \in (B(\mathcal{M}_u), \mathcal{C}_{\vartheta 0})$ pri čemu je $\vartheta = \{bp, bp0, r, r0\}$,tada*

$$\|L_A\|_q^2 = \lim_{i,j\to\infty} \left(\sup_{\substack{m\geq i,\\ n\geq j}} \|E_{mn}\|_q^2 \right) = \lim_{i,j\to\infty} \left(\sup_{\substack{m\geq i,\\ n\geq j}} \sum_{k,l} |e_{mnkl}| \right).$$

Teorema 68. *(a) Svako $L \in \mathfrak{B}\left(B(\mathcal{C}_\vartheta), \mathcal{C}_\vartheta\right)$ gde je $\vartheta = \{bp, bp0, r, r0\}$ je određeno matricom, $E = (e_{mnkl})$ koja je definisana sa (6.9) tako da je*

$$L(x) = \left(e_{mn00}x_{00} + \sum_{k,l=1}^{\infty} e_{mnkl}x_{kl} \right)_{m,n=1}^{\infty} \qquad za\ svako\ x \in B(\mathcal{C}_\vartheta),$$

gde je $x_{00} = \vartheta - \lim_{m,n\to\infty} x_{kl}$ *i takođe*

$$\exists \alpha \in \mathbb{C} \ \ni, \quad \vartheta - \lim_{m,n\to\infty} \sum_{kl} e_{mnkl} = \alpha,$$
$$\exists e_{kl} \in \mathbb{C} \ \ni, \quad \vartheta - \lim_{m,n\to\infty} e_{mnkl} = e_{kl}, \qquad k,l \in \mathbb{N},$$

i

$$\|L\| = \sup_{m,n\in\mathbb{N}} \left(|e_{mn00}| + \|E_{mn}\|_{\mathcal{M}_u}\right)$$

pored toga,

$$\lim_{m,n\to\infty} (L(x))_{mn} = x_{00}\left(\alpha - \sum_{k,l=1}^{\infty} e_{kl}\right) + \sum_{k,l=1}^{\infty} e_{kl}x_{kl} \text{ za svako } x \in B(\mathcal{C}_\vartheta)$$

(b) Ako je $L \in \mathfrak{B}\left(B(\mathcal{C}_\vartheta), \mathcal{C}_\vartheta\right)$ *tada važi*

$$\frac{1}{2} \lim_{m,n\to\infty} \sup \left(\left|e_{mn00} - \alpha + \sum_{k,l=1}^{\infty} e_{kl}\right| + \|(e_{mnkl} - e_{kl})_{k,l=1}^{\infty}\|_{\mathcal{M}_u}\right)$$
$$\leq \|A\|_q^2 \leq \lim_{m,n\to\infty} \sup \left(\left|e_{mn00} - \alpha + \sum_{k,l=1}^{\infty} e_{kl}\right| + \|(e_{mnkl} - e_{kl})_{k,l=1}^{\infty}\|_{\mathcal{M}_u}\right)$$

pri čemu je

$$\|(e_{mnkl} - e_{kl})_{k,l=1}^{\infty}\|_{\mathcal{M}_u} = \sup_{m,n\in\mathbb{N}} \sum_{k,l=1}^{\infty} |e_{mnkl} - e_{kl}|\,.$$

Lema 69. *[Yeşilkayagil and Başar(2018), Theorem 4.7] Neka su* $\lambda, \mu \in \{\mathcal{M}_u, \mathcal{C}_p, \mathcal{C}_{bp}, \mathcal{C}_r, \mathcal{L}_q\}$, *i elementi četvorodimenzionalnih matrica* $A = (a_{mnkl})$ *i* $G = (g_{mnkl})$ *povezani relacijom*

$$g_{mnkl} = \sum_{i,j=0}^{m,n} b_{mnij}(r,s,t,u)a_{ijkl} \quad \text{za svako} \quad m,n,k,l \in \mathbb{N}. \tag{6.11}$$

Tada je, $A \in (\mu : B(\lambda))$ *ako i samo ako* $G \in (\mu : \lambda)$.

