УНИВЕРЗИТЕТ У НИШУ
ПРИРОДНО-МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ У НИШУ
ДЕПАРТМАН ЗА МАТЕМАТИКУ

Милена С. Стојановић

ГЕОМЕТРИЈСКИ МИНИФИКАЦИОНИ ВРЕМЕНСКИ НИЗОВИ ГЕНЕРИСАНИ МОДИФИКОВАНИМ НЕГАТИВНИМ БИНОМНИМ ОПЕРАТОРОМ

ДОКТОРСКА ДИСЕРТАЦИЈА

Ниш, 2024.

UNIVERSITY OF NIŠ
FACULTY OF SCIENCE AND MATHEMATICS
DEPARTMENT OF MATHEMATICS

Milena S. Stojanović

GEOMETRIC MINIFICATION TIME SERIES MODELS GENERATED BY THE MODIFIED NEGATIVE BINOMIAL OPERATOR

DOCTORAL DISSERTATION

Niš, 2024.

Подаци о докторској дисертацији

Ментор:	др Мирослав Ристић, редовни професор, Универзитет у Нишу, Природно-математички факултет у Нишу
Наслов:	Геометријски минификациони временски низови генерисани модификованим негативним биномним оператором
Резиме:	У овој докторској тези дефинисани су нови минификациони INAR(1) модели. Најпре је уведен једнодимензионални, а потом и дводимензионални модел. Модели су базирани на модификованом негативном биномном оператору. Одређене су најзначајније статистичке особине модела. Спроведено је оцењивање непознатих параметара модела коришћењем различитих метода. Сви методи су тестирани на симулираном скупу података. Дата је примена модела на реалном скупу података. Посебна пажња посвећена је аналитичком одређивању оцена непознатих параметара за једнодимензионални минификациони INAR(1) модел, приликом примене метода максималне веродостојности. Конструисан је EM алгоритам. Квалитет оцена и брзина алгоритма проверени су на симулираним подацима.
Научна област:	Математика
Научна дисциплина:	Анализа временских низова
Кључне речи:	минификациони модели, целобројни ауторегресивни модели, модификовани негативни биномни оператор, геометријска маргинална расподела, EM алгоритам
УДК:	519.246.8(043.3)
CERIF класификација:	P160 Статистика, операционо истраживање, програмирање, актуарска математика
Тип лиценце Креативне заједнице:	**CC BY-NC-ND**

Data on Doctoral Dissertation

Doctoral Supervisor:	Dr Miroslav Ristić, Full Professor, University of Niš, Faculty of Sciences and Mathematics
Title:	Geometric minification time series models generated by the modified negative binomial operator
Abstract:	This thesis introduces new minification INAR(1) models. One-dimensional and two-dimensional models are introduced. The models are based upon the modified negative binomial operator. The most important statistical properties of the models are determined. Model parameter estimation is performed using various methods. All the methods are tested on a simulated dataset. An application to a real dataset is presented. Special attention is devoted to the analytical determination of parameter estimates for the one-dimensional minification INAR(1) model, via the application of the maximum likelihood method. An EM algorithm is constructed. The quality of estimates and the speed of the algorithm are tested on a simulated dataset.
Scientific Field:	Mathematics
Scientific Discipline:	Time series analysis
Key Words:	minification models, integer-valued autoregressive models, modified negative binomial operator, geometric marginal distribution, EM algorithm
UDC:	519.246.8(043.3)
CERIF Classification:	P160 Statistics, operations research, programming, actuarial mathematics
Creative Commons License Type:	**CC BY-NC-ND**

Прилог 4/1

ПРИРОДНО - МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ
НИШ

КЉУЧНА ДОКУМЕНТАЦИЈСКА ИНФОРМАЦИЈА

Редни број, **РБР**:	
Идентификациони број, **ИБР**:	
Тип документације, **ТД**:	монографска
Тип записа, **ТЗ**:	текстуални / графички
Врста рада, **ВР**:	докторска дисертација
Аутор, **АУ**:	Милена С. Стојановић
Ментор, **МН**:	Мирослав М. Ристић
Наслов рада, **НР**:	ГЕОМЕТРИЈСКИ МИНИФИКАЦИОНИ ВРЕМЕНСКИ НИЗОВИ ГЕНЕРИСАНИ МОДИФИКОВАНИМ НЕГАТИВНИМ БИНОМНИМ ОПЕРАТОРОМ
Језик публикације, **ЈП**:	српски
Језик извода, **ЈИ**:	енглески
Земља публиковања, **ЗП**:	Србија
Уже географско подручје, **УГП**:	Србија
Година, **ГО**:	2024.
Издавач, **ИЗ**:	ауторски репринт
Место и адреса, **МА**:	Ниш, Вишеградска 33.
Физички опис рада, **ФО**: (поглавља/страна/ цитата/табела/слика/графика/прилога)	5 поглавља, 112 страна, 33 цитата, 9 табела, 5 слика
Научна област, **НО**:	Математика
Научна дисциплина, **НД**:	Анализа временских низова
Предметна одредница/Кључне речи, **ПО**:	минификациони модели, целобројни ауторегресивни модели, модификовани негативни биномни оператор, геометријска маргинална расподела, ЕМ алгоритам
УДК	519.246.8(043.3)
Чува се, **ЧУ**:	библиотека
Важна напомена, **ВН**:	/

Извод, **ИЗ**:	У овој докторској тези дефинисани су нови минификациони INAR(1) модели. Најпре је уведен једнодимензионални, а потом и дводимензионални модел. Модели су базирани на модификованом негативном биномном оператору. Одређене су најзначајније статистичке особине модела. Спроведено је оцењивање непознатих параметара модела коришћењем различитих метода. Сви методи су тестирани на симулираном скупу података. Дата је примена модела на реалном скупу података. Посебна пажња посвећена је аналитичком одређивању оцена непознатих параметара за једнодимензионални минификациони INAR(1) модел, приликом примене метода максималне веродостојности. Конструисан је ЕМ алгоритам. Квалитет оцена и брзина алгоритма проверени су на симулираним подацима.
Датум прихватања теме, **ДП**:	21. децембар 2020.
Датум одбране, **ДО**:	
Чланови комисије, **КО**: Председник:	
Члан:	
Члан:	
Члан:	
Члан, ментор:	

ПРИРОДНО - МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ
НИШ

KEY WORDS DOCUMENTATION

Accession number, **ANO**:	
Identification number, **INO**:	
Document type, **DT**:	monograph
Type of record, **TR**:	textual / graphic
Contents code, **CC**:	doctoral dissertation
Author, **AU**:	Milena S. Stojanović
Mentor, **MN**:	Miroslav M. Ristić
Title, **TI**:	GEOMETRIC MINIFICATION TIME SERIES MODELS GENERATED BY THE MODIFIED NEGATIVE BINOMIAL OPERATOR
Language of text, **LT**:	Serbian
Language of abstract, **LA**:	English
Country of publication, **CP**:	Serbia
Locality of publication, **LP**:	Serbia
Publication year, **PY**:	2024.
Publisher, **PB**:	author's reprint
Publication place, **PP**:	Niš, Višegradska 33.
Physical description, **PD**: (chapters/pages/ref./tables/pictures/graphs/appendixes)	5 chapters, 112 pages, 33 references, 9 tables, 5 graphs
Scientific field, **SF**:	Mathematics
Scientific discipline, **SD**:	Time series analysis
Subject/Key words, **S/KW**:	minification models, integer-valued autoregressive models, modified negative binomial operator, geometric marginal distribution, EM algorithm
UC	519.246.8(043.3)
Holding data, **HD**:	library
Note, **N**:	/

Abstract, **AB**:		This thesis introduces new minification INAR(1) models. One-dimensional and two-dimensional models are introduced. The models are based upon the modified negative binomial operator. The most important statistical properties of the models are determined. Model parameter estimation is performed using various methods. All the methods are tested on a simulated dataset. An application to a real dataset is presented. Special attention is devoted to the analytical determination of parameter estimates for the one-dimensional minification INAR(1) model, via the application of the maximum likelihood method. An EM algorithm is constructed. The quality of estimates and the speed of the algorithm are tested on a simulated dataset.
Accepted by the Scientific Board on, **ASB**:		December 21, 2020.
Defended on, **DE**:		
Defended Board, **DB**:	President:	
	Member:	
	Member:	
	Member:	
	Member, Mentor:	

Садржај

Предговор

Дисертација се бави проучавањем минификационих ауторегресивних процеса са ненегативним целобројним вредностима. Конструисани су нови модели формирани на основу геометријских бројачких низова, који су детаљно описани и анализирани.

Презентовани садржај је заснован на објављеним оригиналним резултатима и чине га четири целине, док је на крају дат закључак обрађене теме.

У првој глави је најпре дата мотивација увођења модификованог негативног биномног оператора. Затим су, хронолошки, наведени већ постојећи резултати из ове области. Разматрани су једнодимензионални, а потом и дводимензионални модели. Модификовани негативни биномни оператор, на коме се базира конструкција модела у наредним главама, детаљно је описан.

У другој глави је уведен нови минификациони целобројни ауторегресивни модел, за чију је конструкцију коришћен модификовани негативни биномни оператор. Детаљно су описани подаци који се могу представити овим моделом. Након извођења најбитнијих особина модела дате су условне статистичке величине и аутокорелациона структура. Посебна пажња се поклања оцењивању непознатих параметара коришћењем различитих метода и провери особина посматраних оцена. На крају је у примени над скупом реалних података из стварног живота показано да је овај модел бољи од других, њему конкурентних модела. Такође, коришћен је и параметарски bootstrap приступ за утврђивање адекватности модела за изабрани скуп података. Резултати из ове главе објављени су у раду

- M.S. Aleksić, M.M. Ristić, (2021) A geometric minification integer-valued autoregressive model, Applied Mathematical Modelling 90, 265-

280. DOI: 10.1016/j.apm.2020.08.047

Трећа глава је посвећена аналитичком одређивању оцена непознатих параметара за модел конструисан у претходној глави, приликом примене метода максималне веродостојности. Најпре је дата кратка историја резултата EM алгоритма. Затим су представљени разлози компликоване примене EM алгоритма на оригиналну дефиницију модела, дата је еквивалентна репрезентација модела и показана је еквиваленција ове две репрезентације. Детаљно је описана конструкција EM алгоритма кроз E-корак и M-корак и својства добијених оцена потврђена су симулацијама. Резултати из ове главе објављени су у раду

- M.S. Stojanović, (2022) An EM algorithm for estimation of the parameters of the geometric minification INAR model, Journal of Statistical Computation and Simulation 92(1), 1-15.
  DOI: 10.1080/00949655.2022.2053125

У четвртој глави конструисан је нови дводимензионални минификациони целобројни ауторегресивни модел првог реда, коришћењем два модификована негативна биномна оператора. Дате су најбитније особине модела и непознати параметри су оцењени коришћењем два метода за оцењивање непознатих параметара, док су карактеристике добијених оцена проверене симулацијама. Резултати из ове главе објављени су у раду

- M.S. Stojanović, (2024) A bivariate geometric minification integer-valued autoregressive model, Filomat, прихваћен за објављивање

Дисертације је урађена под менторством проф. др Мирослава Ристића, редовног професора Природно-математичког факултета, Универзитета у Нишу. Овом приликом му се захваљујем на великој помоћи, труду и издвојеном времену које је уложио у припреми ове дисертације, као и на корисним примедбама и сугестијама које су у великој мери допринеле њеном квалитету.

Захваљујем се члановима комисије, проф. др Александру Настићу, редовном професору Природно-математичког факултета у

Нишу, проф. др Миодрагу Ђорђевићу, ванредном професору Природно-математичког факултета у Нишу, проф. др Предрагу Поповићу, ванредном професору Грађевинско-архитектонског факултета у Нишу и др Маји Обрадовић, доценту Природно-математичког факултета у Нишу, који су пажљиво прочитали дисертацију и чији су предлози и коментари допринели њеној финалној форми.

Посебну захвалност дугујем својој породици на разумевању, одрицању и подршци која ми је несебично пружана свих ових година.

Милена С. Стојановић

Глава 1

Увод

Ауторегресивни модели временских серија са целобројним вредностима представљају најчешће коришћена средства за моделирање временских серија бројања. Кажемо да је временски низ $\{X_t\}$, $t \in \mathbb{Z} \equiv \{0, \pm 1, \dots\}$ модел временске серије бројања ако се његова реализација састоји од вредности које се добијају бројањем. Пример овакве временске серије је месечни број нових инфекција изазваних вирусом за период од 1990-2019. године. Ове врсте временских серија се често описују моделима ауторегресивних временских серија са целобројним вредностима. Кажемо да је временска серија $\{X_t\}$, $t \in \mathbb{Z}$, ауторегресивни модел првог реда временске серије са целобројним вредностима (INAR) ако задовољава једначину

$$X_t = \alpha \bullet X_{t-1} + \varepsilon_t,$$

за свако $t \in \mathbb{Z}$, где је $\{\varepsilon_t\}$, $t \in \mathbb{Z}$, низ независних и идентички расподељених случајних промењљивих изабраних тако да обезбеде постојање стационарног решења наведене једначине и "$\bullet$" је оператор дефинисан као

$$\alpha \bullet X_{t-1} = \sum_{i=1}^{X_{t-1}} W_i,$$

где је $\{W_i\}$, $i \in \mathbb{N} \equiv \{1, 2, \dots\}$, низ независних и идентички расподељених случајних промењљивих независних од X_t и ε_t, за свако $t \in \mathbb{Z}$. Низ $\{W_i\}$ се назива бројачки низ, а α представља одговарајући параметар расподеле случајне промењљиве W_i.

Два најчешће коришћена оператора " $\bullet$ " су биномни тининг оператор " $\circ$" и негативни биномни тининг оператор " $*$", о којима ће бити више речи у наставку.

Биномни тининг оператор

Биномни тининг оператор " $\circ$" су увели Steutel и van Harn (1979) на следећи начин

$$\alpha \circ X_{t-1} = \sum_{i=1}^{X_{t-1}} W_i, \tag{1.0.1}$$

где су елементи бројачког низа $\{W_i\}$ независне и једнако расподељене случајне променљиве по Бернулијевом закону расподеле са параметром α, где је $\alpha \in (0,1)$ и важи $P(W_i = 1) = 1 - P(W_i = 0) = \alpha$. Овај оператор је назван биномним тиниг оператором јер случајна променљива $\alpha \circ X \mid X$ има Биномну расподелу.

McKenzie (1985) и независно, Al-Osh и Alzaid (1987) увели су прве INAR моделе базиране на овом оператору.

Дефиниција 1.0.1 (Al-Osh *и* Alzaid (1987)) INAR(1) *процес је низ случајних променљивих дефинисан са*

$$X_t = \alpha \circ X_{t-1} + \varepsilon_t, \tag{1.0.2}$$

где је $\alpha \in (0,1)$, $\alpha\circ$ *дефинисан у* (1.0.1) *и* $\{\varepsilon_t\}$ *је низ независних једнакорасподељених ненегативних целобројних случајних променљивих са очекивањем* μ *и коначном дисперзијом* σ^2*, при чему су* X_{n-k} *и* ε_n *независне случајне променљиве за сваки природан број* k.

Како се бројачки низ $\{W_i\}$ састоји од случајних променљивих расподељених по Бернулијевом закону расподеле, које могу узети само вредности 0 или 1, можемо приметити да је процес дефинисан у (1.0.2) погодан за пребројавање елемената неке популације, када у току времена могу опстати или изчезавати. Вредност случајне променљиве X_t, која представља број елемената неке популације у тренутку t се може посматрати као збир две компоненте. Прва компонента $\alpha \circ X_{t-1}$ представља број елемената из претходног стања у популацији који су опстали до тренутног стања, док параметар α представља вероватноћу опстанка сваког појединачног елемента. Друга компонента ε_t одговара броју новопридошлих елемената у популацију у периоду $(t-1, t]$.

Један од првих INAR(1) процеса који су се проучавани био је Пуасонов INAR(1) процес. Њега су увели Alzaid и Al-Osh (1988) и представили га Дефиницијом 1.0.1, при чему су за расподелу иновационог низа $\{\varepsilon_t\}$ узели Пуасонову расподелу $\mathcal{P}(\lambda)$, $\lambda > 0$. Једноставно се долази до закључка да је маргинална расподела процеса $\{X_t\}$ Пуасонова, али сада са параметром $\frac{\lambda}{1-\alpha}$.

Исти аутори Alzaid и Al-Osh (1988), посматрали су ненегативни целобројни ауторегресивни процес који се може представити Дефиницијом 1.0.1, али је за маргиналну расподелу узета геометријска расподела, тј. важи $P(X_n = j) = (1-q)q^j$. У овом случају иновациони низ $\{\varepsilon_t\}$ има маргиналну расподелу

$$\varepsilon_t = \begin{cases} 0, & \text{с.в.} \quad \alpha, \\ G_t, & \text{с.в.} \quad 1-\alpha, \end{cases}$$

где G_t има геометријску расподелу са параметром q. Овај модел скраћено обележавамо GINAR(1).

Негативни биномни тининг оператор

Негативни биномни тиниг оператор " $*$ " је оператор заснован на геометријској расподели бројачког низа $\{W_i\}$ тј.

$$\alpha * X = \sum_{i=1}^{X} W_i, \tag{1.0.3}$$

где је $\alpha \in (0,1)$, $\{W_t\}$ представља низ независних и једнако расподељених случајних променљивих са геометријском $Geom(\frac{\alpha}{1+\alpha})$ расподелом . Случајна променљива X је независна од случајних променљивих W_i, $i \geq 1$. Овакву врсту бројачке серије разматрали су Al-Osh и Aly (1992). Они су својим радом дали велики допринос јер приликом реализације случајне променљиве са Бернулијевом расподелом могуће је добити само две вредности, 0 или 1, те се јавља проблем како моделирати појаве у којима за елементе популације не посматрамо само могућност да су опстали или не, него и случај када један елемент популације може генерисати нове елементе. Једна од расподела која може да генерише било који ненегативан цео број је геометријска расподела.

Оператор " $*$ " је назван негативни биномни тининг оператор јер ако случајна променљива X има геометријску $Geom(\frac{\mu}{1+\mu})$, $\mu > 0$ расподелу, тада случајна променљива $\alpha * X$ за дато X има негативну биномну расподелу.

Ristić, Bakouch и Nastić (2009) користили су овај оператор за конструкцију стационарног целобројног ауторегресивног процеса првог реда са геометријском маргиналном расподелом (NGINAR(1)). Процес је облика

$$X_t = \alpha * X_{t-1} + \varepsilon_t, \quad t \geq 1, \tag{1.0.4}$$

где $\alpha \in (0,1)$ и " $*$ " оператор дефинисан у (1.0.3). Процес $\{X_t\}$ је стационаран са геометријском маргиналном расподелом $\mathrm{Geom}(\frac{\mu}{1+\mu})$, тј. важи $P(X_n = x) = \frac{\mu^x}{(1+\mu)^{x+1}}$, $x = 0,1,2,...$, док је $\{\varepsilon_t\}$ низ независних и идентички расподељених случајних променљивих независних од $\{W_i\}$. X_{t-l} и ε_t су независне променљиве за свако $l \geq 1$.

Број елемената популације и даље може да се увећава новопристиглим елементима, што је изражено преко иновационог низа.

Аутори су показали да се расподела иновационог низа може представити као мешавина две геометријске расподеле са параметрима $\frac{\alpha}{1+\alpha}$ и $\frac{\mu}{1+\mu}$, тј. да је

$$\varepsilon_t = \begin{cases} Geom\big(\frac{\alpha}{1+\alpha}\big), & \text{с.в.} \quad \frac{\alpha\mu}{\mu-\alpha}, \\ Geom\big(\frac{\mu}{1+\mu}\big), & \text{с.в.} \quad 1 - \frac{\alpha\mu}{\mu-\alpha}. \end{cases} \tag{1.0.5}$$

Случајна променљива ε_t је добро дефинисана за $\alpha \in \big(0, \frac{\mu}{1+\mu}\big]$. Такође, показано је и да се ради о Марковом процесу првог реда, који је ергодичан и строго стационаран.