Posledica 70. *(a) Svako* $L \in \mathfrak{B}\left(\mathcal{C}_{\vartheta}, B(\mathcal{C}_{\vartheta})\right)$ *gde je* $\vartheta = \{bp, bp0, r, r0\}$ *je određeno matricom* $G = (g_{mnkl})$ *koja je definisana sa (6.11) tako da*

$$L(x) = \left(g_{mn00}x_{00} + \sum_{k,l=1}^{\infty} g_{mnkl}x_{kl}\right)_{m,n=1}^{\infty} \qquad \text{za svako } x \in \mathcal{C}_{\vartheta},$$

pri čemu je $x_{00} = \vartheta - \lim_{m,n\to\infty} x_{kl}$ *i*

$$\exists \alpha \in \mathbb{C} \;\ni, \quad \vartheta - \lim_{m,n\to\infty} \sum_{kl} g_{mnkl} = \alpha,$$
$$\exists g_{kl} \in \mathbb{C} \;\ni, \quad \vartheta - \lim_{m,n\to\infty} g_{mnkl} = g_{kl}, \quad k, l \in \mathbb{N},$$

i

$$\|L\| = \sup_{m,n\in\mathbb{N}} \left(|g_{mn00}| + \|G_{mn}\|_{\mathcal{M}_u}\right)$$

pored toga,

$$\lim_{m,n\to\infty} (L(x))_{mn} = x_{00}\left(\alpha - \sum_{k,l=1}^{\infty} g_{kl}\right) + \sum_{k,l=1}^{\infty} g_{kl}x_{kl} \text{ za svako } x \in \mathcal{C}_{\vartheta}$$

(b) Ako je $L \in \mathfrak{B}\left(\mathcal{C}_{\vartheta}, B(\mathcal{C}_{\vartheta})\right)$ *tada važi*

$$\frac{1}{2}\lim_{m,n\to\infty}\sup\left(\left|g_{mn00} - \alpha + \sum_{k,l=1}^{\infty} g_{kl}\right| + \|(g_{mnkl} - g_{kl})_{k,l=1}^{\infty}\|_{\mathcal{M}_u}\right)$$
$$\leq \|A\|_q^2 \leq \lim_{m,n\to\infty}\sup\left(\left|g_{mn00} - \alpha + \sum_{k,l=1}^{\infty} g_{kl}\right| + \|(g_{mnkl} - g_{kl})_{k,l=1}^{\infty}\|_{\mathcal{M}_u}\right)$$

gde je

$$\|(g_{mnkl} - g_{kl})_{k,l=1}^{\infty}\|_{\mathcal{M}_u} = \sup_{m,n\in\mathbb{N}} \sum_{k,l=1}^{\infty} |g_{mnkl} - g_{kl}|\,.$$

Glava 7

Rezultati i predlozi

Za prgeled literature o domenu četvorodimenzionalne beskonačne matrice A u pojedinim dvostrukim prostorima nizova, sledeća tabela može biti veoma korisna i pregledna:

A	λ	λ_A	izvor:
C	$\mathcal{M}_u$, $\mathcal{C}_p$, $\mathcal{C}_{0p}$	$\tilde{\mathcal{M}_u}$, $\tilde{\mathcal{C}_p}$, $\tilde{\mathcal{C}_{0p}}$	[Mursaleen and Başar(2014)]
C	$\mathcal{C}_r$, $\mathcal{C}_{bp}$, $\mathcal{L}_q$	$\tilde{\mathcal{C}_r}$, $\tilde{\mathcal{C}_{bp}}$, $\tilde{\mathcal{L}_q}$	[Mursaleen and Başar(2014)]
$\Delta(1,-1,1,-1)$	$\mathcal{M}_u$, $\mathcal{C}_p$, $\mathcal{C}_{0p}$	$\mathcal{M}_u(\Delta)$, $\mathcal{C}_p(\Delta)$, $\mathcal{C}_{0p}(\Delta)$	[Demiriz and Duyar(2015)]
$\Delta(1,-1,1,-1)$	$\mathcal{C}_r$, $\mathcal{L}_q$	$\mathcal{C}_r(\Delta)$, $\mathcal{L}_q(\Delta)$	[Demiriz and Duyar(2015)]
C	$\tilde{\mathcal{M}_u}$, $\tilde{\mathcal{C}_p}$, $\tilde{\mathcal{C}_{0p}}$	$\tilde{\mathcal{M}_u}(t)$, $\tilde{\mathcal{C}_p}(t)$, $\tilde{\mathcal{C}_{0p}}(t)$	[Demiriz and Duyar(2017)]
C	$\tilde{\mathcal{C}_r}$, $\tilde{\mathcal{C}_{bp}}$, $\tilde{\mathcal{L}_q}$	$\tilde{\mathcal{C}_r}(t)$, $\tilde{\mathcal{C}_{bp}}(t)$, $\tilde{\mathcal{L}_q}(t)$	[Demiriz and Duyar(2017)]
R^{qt}	$\mathcal{L}_s$	$R^{qt}(\mathcal{L}_s))$	[Yeşilkayagil and Başar(2017)]
$B(r,s,t,u)$	$\mathcal{M}_u$, $\mathcal{C}_p$, $\mathcal{C}_{bp}$	$B(\mathcal{M}_u)$, $B(\mathcal{C}_p)$, $B(\mathcal{C}_{bp})$	[Tuğ(2017a)]
$B(r,s,t,u)$	$\mathcal{C}_r$, $\mathcal{L}_q$	$B(\mathcal{C}_r)$, $B(\mathcal{L}_q)$	[Tuğ(2017a)]
R^{qt}	$\mathcal{M}_u$, $\mathcal{C}_p$	$(\mathcal{M}_u)_{R^{qt}}$, $(\mathcal{C}_p)_{R^{qt}}$	[Yeşilkayagil and Başar(2018)]
R^{qt}	$\mathcal{C}_{bp}$, $\mathcal{C}_r$	$(\mathcal{C}_{bp})_{R^{qt}}$, $(\mathcal{C}_r)_{R^{qt}}$	[Yeşilkayagil and Başar(2018)]
$B(r,s,t,u)$	$\mathcal{C}_f$, $\mathcal{C}_{f_0}$	$B(\mathcal{C}_f)$, $B(\mathcal{C}_{f_0})$	[Tuğ(2018)]

Tabela 1. Domeni nekih četvorodimenzionalnih matrica u dvostrukim prostorima nizova.

Demiriz i Duyar [Demiriz and Duyar(2015)] su nedavno definisali i proučili prostore $\mathcal{M}_u(\Delta)$, $\mathcal{C}_p(\Delta)$, $\mathcal{C}_{0p}(\Delta)$, $\mathcal{C}_r(\Delta)$ i $\mathcal{L}_q(\Delta)$ dvostrukih nizova kod kojih su matrice razlika ograničene transformacije , konvergentne u Pringsheimovom smislu, nula u Pringsheimovom smislu, istovremeno konvergentne u Pringsheimovom smislu i ograničene, regularno konvergentne i apsolutno $q-$sumabilne, respektivno. Četvorodimenzionalna matrica definisana je sa

$$\delta_{mnkl} := \begin{cases} (-1)^{m+n-k-l} & , \quad m-1 \leq k \leq m, \quad n-1 \leq l \leq n, \\ 0 & , \quad \text{inače} \end{cases}$$

Takodje su ispitali odredjene inkluzijske relacije vezane za ove prostore nizova i odredili $\alpha-$dual prostora $\mathcal{M}_u(\Delta)$ i $\beta(v)-$dual prostora $\mathcal{C}_v(\Delta)$ i konačno su karakterizovali odredjene klase matrica.

Ideja o generalizaciji četvorodimenzionalne matrice razlika bila je otvoren i rešiv problem. Odlučili smo da rešimo ovaj problem nakon vidljive dokazivosti našeg predloga. U ovoj disertaciji, proučili smo prostore $B(\mathcal{M}_u)$, $B(\mathcal{C}_p)$, $B(\mathcal{C}_{bp})$, $B(\mathcal{C}_r)$, $B(\mathcal{L}_q)$, $B(\mathcal{C}_f)$ i $B(\mathcal{C}_{f0})$ kao domene četvorodimenzionalne uopštene rencedifen matrice $B(r,s,t,u)$ u dvostrukim prostorima nizova $\mathcal{M}_u$, $\mathcal{C}_p$, $\mathcal{C}_{bp}$, $\mathcal{C}_r$, $\mathcal{L}_q$, $\mathcal{C}_f$ i $\mathcal{C}_{f0}$. Ispitali smo neke topološke osobine i inkluzione relacije uz odredjene stroge uslove. Onda, odredili smo $\alpha-$, $\beta(\vartheta)-$ i $\gamma-$duale za neke od prethodno uvedinih i dvostrukih prostora nizova. Konačno, karakterizovali smo nove matrične klase $(\mathcal{M}_u : \mathcal{C}_f)$, $(B(\mathcal{M}_u) : \mathcal{C}_f)$, $(\mathcal{M}_u : B(\mathcal{C}_f))$, $(\mathcal{L}_{s'} : \mathcal{C}_f)$, $(B(\mathcal{L}_{s'}) : \mathcal{C}_f)$ i $(\mathcal{L}_{s'} : B(\mathcal{C}_f))$, za $0 < s' < 1$ i $1 < s' < \infty$, četvorodimenzionalnih matričnih preslikavanja

7.1 Rezultati

Ovde, smo naveli rezultate iz Glava 3, 4 i 5 koje predstavljaju originalni deo ovog rada.