Недавно, мотивисани неким стварним скуповима података који се не могу моделирати INAR моделима Scotto и остали (2018) увели су дискретан пандан конвенционалном максималном ауторегресивном моделу. Они су посматрали модел облика

$$X_t = \max(\alpha \circ X_{t-1}, \varepsilon_t), \quad t \in \mathbb{Z}, \tag{1.0.6}$$

где " $\circ$ " представља биномни тиниг оператор. Аутори су објаснили какав проблем може настати ако неко покуша да конструише дискретни минификациони модел облика $X_t = \min(\alpha \circ X_{t-1}, \varepsilon_t)$, $t \in \mathbb{Z}$, коришћењем овог оператора. Наиме, када се појави прва нула, тј. када је $X_t = 0$ за неко $t \in \mathbb{Z}$, тада на основу особина биномног тининг оператора $\alpha \circ 0 = 0$, следи да ћемо имати $X_{t+i} = 0$ за свако $i \geq 0$. Дакле, нема смисла разматрати такву врсту минификационог модела који временом постаје константно нула. Исти проблем настаје и када користимо негативни биномни тиниг оператор " $*$ ", јер и овај оператор има особину $\alpha * 0 = 0$. У овој дисертацији, главни циљ је решавање овог проблема, односно конструкција дискретног минификационог модела са ненегативним целобројним вредностима овог облика коришћењем другачијег оператора.

1.1 Кратка историја минификационих процеса

Како већина Марковљевих процеса подразумева Гаусову расподелу, раније се јављао проблем уколико се наиђе на процес који није Гаусов. Тада би се тај процес $\{X_t, t = 0, 1, 2, ...\}$ најпре трансформисао у Гаусов $\{Y_t, t = 0, 1, 2, ...\}$, па тек онда анализирао. Овај проблем је чест у хидрологији, јер се тамо јављају процеси који су повезани са екстремним физичким величинама, односно јављају се расподеле са значајним коефицијентом асиметрије. За решавање овог проблема, у уџбеницима о временским серијама, предлагано је неколико трансформација, где усвојена трансформација мора бити нелинеарна функција да би се уклонила асиметрија. У хидрологији се често, за отклањање асиметрије, користи и логаритамска функција, јер је коефицијент асиметрије често позитиван. Овакве трансформације могу имати и недостатке, јер се нека својства оцењених параметара не могу сачувати приликом враћања на облик пре трансформације. Овај проблем у хидрологији је био један од главних мотива за увођењем минификационих модела.

1.1.1 Једнодимензионални модели

Прве минификационе моделе конструисао је Tavares (1980а) и Tavares (1980б). Он је увео минификациони модел $\{X_t\}$, $t \in \mathbb{N}_0 \equiv \{0, 1, \dots\}$, облика

$$X_t = K \min(X_{t-1}, \varepsilon_t), \quad t \in \mathbb{N}, \tag{1.1.1}$$

где случајне променљиве X_t и ε_t имају експоненцијалне расподеле са параметрима брзине $\lambda > 0$ и $c > 0$, редом, и где је $K = (\lambda + c)/\lambda$. У Tavares (1980а) је показано да је функција густине вероватноће случајне променљиве X_t

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x},$$

док је корелациона функција између узастопних вредности дата са

$$\rho_X(1) = \frac{1}{K},$$

што је исти облик као и код ауторегресивних модела реда 1 (AR(1)).

Мотивацију за увођењем оваквог модела, аутор је добио посматрањем података (израженим у m^3 по s) о дневном директном отицању португалске реке Paiva at Castro Daire. Ови подаци су прикупљени у периоду од октобара до децембара, од 1945/1946 до 1974/1975 године, а посматрани су као низ влажних/сушних периода, где је влажни, односно сушни, период низ узастопних дана са позитивним, односно нултим, отицањем. Затим је дефинисан пик за сваки влажни период (i) као максимално дневно отицање M_i. Често је процес $\{M_i; i = 0, 1, 2, ...\}$ са позитивном искривљеном маргиналном расподелом и са позитивном и експоненцијално опадајућом аутокорелационом функцијом и тада је предложени модел погодан за овакву временску серију.

Касније, Sim (1986) је увео минификациони модел исте структуре као (1.1.1), само је у овом случају за $\{\varepsilon_t\}$ узет низ случајних промењљивих са Веибуловом маргиналном расподелом, где је $P(Y \leq y) = 1 - e^{-\theta y^c}$, за $\theta > 0$, $c > 0$ а $y \geq 0$. Аутор је показао да ако X_0 има Веибулову расподелу и важе претходно наведени услови, низ $\{X_t\}$ има маргиналну Веибулову расподелу са параметром $\lambda = \frac{\theta}{(k^c-1)}$, где је $P(X_n \leq x) = 1 - e^{-\lambda x^c}$. Такође је показано и да низ $\{X_t\}$ има исти облик аутокорелационе функције као што има и стандардни AR(1) процес.

Дискретни минификациони модел, дефинисан истом једначином (1.1.1), први пут помињу Lewis и McKenzie (1991). Аутори су посматрали модел са униформном маргиналном расподелом.

Годину дана касније, Littlejohn (1992) уводи дискретан минификациони модел дефинисан са

$$X_t = \rho \backslash \min(X_{t-1}, \varepsilon_t), \quad t \in \mathbb{N},$$

где $\rho\backslash$, $0 < \rho < 1$, представља леви инверз од биномог тининг оператора и дефинисан је као

$$\rho \backslash Z \overset{d}{=} Z + \sum_{i=1}^{Z+1} G_i,$$

где је Z произвољна дискретна случајна промењљива независна од низа независних и идентички расподељених случајних промењљивих

$\{G_i\}$. Оператор $\rho\backslash$ се назива оператор згушњавања (thickening), јер је $\rho\backslash X \geq X$ за случајну променљиву са ненегативном целобројном вредношћу X. Овде се јавља термин леви инверз јер приликом конструкције дискретног минификационог модела, аутор је низ $\{\varepsilon_t\}$ бирао тако да важи

$$\min\{X, \varepsilon_t\} \stackrel{d}{=} \rho \circ X, \tag{1.1.2}$$

тј. да су случајне променљиве $\min\{X, \varepsilon_t\}$ и $\rho \circ X$, где је $\circ$ биномни тининг оператор дефинисан у (1.0.1), једнако расподељене. Када се на претходну једнакост примени оператор $\rho\backslash$, добија се једнакост

$$\rho\backslash \min\{X, \varepsilon_t\} \stackrel{d}{=} \rho\backslash(\rho \circ X). \tag{1.1.3}$$

Аутор је такође показао и да је

$$\rho\backslash \min\{X, \varepsilon_t\} \stackrel{d}{=} X, \tag{1.1.4}$$

те из претходне две једнакости следи да је

$$\rho\backslash(\rho \circ X) \stackrel{d}{=} X, \tag{1.1.5}$$

Претходна дискусија је разлог због чега се говори о левом инверзу. Littlejohn је иначе посматрао минификационе моделе са различитим дискретним маргиналним расподелама.

Kalamkar (1995) је проучавао минификационе моделе које су увели Lewis и McKenzie (1991) и извео услове под којима постоји стационарни модел са дискретним маргиналним расподелама.

Као што је већ наведено, један од циљева ове дисертације је решавање проблема константног понављања нуле током времена, те је потребно размотрити оператор $\alpha\diamond$ такав да је $\alpha \diamond 0 \not\equiv 0$ за све вредности α. Из ове дискусије може се приметити да је оператор згушњавања $\rho\backslash$ уведен од стране Littlejohn (1992) један тип овог оператора. Како је овај оператор превише компликован за коришћење, размотриће се једноставнији оператор који су представили Zhang, Wang и Fan (2020), а о коме ће више бити речи у наредном поглављу.

1.1.2 Дводимензионални модели

Дводимензионални ненегативни целобројни временски низови представљају реализације две међусобно кореливане случајне променљиве. Крајем 20. века почело је активније проучавање како дводимензионалних, тако и вишедимензионалних минификационих процеса.

Дводимензионални минификациони процес са дводимензионалном semi-Парето расподелом увели су Balakrishna и Jayakumar (1997).

Напомена 1.1.1 (Balakrishna *и* Jayakumar (1997)) *Случајни вектор* (X, Y) *има дводимензионалну semi-Парето расподелу са парамтрима* α_1, α_2, p *ако је функција преживљавања облика*

$$G(x, y) = P(X > x, Y > y) = \frac{1}{1 + \psi(x, y)} \tag{1.1.6}$$

где $\psi(x, y)$ *задовољава функционалну једначину*

$$\psi(x, y) = \frac{1}{p}\psi(p^{\frac{1}{\alpha_1}}x, p^{\frac{1}{\alpha_2}}y), \tag{1.1.7}$$

за $0 < p < 1$*;* $\alpha_1, \alpha_2 > 0$*;* $x, y \geq 0$.

Лема 1.1.1 (Balakrishna *и* Jayakumar (1997)) *Решење функционалне једначине (1.1.7) је дато са*

$$\psi(x, y) = x^{\alpha_1}h_1(x) + y^{\alpha_2}h_2(y), \tag{1.1.8}$$

где су $h_1(x)$ *и* $h_2(x)$ *периодичне функције по* $\log x$ *и* $\log y$ *са периодама* $\frac{2\pi\alpha_1}{-\log p}$ *и* $\frac{2\pi\alpha_2}{-\log p}$*, редом.* $\square$

Аутори су увели дводимензионални минификациони процес

$$\{(X_n, Y_n), n \geq 0\}$$

облика

$$X_n = \min(p^{-\frac{1}{\alpha_1}}X_{n-1}, \varepsilon_n) \tag{1.1.9}$$

и

$$Y_n = \min(p^{-\frac{1}{\alpha_2}} Y_{n-1}, \eta_n) \tag{1.1.10}$$

за $n \geq 1$, $0 \leq p < 1$, $\alpha_1, \alpha_2 > 0$, где је низ $\{(\varepsilon_n, \eta_n), n \geq 1\}$ низ независних и идентички расподељених случајних промељивих. Претпоставка је да су (X_0, Y_0) независни од (ε_n, η_n). Одавде једноставно следи да је $\{(X_n, Y_n), n \geq 0\}$ дводимензионални процес Маркова. Како случајне промењиве ε_t и η_t указују на реалне случајне промењиве, аутори су претпоставили да обе узимају бесконачне вредности са вероватноћом p, а обе узимају коначне вредности са вероватноћом $1-p$. Према томе, важи да је

$$(\varepsilon_n, \eta_n) = \begin{cases} (+\infty, +\infty), & \text{с.в.} \quad p, \\ (\xi_n, \lambda_n), & \text{с.в.} \quad 1-p, \quad 0 < p < 1, \end{cases} \tag{1.1.11}$$

где су ξ_n и λ_n реалне вредности случајних промењивих. Аутори су показали следећу теорему и њоме исказали везу са стационарношћу.