Rezulzat 71. *Ako pretpostavimo da važi $r = t = 1$ i $s = u = -1$ za prostore $B(\mathcal{M}_u)$, $B(\mathcal{C}_p)$, $B(\mathcal{C}_{bp})$, $B(\mathcal{C}_r)$, $B(\mathcal{L}_q)$ koji su proučeni od strane Tuğa [[Tuğ(2017a)]-[Tug(2018)], onda imamo prostore nizova $\mathcal{M}_u(\Delta)$, $\mathcal{C}_p(\Delta)$, $\mathcal{C}_{0p}(\Delta)$, $\mathcal{C}_r(\Delta)$ i $\mathcal{L}_q(\Delta)$ koje su definisali Demiriz i Duyar [Demiriz and Duyar(2015)].*

Rezulzat 72. *Dokazali smo, da su prostori $B(\mathcal{M}_u)$, $B(\mathcal{C}_{bp})$, $B(\mathcal{C}_r)$ linearni Banachovi prostori sa normom $\|x\|_{B(\mathcal{M}_u)}$; da je prostor $B(\mathcal{L}_q)$ $q-$normiran prostor, pri čemu je $0 < q < 1$, i linearan Banachov prostor sa normom $\|x\|_{B(\mathcal{L}_q)}$, i da je prostor $B(\mathcal{C}_p)$ linearan kompletan polunormiran prostor sa polunormom $\|x\|_{B(\mathcal{C}_p)}$. Ako je $r = t = 1$ i $s = u = -1$, onda se ovi rezultati svode na rezultate koje su naveli Demiriz i Duyar[Demiriz and Duyar(2015)].*

Rezulzat 73. *Ako pretpostavimo da je $r = t = 1$ i $s = u = -1$, onda inkulzijske relacije koje je naveo Tuğ [Tuğ(2017a)] biće istovetne relacijama $\mathcal{M}_u \subset \mathcal{M}_u(\Delta)$, $\mathcal{C}_\vartheta \subset \mathcal{C}_\vartheta(\Delta)$, gde je $\vartheta = \{p, bp, r\}$ i $\mathcal{L}_q \subset \mathcal{L}_q(\Delta)$, koje su dokazali Demiriz i Duyar[Demiriz and Duyar(2015)]. U ovom slučaju, može se pokazati da inkluzijska relacija $\lambda(\Delta) \subset B(\lambda)$, gde je λ proizvoljan prostor dvostrukih prostore nizova, strogo važi.*

Rezulzat 74. *Ako pretpostavimo da je $|s/r|, |u/t| < 1$, tada možemo odrediti $\alpha-$dual prostora $B(\mathcal{M}_u)$, $B(\mathcal{C}_{bp})$ $B(\mathcal{C}_f)$ u prostoru $\mathcal{L}_u$*

Rezulzat 75. *Sledeći rezultati mogu se navesti kao čisto-originalni rezultati koji se ne mogu dobiti ni iz jednog od prethodno objavljenih radova:*

(i) [Tuğ(2017a)] Dokazano je da su prostori $B(\mathcal{C}_f)$ i $B(\mathcal{C}_{f0})$ linearni Banachovi prostori sa normom $\|x\|_{B(\mathcal{C}_f)}$ i da inkluzijska relacija važi $\mathcal{C}_f \subset B(\mathcal{C}_f)$.

(ii) [Tuğ(2017a)] Matrična klasa $\Big(\mathcal{C}_f : \mathcal{M}_u\Big)$ je karakterizovana da bi se odredio $\gamma-$dual skupa $B(\mathcal{C}_f)$

(iii) [Tug(2018)] Četvorodimenzionalne matrične klase $(B(\mathcal{M}_u) : \mathcal{C}_f)$, $(\mathcal{M}_u : B(\mathcal{C}_f))$, $(\mathcal{L}_{s'} : \mathcal{C}_f)$, $(B(\mathcal{L}_{s'}) : \mathcal{C}_f)$ *i* $(\mathcal{L}_{s'} : B(\mathcal{C}_f))$, *za* $0 < s' < 1$ *i* $1 < s' < \infty$, *su karakterizovane.*

7.2 Predlozi

Ovde predlažemo neke otvorene probleme koji se odnose na $B(r, s, t, u)-$sumabilnost.