Теорема 1.1.1 *(*Balakrishna *и* Jayakumar (1997)*) Нека је* $(X_0, Y_0) \stackrel{d}{=} (\xi_1, \lambda_1)$*. Процес* $\{(X_n, Y_n), n \geq 0\}$ *дефинисан са (1.1.9), (1.1.10) и (1.1.11) је стационаран ако и само ако* (ξ_n, λ_n) *има дводимензионалну семи-Парето расподелу са парамтрима* α_1, α_2 *и* p*.*

Затим, Thomas и Jose (2002) увели су мултиваријационе минификационе процесе. Такође, Thomas и Jose (2004) конструисали су Marshall-Olkin дводимензионални semi-Парето AR (1) модел са Marshall-Olkin дводимензионалном semi-Парето (MO-BSP) маргиналном расподелом. Ова расподела је уопштење дводимензионалне semi-Парето расподеле дефинисане у Balakrishna и Jayakumar (1997) и детаљно је описана у Thomas и Jose (2002). Облик њиховог дводимензионалног ауторегресивног процеса $\{(X_n, Y_n)\}$ је

$$X_n = \begin{cases} U_n & \text{с.в.} \quad p \\ \min(X_{n-1}, U_n), & \text{с.в.} \quad 1-p \end{cases} \tag{1.1.12}$$

и

$$Y_n = \begin{cases} V_n & \text{с.в.} \quad p \\ \min(Y_{n-1}, V_n), & \text{с.в.} \quad 1-p \end{cases} \tag{1.1.13}$$

где су $\{(U_n, V_n)\}$ иновациони низови који су од $\{(X_{n-k}, Y_{n-k})\}$ независни, за $k = 1, 2, ..., n$.
У раду је показано да $\{(X_n, Y_n)\}$ има маргиналну MO-BSP расподелу ако и само ако је заједничка расподела за $\{(U_n, V_n)\}$ дводимензионална semi-Парето расподела.

Ristić (2006) је конструисао класу стационарних дводимензионалних минификационих процеса са функцијом преживљавања $\overline{F}x, y$, где су $x > 0$ и $y > 0$. Дефинисао је дводимензионални минификациони процес $\{(X_n, Y_n), n \geq 0\}$ као

$$X_n = K \min(X_{n-1}, Y_{n-1}, \varepsilon_n)$$

и

$$Y_n = L \min(X_{n-1}, Y_{n-1}, \eta_n)$$

за $n = 1, 2, ...,$ где је $\{(\varepsilon_n, \eta_n), n \geq 1\}$ низ ненегативних, независних и идентички расподељених случајних вектора са заједничком функцијом преживљавања $\overline{G}_{x,y}$, док су случајни вектори (X_0, Y_0) и (ε_1, η_1) независни, за $K > 1$ и $L > 1$.

Затим су Ristić и остали (2008), на основу овог модела, представили стационарни дводимензионални минификациони процес са дводимензионалном $BVE(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_{12})$ Marshall и Olkin експоненцијалном расподелом и особином $K = L$. Marshall и Olkin експоненцијалну расподелу увели су Marshall и Olkin (1967) мотивисани ситуацијама које се јављају у теорији поузданости као што је квар упарених млазних мотора или регистрација догађаја од стране Гајгеровог бројача. Функција преживљавања ове расподеле је

$$P(X > x, Y > y) = e^{-\lambda_1 x - \lambda_2 y - \lambda_{12} max(x,y)}, \quad x, y > 0,$$

где је $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 > 0$, $\lambda_{12} > 0$. Случајне променљиве X и Y су дефинисане тако да су зависне експоненцијално расподељене случајне променљиве са параметрима $\lambda_1 + \lambda_{12}$ и $\lambda_2 + \lambda_{12}$, редом. Аутори су увели процес облика

$$X_n = K \min(X_{n-1}, Y_{n-1}, \eta_{n1})$$

и

$$Y_n = K \min(X_{n-1}, Y_{n-1}, \eta_{n2})$$

где је $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 > 0$ $\lambda_{12} > 0$, $K > \lambda/\lambda_{12}$, $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_{12}$, $\{(\eta_{n1}, \eta_{n2}), n \geq 1\}$ је низ независних и идентички расподељених случајних вектора и случајни вектори (X_m, Y_m) и (η_{n1}, η_{n2}) су независни за $m < n$.

1.2 Модификовани негативни биномни оператор

За оператор "$\diamond$" дефинисан на следећи начин

$$\alpha \diamond X = \sum_{i=1}^{X+1} G_i, \tag{1.2.1}$$

где је

- $\alpha > 0$
- $\{G_i\}$ низ независних и једнако расподељених случајних променљивих са геометријском маргиналном расподелом, где је веоватноћа расподеле облика

$$P(G_i = x) = \frac{\alpha^x}{(1+\alpha)^{x+1}},\ x \in \mathbb{N}_0, \tag{1.2.2}$$

- случајне променљиве $\{G_i\}$ и X су међусобно независне, за свако $i \geq 1$,

кажемо да је модификовани негативни биномни оператор. Овакав оператор увели су Zhang, Wang и Fan (2020). Особине овог оператора детаљно су разматране у поглављу 2.1.

Користићемо ознаку $G_i \sim Geom\left(\frac{\alpha}{1+\alpha}\right)$ за случајну променљиву G_i са вероватноћом расподеле дате у (1.2.2).

Из (1.2.1), можемо закључити да је $\alpha \diamond 0 = G_1$, што значи да је $\alpha \diamond 0$ геометријски расподељена случајна променљива. Дакле, имамо да је $\alpha \diamond 0 \not\equiv 0$, те примећујемо да користећи овај оператор можемо избећи проблем константног понављања нуле током времена који се може појавити када разматрамо минификациони модел заснован на биномном или негативном биномном тининг оператору. Као последицу ове дискусије, у дисертацији ћемо увести дискретни минификациони модел облика $X_t = \min(\alpha \diamond X_{t-1}, \varepsilon_t)$, $t \in \mathbb{Z}$, где је "$\alpha \diamond$" модификовани негативни биномни оператор дефинисан у (1.2.1).

Глава 2

Геометријски минификациони INAR(1) модел

У овој глави изучаваћемо минификациони целобројни ауторегресивни модел првог реда. Мотив за увођење овог модела је решавање проблема који може настати приликом коришћења биномног тининг оператора или негативног биномног тининг оператора. Заправо, уколико се један од ова два тининг оператора користи за конструкцију минификационог процеса, могуће је да током времена модел достигне константну вредност нула. Као решење овог проблема, Aleksić и Ristić (2021) су конструисали нови минификациони модел употребом модификованог негативног биномног оператора дефинисаног у (1.2.1).

Најпре ћемо у поглављу 2.1 дефинисати минификациони модел базиран на модификованом негативном биномном оператору. Прво ћемо дати дефиницију модела у општем случају, а онда детаљније разматрати специјалан случај модела са геометријском маргиналном расподелом. Затим, у поглављу 2.2 објаснићемо којих су карактеристика подаци који се могу представити овим моделом. У поглављу 2.3 навешћемо неке од основних особина модела, представити условне статистичке величине и аутокорелациону структуру модела. Детаљно ћемо дискутовати оцењивање непознатих параметара у поглављу 2.4. Ову главу завршићемо поглављем 2.5, у коме ћемо дати пример примене овог модела на реалним подацима.

2.1 Конструкција модела

Како се конструкција модела базира на модификованом негативном биномном оператору, дефинисаном у Zhang, Wang i Fan (2020), пре свега наводимо главне особине овог оператора. На основу дефиниције оператора

$$\alpha \diamond X = \sum_{i=1}^{X+1} G_i$$

где је $\{G_i\}$ низ независних и идентички расподељених случајних промењљивих са геометријском маргиналном расподелом и

$$P(G_i = x) = \frac{\alpha^x}{(1+\alpha)^{x+1}},\ x \in \mathbb{N}_0,$$

можемо приметити да за дато X, случајна промењлива $\alpha \diamond X$ представља суму $X+1$ геометријски расподељених случајних промењљивих са геометријском $Geom(\frac{\alpha}{1+\alpha})$ расподелом. Сада ћемо одредити расподелу случајне промењљиве $\alpha \diamond X \mid X$, користећи условну функцију генератрисе вероватноће за $\alpha \diamond X \mid X$, која је облика

$$E(s^{\alpha \diamond X}|X) = E(s^{\sum_{i=1}^{X+1} G_i}|X). \tag{2.1.1}$$

Како је $\{G_i\}$ низ независних и идентички расподељених случајних промењљивих са расподелом $Geom(\frac{\alpha}{1+\alpha})$, условна функција генератрисе вероватноће је

$$E(s^{\alpha \diamond X}|X) = (E(s^{G_1}))^{1+X} = (1+\alpha-\alpha s)^{-1-X}, \quad |s| < \frac{1+\alpha}{\alpha}, \tag{2.1.2}$$

на основу чега можемо закључити да је расподела случајне промењљиве $\alpha \diamond X \mid X$ негативна биномна расподела $\mathcal{NB}(X+1, \frac{\alpha}{1+\alpha})$, одређена једначином

$$P(\alpha \diamond X = x \mid X = m) = \binom{m+x}{x} \left(\frac{1}{1+\alpha}\right)^{m+1} \left(\frac{\alpha}{1+\alpha}\right)^{x},\ x, m \in \mathbb{N}_0.$$

На основу претходног имамо да су условно очекивање и условна дисперзија случајне промењљиве $\alpha \diamond X$ за дато X, редом, облика $E(\alpha \diamond X \mid X) = \alpha(X+1)$ и $D(\alpha \diamond X \mid X) = \alpha(1+\alpha)(X+1)$.