Predlog 76. *Paranormirani* $B(r, s, t, u)-$*sumabilni dvostruki prostori nizova* $B(\mathcal{M}_u(t'))$, $B(\mathcal{C}_p(t'))$, $B(\mathcal{C}_{bp}(t'))$, $B(\mathcal{C}_r(t'))$, $B(\mathcal{L}_q(t'))$, $B(\mathcal{C}_f(t'))$ *i* $B(\mathcal{C}_{f0}(t'))$, *pri čemu je* $t' = (t'_{mn})$ *su nizovi strogo pozitivnih realnih brojeva za svako* $m, n \in \mathbb{N}$, *može se uvesti i proučiti, takodje mogu se i navesti i pojedine topološke osobine koje važe pod strogim uslovima, u vezi sa ovim problemom.*

Predlog 77. $\Delta(1, -1, 1, -1)$ *matrični domen prostora nizova* $\mathcal{C}_f$ *i* $\mathcal{C}_{f0}$ *je jedan od otvorenih problema. Jednostavno se mogu rezulati koje je Tuğ[Tuğ(2018)] dobio umanjiti na* $\mathcal{C}_f(\Delta)$ *i* $\mathcal{C}_{f_0}(\Delta)$ *uz pretpostavke da je* $r = t = 1$ *i* $s = u = -1$.

Predlog 78. *Karakterizacija potrebnih i dovoljnih uslova četvorodimenzionalnih matričnih klasa* $(\mathcal{C}_f : \mathcal{C}_p)$, $(\mathcal{C}_f : \mathcal{C}_r)$, *i karakterizacija* $(B(\mathcal{C}_f) : \mathcal{C}_p)$ *i* $(B(\mathcal{C}_f) : \mathcal{C}_r)$ *su još uvek otvoreni problemi. Pored toga, nakon karakterizacije, neophodno je odrediti i* $\beta(p)-$, $\beta(r)-$*dual prostora* $B(\mathcal{C}_f)$ *da bi se popunila praznina u literaturi za* $B(r, s, t, u)-$*sumabilne skoro konvergentne prostore nizova.*

Predlog 79. *Karakterizacija podklase* $\mathcal{K}(X, Y)$ *kopmaktnih operatora, pri čemu je* $X = \{B(\mathcal{M}_u), B(\mathcal{C}_\vartheta), B(\mathcal{C}_{\vartheta 0}), B(\mathcal{L}_q)(1 < q < \infty), B(\mathcal{L}_u)\}$ *i* $Y = \{\mathcal{M}_u, \mathcal{C}_\vartheta, \mathcal{C}_{\vartheta 0}, \mathcal{L}_q(1 < q < \infty), \mathcal{L}_u\}$ *za* $\vartheta = \{bp, r\}$, *primenom Hausdorff0ve mere nekompaktnosti za četvorodimenzionalne matrične operatore na dvostrukim prostorima nizova može se uvesti kao novi problem.*

Bibliografija

[Adams(1933)] C Raymond Adams. On non-factorable transformations of double sequences. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 19(5):564–567, 1933.

[Altay and Başar(2005)] Bilâl Altay and Feyzi Başar. Some new spaces of double sequences. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 309(1):70–90, 2005.

[Basar(2012)] F Basar. Summability theory and its applications, monographs, 2012.

[Başar and Kirişçi(2011)] Feyzi Başar and Murat Kirişçi. Almost convergence and generalized difference matrix. *Computers & Mathematics with Applications*, 61 (3):602–611, 2011.

[Basar and Sever(2009)] Feyzi Basar and Yurdal Sever. The space l q of double sequences. *Mathematical Journal of Okayama University*, 51(1), 2009.

[Boos et al.(1997)Boos, Leiger, and Zeller] J Boos, T Leiger, and K Zeller. Consistency theory for sm-methods. *Acta Mathematica Hungarica*, 76(1-2):109–142, 1997.

[Boos and Cass(2000)] Johann Boos and F Peter Cass. *Classical and modern methods in summability*. Clarendon Press, 2000.

[Buck et al.(1952)] R Creighton Buck et al. Rg cooke, infinite matrices and sequence spaces. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 58(2):272–274, 1952.

[Cakan et al.(2006)Cakan, Altay, and Mursaleen] Celal Cakan, Bilal Altay, and Mohammad Mursaleen. The σ-convergence and σ-core of double sequences. *Applied Mathematics Letters*, 19(10):1122–1128, 2006.

[Cunjalo(2007)] F Cunjalo. Almost convergence of double sequences-some analogies between measure and category. *Math. Maced*, 5:21–24, 2007.

[Demiriz and Duyar(2015)] Serkan Demiriz and Osman Duyar. Domain of difference matrix of order one in some spaces of double sequences. *arXiv preprint arXiv:1501.01113*, 2015.

[Demiriz and Duyar(2017)] Serkan Demiriz and Osman Duyar. Domain of the generalized double cesaro matrix in some paranormed spaces of double sequences. *Tbilisi Mathematical Journal*, 10(2):43–56, 2017.