Сада ћемо најпре дати дефиницију дискретног минификационог модела са ненегативним целобројним вредностима у општем случају, без навођења расподеле случајне променљиве X_t.

Дефиниција 2.1.1 *Временски низ* $\{X_t,\ t \in \mathbb{Z}\}$, *дат са*

$$X_t = \min(\alpha \diamond X_{t-1}, \varepsilon_t),\ t \in \mathbb{Z},\ \alpha > 0, \tag{2.1.3}$$

називамо минификациони INAR(1) *модел првог реда* (min-INAR(1)) *ако задовољава следеће услове:*

(i) $\{\varepsilon_t,\ t \in \mathbb{Z}\}$ *је низ независних једнако расподељених случајних променљивих,*

(ii) бројачки низови садржани у $\alpha \diamond X_{t-1}$ *су међусобно независни, за* $t \in \mathbb{Z}$,

(iii) бројачки низови садржани у $\alpha \diamond X_{t-1}$ *су независни од случајних променљивих* X_{t-1} *и* ε_t, *за* $t \in \mathbb{Z}$,

(iv) за свако $t \neq k \in \mathbb{Z}$, *бројачки низови садржани у* $\alpha \diamond X_{t-1}$ *и* $\alpha \diamond X_{k-1}$ *су независни,*

(v) за свако $l \in \mathbb{N}$ *и за свако* $t \in \mathbb{Z}$ *случајне променљиве* X_{t-l} *и* ε_t *су независне случајне променљиве.*

У наставку ћемо посматрати модел под претпоставком да случајна променљива X_t има геометријску расподелу $Geom\big(\frac{\mu}{1+\mu}\big)$, $\mu > 0$, за свако t, тј. посматраћемо min-INAR(1) модел са геометријском маргиналном расподелом.

Као што је познато, модел је у потпуности одређен уколико је позната расподела иновационог низа $\{\varepsilon_t,\ t \in \mathbb{Z}\}$. У следећем тврђењу представићемо расподелу случајне променљиве ε_t под претпоставком да min-INAR(1) модел $\{X_t,\ t \in \mathbb{Z}\}$ има геометријску маргиналну расподелу.

Тврђење 2.1.1 *Нека је* $\{X_t,\ t \in \mathbb{Z}\}$ min-INAR(1) *модел дефинисан у (2.1.3) са геометријском маргиналном* $Geom(\frac{\mu}{1+\mu})$ *расподелом,* $\mu > 0$. *Тада случајна променљива* ε_t *има геометријску* $Geom\big(\frac{\mu[1+\alpha(1+\mu)]}{\alpha(1+\mu)^2}\big)$ *расподелу ако и само ако је* $\alpha > \frac{\mu}{1+\mu}$.

Доказ. Нека је $\{X_t,\ t \in \mathbb{Z}\}$ min-INAR(1) модел дефинисан у (2.1.3) са геометријском маргиналном расподелом $Geom(\frac{\mu}{1+\mu})$, $\mu > 0$ и нека је x произвољан ненегативан цео број. Тада, на основу дефиниције min-INAR(1) модела $\{X_t,\ t \in \mathbb{Z}\}$ имамо да је

$$P(X_t \geq x) = P(\min(\alpha \diamond X_{t-1}, \varepsilon_t) \geq x) = P(\alpha \diamond X_{t-1} \geq x, \varepsilon_t \geq x).$$

Из дефиниције модела имамо да су случајне променљиве $\alpha \diamond X_{t-1}$ и ε_t независне за свако $t \in \mathbb{Z}$, те је вероватноћа облика

$$P(X_t \geq x) = P(\alpha \diamond X_{t-1} \geq x) P(\varepsilon_t \geq x).$$

Сада, на основу претходне једначине важи

$$P(\varepsilon_t \geq x) = \frac{P(X_t \geq x)}{P(\alpha \diamond X_t \geq x)}\,. \tag{2.1.4}$$

Десна страна у (2.1.4) је добро дефинисана уколико узима вредности из интервала $[0,1]$, уколико је монотоно опадајућа функција и уколико конвергира ка 1 и 0 када x конвергира 0 и ∞, редом. Показаћемо потребне и довољне услове на основу којих следи добра дефинисаност дате расподеле.

Случајна променљива X_t има геометеријску $Geom(\frac{\mu}{1+\mu})$ расподелу, одакле је

$$P(X_t \geq x) = \sum_{i=x}^{\infty} \Big(\frac{\mu}{1+\mu}\Big)^i \Big(1 - \frac{\mu}{1+\mu}\Big) = \frac{1}{1+\mu} \sum_{i=0}^{\infty} \Big(\frac{\mu}{1+\mu}\Big)^{i+x} = \Big(\frac{\mu}{1+\mu}\Big)^x. \tag{2.1.5}$$

Посматрајмо сада расподелу случајне променљиве $\alpha \diamond X_{t-1}$. Најпре, користећи условну функцију генератрисе вероватноће (2.1.2), добијамо резултат

$$\begin{aligned} E(s^{\alpha \diamond X}) &= E(E(s^{\alpha \diamond X} \mid X)) \\ &= E\left((1+\alpha-\alpha s)^{-1-X}\right) \\ &= (1+\alpha-\alpha s)^{-1} \cdot E((1+\alpha-\alpha s)^{-X}) \\ &= (1+\alpha-\alpha s)^{-1} \Phi_X((1+\alpha-\alpha s)^{-1}), \end{aligned} \tag{2.1.6}$$

где је Φ_X функција генератрисе вероватноће случајне променљиве X. Како је за случајну променљиву X_{t-1} расподела геометријска $Geom(\frac{\mu}{1+\mu})$ и функција генератрисе вероватноће $\Phi_X(s) = (1+\alpha-\alpha s)^{-1}$, следи

$$\begin{aligned} E(s^{\alpha \diamond X}) &= (1+\alpha-\alpha s)^{-1} \frac{1}{1+\mu-\frac{1}{1+\alpha-\alpha s}\mu} \\ &= \frac{1}{1+\alpha(1+\mu)-\alpha(1+\mu)s}. \end{aligned} \tag{2.1.7}$$

На основу претходног можемо закључити да је функција генератрисе вероватноће случајне променљиве $\alpha \diamond X$ облика

$$\Phi_{\alpha\diamond X}(s) = [1+\alpha(1+\mu)-\alpha(1+\mu)s]^{-1}, \quad |s| < \frac{1+\alpha(1+\mu)}{\alpha(1+\mu)}.$$

Сада можемо закључити да случајна променљива $\alpha \diamond X$ има геометријску расподелу $Geom\left(\frac{\alpha(1+\mu)}{1+\alpha(1+\mu)}\right)$ и да важи

$$P(\alpha \diamond X_{t-1} \geq x) = \left(\frac{\alpha(1+\mu)}{1+\alpha(1+\mu)}\right)^x. \tag{2.1.8}$$

Заменом (2.1.5) и (2.1.8) у (2.1.4) следи

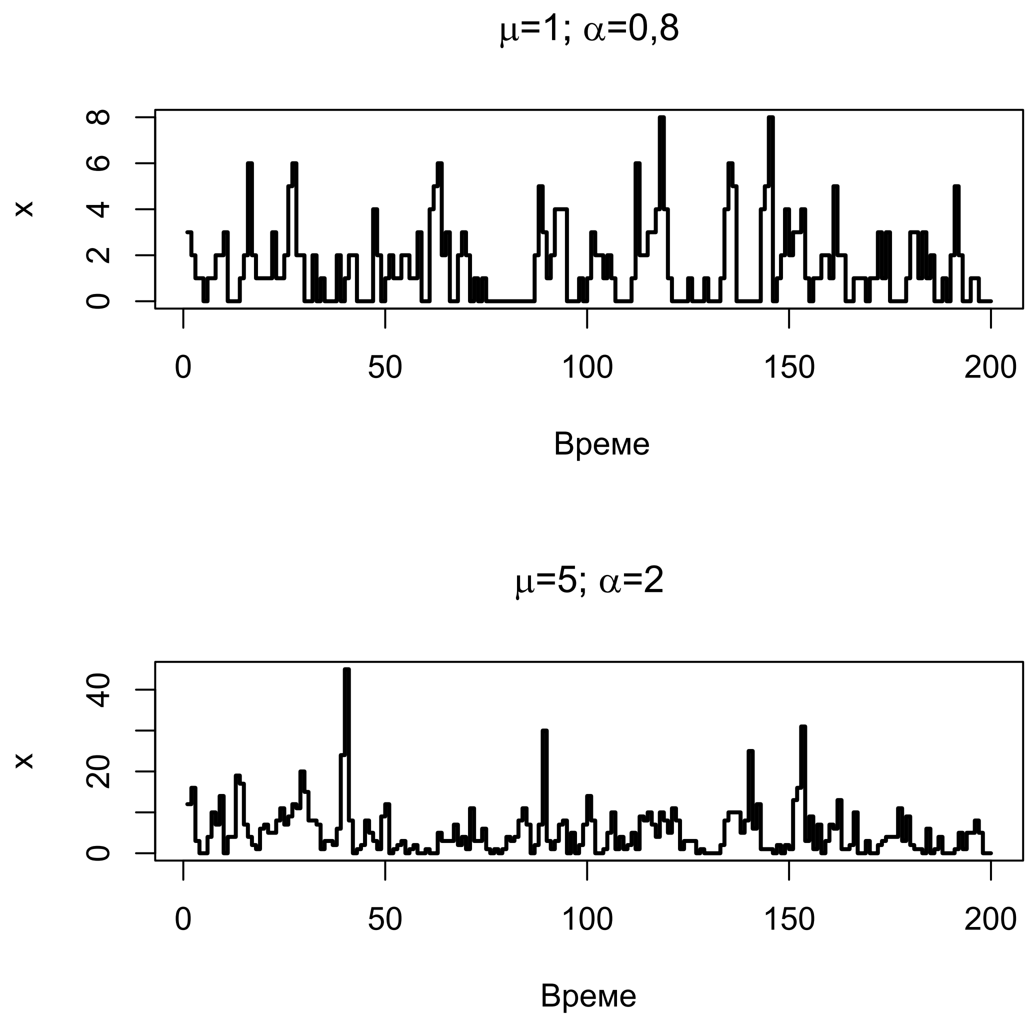
$$P(\varepsilon_t \geq x) = \frac{\left(\frac{\mu}{1+\mu}\right)^x}{\left(\frac{\alpha(1+\mu)}{1+\alpha(1+\mu)}\right)^x} = \left(\frac{\mu[1+\alpha(1+\mu)]}{\alpha(1+\mu)^2}\right)^x. \tag{2.1.9}$$

Десна страна израза (2.1.9) је добро дефинисана уколико је из интервала $[0,1]$, опадајућа функција и конвергира ка 1 и 0 када x конвергира ка 0 и ∞. Очигледно, наведени услови су испуњени ако и само ако је $\frac{\mu[1+\alpha(1+\mu)]}{\alpha(1+\mu)^2} < 1$, тј. ако и само ако је $\alpha > \frac{\mu}{1+\mu}$. Овим смо показали да случајна променљива ε_t има геометриску расподелу $Geom(\frac{\mu[1+\alpha(1+\mu)]}{\alpha(1+\mu)^2})$ ако и само ако је $\alpha > \frac{\mu}{1+\mu}$, што је и требало показати. □

Напомена 2.1.1 *Претходном теоремом је показано да је* min-INAR(1) *модел са геометријском маргиналном расподелом дефинисан ако и само ако је* $\alpha > \frac{\mu}{1+\mu}$. *С друге стране,* NGINAR(1) *модел је добро дефинисан за* $\alpha \leq \frac{\mu}{1+\mu}$. *Можемо закључити да ова два модела употпуњују један другог.*

2.2 Карактеристике података који се описују min-INAR(1) моделом

Из саме дефиниције модела није најјасније понашање самог модела, а највише због тога што се у оквиру минимума примењује оператор који није ни тининг оператор нити оператор згушњавања, већ оператор који може довести до вредности које су веће или мање од вредности променљиве на којој се примењује. Због тога смо моделирали реализације овог модела за два случаја када је у питању маргинална геометријска расподела. У првом случају смо моделирали 200 вредности овог временског низа за стварне вредности параметара $\mu = 1$ и $\alpha = 0.8$, док су у другом случају посматране вредности $\mu = 5$ и $\alpha = 2$. Ове две реализације су приказане на слици 2.1. Са слике можемо да уочимо да се понашање овог модела разликује од понашања класичних INAR модела и max-INAR модела, дефинисаних у Scotto и остали (2018). Наиме, код класичних INAR модела имамо да се подаци случајно појављују у оба смера, и горе и доле. Код max-INAR модела одједном долази до тренутног скока велике вредности коју затим прати низ опадајућих вредности. С друге стране, понашање min-INAR(1) модела је само у једном делу слично понашању max-INAR модела. Заправо, код ова два модела имамо да након велике екстремне вредности долази до низа опадајућих вредности. Међутим, разлика је у томе како се долази до велике екстремне вредности. Код min-INAR модела имамо да се до велике екстремне вредности долази након низа од неколико растућих вредности. Овакав вид понашања је типичан код неких пребројавања случајева разних болести или инфекција, где у једном временском периоду долази до раста броја случајева, а затим иде период опадања броја случајева. Значи, моделом се могу описати подаци изазвани неким екстремним догађајима. Према томе, касније ћемо дискутовати пример скупа реалних података који је описан овим моделом. Реални подаци, у овом случају, представљају број особа инфицираних дечијом парализом у Сједињеним Америчким Државама.



Слика 2.1: Две реализације минификационог модела са геометријском расподелом за неке стварне вредности параметара.

2.3 Особине min-INAR(1) модела

У овом поглављу показаћемо неке од важнијих особина дискретног геометријског минификационог INAR(1) модела са ненегативним целобројним вредностима. Својства која у овом поглављу будемо показали користићемо касније за оцењивање непознатих параметара, за проверу особина предвиђања корак унапред на основу новог модела и за проверу применљивости и адекватности модела на реалним подацима.

Напомена 2.3.1 *Као што је познато, случајна променљива Z са геометријском расподелом $Geom(\frac{\nu}{1+\nu})$, $\nu > 0$, има очекивање ν и дисперзију $\nu(1+\nu)$. За случајну променљиву ε_t, параметар ν је облика $\nu = \frac{\mu[1+\alpha(1+\mu)]}{\alpha+\alpha\mu-\mu}$, одакле следи да случајна променљива ε_t има очекивање $E(\varepsilon_t) = \frac{\mu[1+\alpha(1+\mu)]}{\alpha+\alpha\mu-\mu}$ и дисперзију $Var(\varepsilon_t) = \frac{\alpha\mu(1+\mu)^2[1+\alpha(1+\mu)]}{(\alpha+\alpha\mu-\mu)^2}$.*

Сада, из тврђења (2.1.1) можемо закључити да је модел са геометријском маргиналном расподелом дефинисан ако и само ако је $\alpha > \mu/(1+\mu)$. Стога, веома је битно посматрати случај када је α близу $\mu/(1+\mu)$. У том случају имамо да је $P(\varepsilon_t \geq x) \approx 1$ за свако $x \in \mathbb{N}_0$. Заправо, можемо подразумевати да је $\varepsilon_t = \infty$ за свако $t \in \mathbb{Z}$ и да X_t задовољава $X_t \approx \alpha \diamond X_{t-1}$. Неке од особина које се односе на овај гранични случај биће разматране касније када будемо говорили о оцењивању непознатих параметара и предвиђању за корак унапред.

На основу претходно наведених резултата, можемо дефинисати min-INAR(1) модел са геометријском маргиналном расподелом.

Дефиниција 2.3.1 *За $\{X_t,\ t \in \mathbb{Z}\}$ кажемо да је геометријски минификациони* INAR(1) *модел уколико је* min-INAR(1) *модел са геометријском маргиналном расподелом $Geom\big(\frac{\mu}{1+\mu}\big)$ за $\mu > 0$ и $\alpha > \frac{\mu}{1+\mu}$.*

Најпре ћемо се осврнути на две битне особине модела и на вероватноће прелаза, које ће бити потребне за извођење условне логаритамске функције веродостојности.

Лема 2.3.1 (Shiryaev, 1995, стр.379) *Нека је дат низ случајних променљивих $\xi_0, \xi_{\pm 1}, \xi_{\pm 2}, \ldots$ Ако је $\mathcal{F}_n = \sigma(\xi_n, \xi_{n-1}, \ldots)$ σ-алгебра генерисана са $\{\xi_n, \xi_{n-1}, \ldots\}$, онда је $\mathcal{X} = \bigcap_{n=0}^{-\infty} \mathcal{F}_n$, репна σ-алгебра.*

Лема 2.3.2 (Shiryaev, 1995, стр.381) *Ако је $\xi_0, \xi_{\pm 1}, \xi_{\pm 2}, \dots$ низ независних случајних променљивих и ако је $A \in \mathcal{X}$, где је $\mathcal{X}$ дефинисано у Леми 2.3.1, тада је $P(A) = 0$ или $P(A) = 1$.*

Тврђење 2.3.1 *Нека је $\{X_t,\ t \in \mathbb{Z}\}$ геометријски минификациони $INAR(1)$ модел дат у (2.1.3) и нека је $\theta = \frac{\mu[1+\alpha(1+\mu)]}{\alpha(1+\mu)^2}$. Тада је $\{X_t,\ t \in \mathbb{Z}\}$ строго стационаран и ергодичан процес са вероватноћама прелаза*

$$\begin{aligned} P(X_t = x \mid X_{t-1} = y) = \theta^x \binom{x+y}{x} \left(\frac{\alpha}{1+\alpha}\right)^x \left(\frac{1}{1+\alpha}\right)^{y+1} \\ + (1-\theta)\theta^x \left[1 - \sum_{i=0}^{x} \binom{i+y}{i} \left(\frac{\alpha}{1+\alpha}\right)^i \left(\frac{1}{1+\alpha}\right)^{y+1}\right], \end{aligned} \tag{2.3.1}$$

$x, y \in \mathbb{N}_0$.