[Edely et al.(2003)] Osama HH Edely et al. Statistical convergence of double sequences. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 288(1):223–231, 2003.

[Edely et al.(2004)] Osama HH Edely et al. Almost convergence and a core theorem for double sequences. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 293 (2):532–540, 2004.

[Gohberg et al.(1957)Gohberg, Goldenstein, and Markus] I Ts Gohberg, LS Goldenstein, and AS Markus. Investigations of some properties of bounded linear operators with their q-norms. *Ucenie Zapiski, Kishinevskii Gosuniversitet*, 29: 29–36, 1957.

[Gupta and Kamthan(1980)] M Gupta and PK Kamthan. Infinite matrices and tensorial transformations. *Acta Math., Vietnam*, 5:33–42, 1980.

[Hamilton et al.(1936)] Hugh J Hamilton et al. Transformations of multiple sequences. *Duke Mathematical Journal*, 2(1):29–60, 1936.

[Hardy(1904)] GH Hardy. On the convergence of certain multiple series. *Proceedings of the London Mathematical Society*, 2(1):124–128, 1904.

[Jardas and Sarapa(1991)] C Jardas and N Sarapa. On the summability of pairs of sequences. *Glasnik Mat*, 26(46):67–78, 1991.

[Kayaduman and Şengönül(2012)] Kuddusi Kayaduman and Mehmet Şengönül. The spaces of cesaro almost convergent sequences and core theorems. *Acta Mathematica Scientia*, 32(6):2265–2278, 2012.

[King(1966)] JP King. Almost summable sequences. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 17(6):1219–1225, 1966.

[Loganathan and Moorthy(2016)] S Loganathan and C Ganesa Moorthy. A net convergence for schauder double bases. *Asian-European Journal of Mathematics*, 9(01):1650010, 2016.

[Lorentz(1948)] GG Lorentz. A contribution to the theory of divergent sequences. *Acta mathematica*, 80(1):167–190, 1948.

[Maddox(1970)] I. J. Maddox. Elements of functional analysis. *Cambridge University press*, 1970.

[Malkowsky and Rakočević(2019)] E. Malkowsky and V. Rakočević. Advanced functional analysis. *CRC Press, Taylor & Fancis Group, Boca Raton, London and New York,* 2019.

[Moricz(1991)] F Moricz. Extensions of the spaces c and c 0 from single to double sequences. *Acta Mathematica Hungarica*, 57(1-2):129–136, 1991.

[Moricz and Rhoades(1988)] F Moricz and BE Rhoades. Almost convergence of double sequences and strong regularity of summability matrices. In *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, volume 104, pages 283–294. Cambridge University Press, 1988.

[Móricz and Rhoades(1990)] F Móricz and BE Rhoades. Some characterizations of almost convergence for single and double sequences. *Publ Inst Math Nouv Ser*, 48(62):61–68, 1990.

[Mursaleen(2004)] Mursaleen. Almost strongly regular matrices and a core theorem for double sequences. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 293 (2):523–531, 2004.

[Mursaleen and Savaş(2003)] Mursaleen and E Savaş. Almost regular matrices for double sequences. *Studia Scientiarum Mathematicarum Hungarica*, 40(1-2): 205–212, 2003.

[Mursaleen(2010)] M Mursaleen. Almost convergence and some related methods. *Mursaleen M. Modern Methods of Analysis and Its Applications. New Delhi: Anamaya Publ*, pages 1–10, 2010.

[Mursaleen and Mohiuddine(2010a)] M Mursaleen and SA Mohiuddine. Some new double sequence spaces of invariant means. *Glasnik matematički*, 45(1):139–153, 2010a.

[Mursaleen and Başar(2014)] Mohammad Mursaleen and Feyzi Başar. Domain of cè(s)aro mean of order one in some spaces of double sequences. *Studia Scientiarum Mathematicarum Hungarica*, 51(3):335–356, 2014.

[Mursaleen and Mohiuddine(2008)] Mohammad Mursaleen and SA Mohiuddine. Regularly σ-conservative and σ-coercive four dimensional matrices. *Computers & Mathematics with Applications*, 56(6):1580–1586, 2008.

[Mursaleen and Mohiuddine(2010b)] Mohammad Mursaleen and SA Mohiuddine. On σ-conservative and boundedly σ-conservative four-dimensional matrices. *Computers & Mathematics with Applications*, 59(2):880–885, 2010b.

[Mursaleen and Mohiuddine(2012)] Mohammad Mursaleen and Syed Abdul Mohiuddine. Banach limit and some new spaces of double sequences. *Turkish Journal of Mathematics*, 36(1):121–130, 2012.

[Mursaleen and Mohiuddine(2014)] Mohammad Mursaleen and Syed Abdul Mohiuddine. *Convergence methods for double sequences and applications*. Springer, 2014.

[Patterson(2000)] Richard F Patterson. Analogues of some fundamental theorems of summability theory. *International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences*, 23(1):1–9, 2000.

[R.G. Bartle(2011)] D.R. Sherbet R.G. Bartle. Introduction to real analysis. *John willey and sons, inc., 4. edition*, 2011.

[Savaş and Patterson(2011)] Ekrem Savaş and Richard Patterson. Double sequence spaces defined by a modulus. *Mathematica Slovaca*, 61(2):245–256, 2011.

[Şengönül and Kayaduman(2012)] Mehmet Şengönül and Kuddusi Kayaduman. On the riesz almost convergent sequences space. In *Abstract and Applied Analysis*, volume 2012. Hindawi, 2012.

[Subramanian and Misra(2010)] Nagarajan Subramanian and UK Misra. The generalized double difference of gai sequence spaces. *Fasc. Math*, 43:155–164, 2010.

[Tripathy and Sarma(2009)] Binod Tripathy and Bipul Sarma. Vector valued double sequence spaces defined by orlicz function. *Mathematica Slovaca*, 59(6):767–776, 2009.

[Tuğ(2018)] Orhan Tuğ. On almost b-summable double sequence spaces. *Journal of Inequalities and Applications*, 2018(1):9, 2018, 1-19.

[Tug(2018)] Orhan Tug. On the characterization of some classes of four-dimensional matrices and almost-summable double sequences. *Journal of Mathematics*, 2018, 1-7.

[Tuğ and Başar(2016)] Orhan Tuğ and Feyzi Başar. Four-dimensional generalized difference matrix and some double sequence spaces. In *AIP Conference Proceedings*, volume 1759, page 020075. AIP Publishing, 2016, 020075-1–020075-4.

[Tuğ(2017a)] Orhan Tuğ. Four-dimensional generalized difference matrix and some double sequence spaces. *Journal of inequalities and applications*, 2017(1):149, 2017a.

[Tuğ(2017b)] Orhan Tuğ. Four-dimensional generalized difference matrix and almost convergent double sequence spaces. In *Symposium Functional Analysis in Interdisciplinary Applications*, pages 83–87. Springer, 2017b.

[Tuğ(2018)] Orhan Tuğ. Four-dimensional generalized matrix and b-summable double sequence spaces. *Presented at Faculty of Sciences and Mathematics, University of Niš*, 2018.

[Tuğ and Başar(2016)] Orhan Tuğ and Feyzi Başar. On the spaces of nörlund almost null and nörlund almost convergent sequences. *Filomat*, 30(3):773–783, 2016.

[Wilansky(1978)] A. Wilansky. Modern methods in topological vector space. 1978.

[Yeşilkayagil and Başar(2016)] Medine Yeşilkayagil and Feyzi Başar. Mercerian theorem for four dimensional matrices. *Commun. Fac. Sci. Univ. Ank. Sér. A*, 1: 65, 2016.

[Yeşilkayagil and Başar(2016a)] M Yeşilkayagil and F Başar. On the characterization of a class of four dimensional matrices and steinhaus type theorems. *Kragujevac Journal of Mathematics*, 40(1):35–45, 2016a.

[Yeşilkayagil and Başar(2015)] Medine Yeşilkayagil and Feyzi Başar. Four dimensional dual and dual of the new sort summability methods. *Contemporary Analysis and Applied Mathematics*, 3(1), 2015.

[Yeşilkayagil and Başar(2016b)] Medine Yeşilkayagil and Feyzi Başar. Some topological properties of the spaces of almost null andalmost convergent double sequences. *Turkish Journal of Mathematics*, 40(3):624–630, 2016b.

[Yeşilkayagil and Başar(2017)] Medine Yeşilkayagil and Feyzi Başar. On the domain of riesz mean in the space $\mathcal{L}_s$. *Filomat*, 31(4):925–940, 2017.

[Yeşilkayagil and Başar(2018)] Medine Yeşilkayagil and Feyzi Başar. Domain of riesz mean in some spaces of double sequences. *Indagationes Mathematicae*, 2018.

[Zeltser(2001)] M Zeltser. Investigation of double sequence spaces by soft and hard analytic methods. dissertations mathematicae universtaties tartuensis, vol. 25, 2001.

[Zeltser(2002)] Maria Zeltser. On conservative matrix methods for double sequence spaces. *Acta Mathematica Hungarica*, 95(3):221–242, 2002.