Доказ. Нека су x и y произвољни ненегативни цели бројеви. Вероватноћа прелаза се једноставно може представити на следећи начин

$$\begin{aligned} \pi(x|y) &\equiv P(X_t = x \mid X_{t-1} = y) \\ &= P(X_t \geq x \mid X_{t-1} = y) - P(X_t \geq x+1 \mid X_{t-1} = y). \end{aligned} \tag{2.3.2}$$

Прво ћемо посматрати условну вероватноћу $P(X_t \geq x \mid X_{t-1} = y)$. Коришћењем особине независности случајних променљивих ε_t и $\alpha \diamond X_{t-1}$ добијамо да је

$$\begin{aligned} P(X_t \geq x \mid X_{t-1} = y) &= P(\min(\alpha \diamond X_{t-1}, \varepsilon_t) \geq x | X_{t-1} = y) \\ &= P(\alpha \diamond X_{t-1} \geq x | X_{t-1} = y) P(\varepsilon_t \geq x). \end{aligned} \tag{2.3.3}$$

Посматрајмо сада случајну променљиву $\alpha \diamond X \mid X$. На почетку ове главе, напоменули смо да случајна променљива $\alpha \diamond X \mid X$ има негативну биномну расподелу $\mathcal{NB}(X+1, \frac{\alpha}{1+\alpha})$, одакле следи да уколико је $X_{t-1} = y$, тада $\alpha \diamond X_{t-1}$ има негативну биномну расподелу $\mathcal{NB}(y+1, \frac{\alpha}{1+\alpha})$ и важи да је

$$P(\alpha \diamond X_{t-1} \geq x | X_{t-1} = y) = \sum_{i=x}^{\infty} \binom{i+y}{i} \left(\frac{\alpha}{1+\alpha}\right)^i \left(\frac{1}{1+\alpha}\right)^{y+1}.$$

На основу расподеле случајне променљиве ε_t, која је дата у тврђењу 2.1.1 и увођењем смене $\theta = \frac{\mu[1+\alpha(1+\mu)]}{\alpha(1+\mu)^2}$ имамо да је

$$P(\varepsilon_t \geq x) = \theta^x.$$

Сада можемо закључити да је

$$P(X_t \geq x \mid X_{t-1} = y) = \theta^x \sum_{i=x}^{\infty} \binom{i+y}{i} \left(\frac{\alpha}{1+\alpha}\right)^i \left(\frac{1}{1+\alpha}\right)^{y+1}. \quad (2.3.4)$$

Слично, можемо приметити да је

$$P(X_t \geq x+1 \mid X_{t-1} = y) = \theta^{x+1} \sum_{i=x+1}^{\infty} \binom{i+y}{i} \left(\frac{\alpha}{1+\alpha}\right)^i \left(\frac{1}{1+\alpha}\right)^{y+1}.$$

Узимајући разлику две последње посматране условне расподеле, следи

$$\begin{aligned}
\pi(x|y) &= \theta^x \sum_{i=x+1}^{\infty} \binom{i+y}{i} \left(\frac{\alpha}{1+\alpha}\right)^i \left(\frac{1}{1+\alpha}\right)^{y+1} \\
&+ \theta^x \binom{x+y}{x} \left(\frac{\alpha}{1+\alpha}\right)^x \left(\frac{1}{1+\alpha}\right)^{y+1} \\
&- \theta^{x+1} \sum_{i=x+1}^{\infty} \binom{i+y}{i} \left(\frac{\alpha}{1+\alpha}\right)^i \left(\frac{1}{1+\alpha}\right)^{y+1} \\
&= \theta^x \binom{x+y}{x} \left(\frac{\alpha}{1+\alpha}\right)^x \left(\frac{1}{1+\alpha}\right)^{y+1} \\
&+ (1-\theta)\theta^x \sum_{i=x+1}^{\infty} \binom{i+y}{i} \left(\frac{\alpha}{1+\alpha}\right)^i \left(\frac{1}{1+\alpha}\right)^{y+1}. \quad (2.3.5)
\end{aligned}$$

Коришћењем особине негативне биномне расподеле да је

$$\sum_{i=x+1}^{\infty} \binom{i+y}{i} \left(\frac{\alpha}{1+\alpha}\right)^i \left(\frac{1}{1+\alpha}\right)^{y+1} = 1 - \sum_{i=0}^{x} \binom{i+y}{i} \left(\frac{\alpha}{1+\alpha}\right)^i \left(\frac{1}{1+\alpha}\right)^{y+1},$$

добијамо да је облик вероватноће прелаза

$$\begin{aligned}
P(X_t = x \mid X_{t-1} = y) = \theta^x &\binom{x+y}{x} \left(\frac{\alpha}{1+\alpha}\right)^x \left(\frac{1}{1+\alpha}\right)^{y+1} \\
&+ (1-\theta)\theta^x \left[1 - \sum_{i=0}^{x} \binom{i+y}{i} \left(\frac{\alpha}{1+\alpha}\right)^i \left(\frac{1}{1+\alpha}\right)^{y+1}\right],
\end{aligned} \quad (2.3.6)$$

$x, y \in \mathbb{N}_0$, што је и требало показати.

Остало је да покажемо да је модел строго стационаран и ергодичан. Покажимо прво особину стационарности. Довољно је показати да је

$$P(X_1 = x_1, \ldots, X_n = x_n) = P(X_{1+h} = x_1, \ldots, X_{n+h} = x_n),$$

задовољено за свако $h \in \mathbb{N}_0$ и $n \in \mathbb{N}$. Како је ово Марковљев процес првог реда, претходни услов је еквивалентан са

$$P(X_1 = x_1) \prod_{i=2}^{n} P(X_i = x_i \mid X_{i-1} = x_{i-1}) = P(X_{1+h} = x_1) \times \prod_{i=2}^{n} P(X_{i+h} = x_i \mid X_{i+h-1} = x_{i-1}).$$

Како вероватноћа прелаза дата у (2.3.1) има исти облик за свако $t \in \mathbb{Z}$, можемо закључити да су лева и десна страна претходне једнакости заиста једнаке, тј. да је модел строго стационаран.

Сада ћемо показати ергодичност. За процес $\{X_t\}$, показали смо да је строго стационаран процес. Нека је $\mathcal{A}$ произвољан догађај који је инваријантан у односу на процес $\{X_t\}$. Из дефиниције 2 из Shiryaev (1995, стр.413), имамо да је строго стационаран процес $\{X_t\}$ ергодичан ако је вероватноћа произвољног инваријантног догађаја у односу на овај процес једнака 0 или 1, тј. уколико је $P(\mathcal{A}) = 0$ или $P(\mathcal{A}) = 1$. Како је σ-алгебра генерисана случајним променљивама X_t, X_{t-1}, $\ldots$, она припада и σ-алгебри $\mathcal{F}(\varepsilon_t, Y^{(t-1)}, \varepsilon_{t-1}, Y^{(t-2)}, \ldots)$, где $Y^{(t)}$ представља бројачки низ којим је генерисана случајна променљива X_t. Сада, базирајући се на доказ теореме Теорема 2 у Ristić, Nastić (2012), имамо да је

$$\mathcal{A} \in \bigcap_{t=0}^{-\infty} \mathcal{F}(\varepsilon_t, Y^{(t-1)}, \varepsilon_{t-1}, Y^{(t-2)}, \ldots). \tag{2.3.7}$$

На основу Леме 2.3.1, десна страна у (2.3.7) је репна σ-алгебра, те на основу Леме 2.3.2 следи да је вероватноћа догађаја $\mathcal{A}$ једнака 0 или 1, тј. $P(\mathcal{A}) = 0$ или $P(\mathcal{A}) = 1$. Из претходног закључујемо да је процес ергодичан. $\square$

2.3.1 Условне статистичке величине

Прво ћемо представити условно очекивање $E(X_t|X_{t-1})$ и условну дисперзију $D(X_t|X_{t-1})$. Почећемо са условним очекивањем. Овај резултат ће касније бити потребан за оцењивање методом условних најмањих квадрата, за корак унапред предвиђање и за одређивање стандардизованих Пирсонових резидуала.

Тврђење 2.3.2 *Нека је* $\{X_t,\ t \in \mathbb{Z}\}$ *геометријски минификациони* INAR(1) *модел дефинисан у* (2.1.3) *и нека је* $\theta = \frac{\mu[1+\alpha(1+\mu)]}{\alpha(1+\mu)^2}$. *Тада је условно очекивање случајне променљиве* X_t *за дато* X_{t-1} *следећег облика*

$$E(X_t|X_{t-1}) = \frac{\theta}{1-\theta}\left[1-\left(\frac{1}{1+\alpha-\alpha\theta}\right)^{1+X_{t-1}}\right]. \tag{2.3.8}$$

Доказ. Прво ћемо посматрати условну функцију генератрисе вероватноће $E(s^{X_t}|X_{t-1})$. Ова функција нам је потребна за лакше израчунавање условног очекивања $E(X_t|X_{t-1})$. Нека је y произвољан ненегативан цео број. Условна функција генератрисе вероватноће случајне променљиве X_t за дато $X_{t-1} = y$ може бити одређена помоћу вероватноће прелаза као

$$E(s^{X_t}|X_{t-1} = y) = \sum_{x=0}^{\infty} s^x P(X_t = x|X_{t-1} = y), \quad |s| < \frac{\alpha(1+\mu)^2}{\mu[1+\alpha(1+\mu)]}. \tag{2.3.9}$$

Користећи доказ тврђења 2.3.1 имамо да се условна вероватноћа $P(X_t = x|X_{t-1} = y)$ може изразити као разлика условних вероватноћа $P(X_t \geq x|X_{t-1} = y)$ и $P(X_t \geq x+1|X_{t-1} = y)$. Коришћењем овог представљања, условна функција генератрисе вероватноће је

$$\begin{aligned} E(s^{X_t}|X_{t-1} = y) &= \sum_{x=0}^{\infty} s^x P(X_t \geq x|X_{t-1} = y) \\ &- \sum_{x=0}^{\infty} s^x P(X_t \geq x+1|X_{t-1} = y), \end{aligned} \tag{2.3.10}$$

односно, важи да је

$$
\begin{aligned}
E(s^{X_t}|X_{t-1}=y) &= s^0 P(X_t \geq 0|X_{t-1}=y) + \sum_{x=1}^{\infty} s^x P(X_t \geq x|X_{t-1}=y) \\
&- \sum_{x=1}^{\infty} s^{x-1} P(X_t \geq x|X_{t-1}=y) \\
&= 1 + (1-s^{-1}) \sum_{x=1}^{\infty} s^x P(X_t \geq x|X_{t-1}=y). \qquad (2.3.11)
\end{aligned}
$$

Посматрајмо сада суму $\sum_{x=1}^{\infty} s^x P(X_t \geq x|X_{t-1}=y)$. Из (2.3.4) је

$$
\sum_{x=1}^{\infty} s^x P(X_t \geq x|X_{t-1}=y) = \sum_{x=1}^{\infty} (\theta s)^x \sum_{i=x}^{\infty} \binom{i+y}{i} \left(\frac{\alpha}{1+\alpha}\right)^i \left(\frac{1}{1+\alpha}\right)^{y+1},
$$

где променом места сумама у претходном изразу долазимо до једнакости

$$
\sum_{x=1}^{\infty} s^x P(X_t \geq x|X_{t-1}=y) = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{x=1}^{i} (\theta s)^x \binom{i+y}{i} \left(\frac{\alpha}{1+\alpha}\right)^i \left(\frac{1}{1+\alpha}\right)^{y+1}. \tag{2.3.12}
$$