[Zeltser et al.(2009)Zeltser, Mursaleen, and Mohiuddine] Maria Zeltser, Mohammad Mursaleen, and SA Mohiuddine. On almost conservative matrix methods for double sequence spaces. *Publ. Math. Debrecen*, 75:387–399, 2009.

Biografija

Autor Orhan Tuğ je rodjen 01.04.1985. u mestu Ordu, Turska Republika, gde je i stekao osnovno i srednje obrazovanje. Osnovne studije je upisao 2004. a završio 2008. godine na Ataturk Univerzitetu u mestu Erzurum, Turska. Master studije upisuje 2009. a završava 2011. godine na Sakarya Univerzitetu u mestu Sakarya, Turska. Trenutno je predavač na Departmanu za Matematičko Obrazovanje (Mathematics Education Department) na Tishk Internacionalnom Univerzitetu (Tishk International University) u mestu Erbil, Republika Irak, gde je zapošljen od 2011. Od 2013. je upravnik Departmana za Matematičko Obrazovanje na istom univerzitetu. Oblasti njegovog istraživanja su: matematička analiza, funkcionalna analiza, teorija sumabilnosti, matrični domeni, prostori običnih i dvostrukih nizova, Šauderove baze, matrične transformacije, alfa, beta i gama-duali, kao i idealna i statistička konvergencija. Posebno se interesuje za funkcionalnu analizu i primenjene metode teorije sumabilnosti. Autor je brojnih publikacija u istaknutim medjunarodnim časopisima. Poseduje preko deset godina akademskog iskustva. Oženjen je i otac je dva sina.

ИЗЈАВА О АУТОРСТВУ

Изјављујем да је докторска дисертација, под насловом

B(r,s,t,u) **– ДВОСТРУКО СУМАБИЛНИ ПРОСТОРИ НИЗОВА И МАТРИЧНЕ ТРАНСФОРМАЦИЈЕ**

која је одбрањена на Природно Математичком факултету Универзитета у Нишу:

- резултат сопственог истраживачког рада;
- да ову дисертацију, ни у целини, нити у деловима, нисам пријављивао/ла на другим факултетима, нити универзитетима;
- да нисам повредио/ла ауторска права, нити злоупотребио/ла интелектуалну својину других лица.

Дозвољавам да се објаве моји лични подаци, који су у вези са ауторством и добијањем академског звања доктора наука, као што су име и презиме, година и место рођења и датум одбране рада, и то у каталогу Библиотеке, Дигиталном репозиторијуму Универзитета у Нишу, као и у публикацијама Универзитета у Нишу.

У Нишу, 07.06.2019.

Потпис аутора дисертације:

Orhan A. Tuğ

ИЗЈАВА О ИСТОВЕТНОСТИ ЕЛЕКТРОНСКОГ И ШТАМПАНОГ ОБЛИКА ДОКТОРСКЕ ДИСЕРТАЦИЈЕ

Наслов дисертације:

B(r,s,t,u) **– ДВОСТРУКО СУМАБИЛНИ ПРОСТОРИ НИЗОВА И МАТРИЧНЕ ТРАНСФОРМАЦИЈЕ**

Изјављујем да је електронски облик моје докторске дисертације, коју сам предао/ла за уношење у **Дигитални репозиторијум Универзитета у Нишу,** истоветан штампаном облику.

У Нишу, 07.06.2019.

Потпис аутора дисертације:

Orhan A. Tuğ

ИЗЈАВА О КОРИШЋЕЊУ

Овлашћујем Универзитетску библиотеку „Никола Тесла“ да у Дигитални репозиторијум Универзитета у Нишу унесе моју докторску дисертацију, под насловом:

B(r,s,t,u) – ДВОСТРУКО СУМАБИЛНИ ПРОСТОРИ НИЗОВА И МАТРИЧНЕ ТРАНСФОРМАЦИЈЕ

Дисертацију са свим прилозима предао/ла сам у електронском облику, погодном за трајно архивирање.

Моју докторску дисертацију, унету у Дигитални репозиторијум Универзитета у Нишу, могу користити сви који поштују одредбе садржане у одабраном типу лиценце Креативне заједнице (Creative Commons), за коју сам се одлучио/ла.

1. Ауторство **(CC BY)**
2. Ауторство – некомерцијално **(CC BY-NC)**
3. Ауторство – некомерцијално – без прераде **(CC BY-NC-ND)**
4. Ауторство – некомерцијално – делити под истим условима **(CC BY-NC-SA)**
5. Ауторство – без прераде **(CC BY-ND)**
6. Ауторство – делити под истим условима **(CC BY-SA)**

У Нишу, 07.06.2019.

Потпис аутора дисертације:

Orhan A. Tuğ