Како је $\alpha > \frac{\mu}{1+\mu}$ и $|s| \leq 1$ следи да је $\theta < 1$, а самим тим и $\sum_{x=1}^{i} (\theta s)^x = \theta s \frac{1-(\theta s)^i}{1-\theta s}$, те имамо да је

$$
\begin{aligned}
\sum_{x=1}^{\infty} s^x P(X_t \geq x|X_{t-1}=y) &= \frac{\theta s}{1-\theta s} \\
&\times \sum_{i=0}^{\infty} [1-(\theta s)^i] \binom{i+y}{i} \left(\frac{\alpha}{1+\alpha}\right)^i \left(\frac{1}{1+\alpha}\right)^{y+1}.
\end{aligned} \tag{2.3.13}
$$

Применом једнакости

$$
\sum_{i=0}^{\infty} \binom{i+y}{i} \left(\frac{\alpha}{1+\alpha}\right)^i \left(\frac{1}{1+\alpha}\right)^{y+1} = 1
$$

и

$$\sum_{i=0}^{\infty}(\theta s)^i\binom{i+y}{i}\left(\frac{\alpha}{1+\alpha}\right)^i\left(\frac{1}{1+\alpha}\right)^{y+1} = E((\theta s)^{NB(y+1,\frac{\alpha}{1+\alpha})}) = (1+\alpha-\alpha\theta s)^{-1-y}, \tag{2.3.14}$$

директним рачуном долазимо до

$$\sum_{x=1}^{\infty} s^x P(X_t \geq x|X_{t-1}=y) = \frac{\theta s}{1-\theta s}[1-(1+\alpha-\alpha\theta s)^{-1-y}].$$

Заменом последњег резултата у (2.3.11), добијамо израз за условну функцију генератрисе вероватноће

$$E(s^{X_t}|X_{t-1}) = \frac{1-\theta}{1-\theta s}+\frac{\theta(1-s)}{1-\theta s}\left(\frac{1}{1+\alpha-\alpha\theta s}\right)^{1+X_{t-1}}, |s| < \frac{\alpha(1+\mu)^2}{\mu[1+\alpha(1+\mu)]}. \tag{2.3.15}$$

За одређивање условног очекивања $E(X_t|X_{t-1})$, користимо условну функцију генератрисе вероватноће дату у (2.3.15), где је y произвољан ненегативан цео број. Прво ћемо посматрати први парцијални извод функције (2.3.15) по промењљивој s. Након једноставног рачуна добијамо да је

$$\frac{\partial E(s^{X_t} \mid X_{t-1}=y)}{\partial s} = \frac{\theta(1-\theta)}{(1-\theta s)^2} - \frac{\theta(1-\theta)}{(1-\theta s)^2}(1+\alpha-\alpha\theta s)^{-y-1} + \frac{\alpha\theta^2(1-s)}{1-\theta s}(y+1)(1+\alpha-\alpha\theta s)^{-y-2}. \tag{2.3.16}$$

Сада, за $s=1$ у претходној једнакости и заменом y са X_{t-1}, коначно закључујемо да је

$$E(X_t|X_{t-1}) = \frac{\theta}{1-\theta}\left[1-\left(\frac{1}{1+\alpha-\alpha\theta}\right)^{1+X_{t-1}}\right],$$

чиме смо доказали тврђење. □

На основу тврђења 2.3.2, можемо закључити да условно очекивање у случају геометријског минификационог INAR(1) модела је нелинеарна функција, што није случај са INAR(1) моделима. Условно очекивање код INAR(1) модела је линеарна функција. Код геометријског минификационог INAR(1) модела овакав облик условног очекивања је очекиван, јер се геометријски минификациони INAR(1) модел користи за описивање екстремних догађаја поменутих раније у поглављу 2.2. Напоменимо да је условно очекивање модела који је конструисао Littlejohn (1992) такође нелинеарна функција. Вреди поменути да се слични облици могу добити и за условна очекивања $E(X_t|X_{t-k})$, $k>1$, у случају геометријског минификационог INAR(1) модела. Њихови изрази се не могу свести на једноставније облике, али се могу представити у облицима који су веома корисни за одређивање аутокорелације реда $k\geq 1$. Следећом лемом, представићемо облик условног очекивања случајне променљиве X_t за дато X_{t-k}, $k\geq 1$.

Лема 2.3.3 *Нека је $\{X_t,\ t\in\mathbb{Z}\}$ геометријски минификациони* INAR(1) *модел дефинисан у (2.1.3), $\theta=\frac{\mu[1+\alpha(1+\mu)]}{\alpha(1+\mu)^2}$, $a=\frac{\theta}{1-\theta}$, $A(s)=\frac{\theta(1-s)}{1-\theta s}$, $B(s)=(1+\alpha-\alpha\theta s)^{-1}$, $C(s)=A(s)B(s)$, $D(s)=1-A(s)$ и нека је $B^{(k)}(s)=B(B(\ldots B(s)))$, где се B примењује k пута. Тада је условно очекивање $E(X_t|X_{t-k})$ следећег облика*

$$E(X_t|X_{t-k})=a-aB(1)\sum_{i=1}^{k-1}\left(\prod_{j=1}^{i-1}C(B^{(j)}(1))\right)D(B^{(i)}(1))$$

$$-aB(1)\left(\prod_{j=1}^{k-1}C(B^{(j)}(1))\right)(B^{(k)}(1))^{X_{t-k}},$$

где је $\prod_{j=1}^{0}C(B^{(j)}(1))=1$ *и* $\sum_{i=1}^{0}\left(\prod_{j=0}^{i-1}C(B^{(j)}(1))\right)D(B^{(i)}(1))=0.$

Доказ. За доказ ове леме користићемо математичку индукцију. За $k=1$ смо већ показали да је

$$E(X_t|X_{t-1})=\frac{\theta}{1-\theta}\left[1-\left(\frac{1}{1+\alpha-\alpha\theta}\right)^{1+X_{t-1}}\right].$$

Коришћењем смена датих у формулацији тврђења, условно очекивање се може представити на следећи начин

$$E(X_t|X_{t-1}) = a - aB(1)(B^{(1)}(1))^{X_{t-1}} = \frac{\theta}{1-\theta}\left[1 - \left(\frac{1}{1+\alpha-\alpha\theta}\right)^{1+X_{t-1}}\right].$$

Дакле, тврђење је тачно за $k = 1$. Претпоставимо сада да је тврђење тачно за $k = l$ и покажимо да је тачно и за $k = l+1$. Прво, имамо да је

$$\begin{aligned} E(X_t|X_{t-l-1}) = a - aB(1)\sum_{i=1}^{l-1}\left(\prod_{j=1}^{i-1} C(B^{(j)}(1))\right) D(B^{(i)}(1)) \\ - aB(1)\left(\prod_{j=1}^{l-1} C(B^{(j)}(1))\right) E\left((B^{(l)}(1))^{X_{t-l}}|X_{t-l-1}\right). \end{aligned} \tag{2.3.17}$$

Даље, да бисмо одредили $E\left((B^{(l)}(1))^{X_{t-l}}|X_{t-l-1}\right)$, користићемо једнакост (2.3.15), коју ћемо посматрати када је $s = B^{(l)}(1)$. Сада, имамо да је

$$\begin{aligned} E\left((B^{(l)}(1))^{X_{t-l}}|X_{t-l-1}\right) &= 1 - A(B^{(l)}(1)) \\ &\quad + A(B^{(l)}(1))B(B^{(l)}(1))(B^{(l+1)}(1))^{X_{t-l-1}} \\ &= D(B^{(l)}(1)) + C(B^{(l)}(1))(B^{(l+1)}(1))^{X_{t-l-1}}. \end{aligned} \tag{2.3.18}$$

Заменом (2.3.18) у (2.3.17) следи једнакост

$$\begin{aligned} E(X_t|X_{t-l-1}) = a - aB(1)\sum_{i=1}^{l}\left(\prod_{j=1}^{i-1} C(B^{(j)}(1))\right) D(B^{(i)}(1)) \\ - aB(1)\left(\prod_{j=1}^{l} C(B^{(j)}(1))\right)(B^{(l+1)}(1))^{X_{t-l-1}}, \end{aligned} \tag{2.3.19}$$

чиме је тврђење показано. □

Следећим тврђењем показаћемо облик условне дисперзије случајне промењиве X_t за дато X_{t-1}.

Тврђење 2.3.3 *Нека је* $\{X_t,\ t \in \mathbb{Z}\}$ *геометријски минификациони* INAR(1) *модел дефинисан у* (2.1.3) *и нека је* $\theta = \frac{\mu[1+\alpha(1+\mu)]}{\alpha(1+\mu)^2}$. *Тада је условна дисперзија случајне промењиве* X_t *за дато* X_{t-1}

$$\begin{aligned} D(X_t|X_{t-1}) &= \frac{\theta}{(1-\theta)^2} - \frac{\theta}{1-\theta}(1+\alpha-\alpha\theta)^{-1-X_{t-1}} \\ &- \frac{2\alpha\theta^2}{1-\theta}(1+X_{t-1})(1+\alpha-\alpha\theta)^{-2-X_{t-1}} \\ &- \frac{\theta^2}{(1-\theta)^2}(1+\alpha-\alpha\theta)^{-2-2X_{t-1}}. \end{aligned} \tag{2.3.20}$$

Доказ. За условну дисперзију $D(X_t|X_{t-1})$ важи да је

$$D(X_t|X_{t-1}) = E(X_t(X_t-1)|X_{t-1}) + E(X_t|X_{t-1}) - (E(X_t|X_{t-1}))^2, \tag{2.3.21}$$

где се условно очекивање $E(X_t(X_t-1)|X_{t-1})$ може посматрати као

$$E(X_t(X_t-1)|X_{t-1}) = \frac{\partial^2 E(s^{X_t}|X_{t-1})}{\partial s^2}\Big|_{s=1}.$$

Прво, рачунањем другог парцијалног извода у односу на s од условне функције генератрисе вероватноће која је дата у (2.3.15) и постављањем да је $s = 1$, долазимо до једнакости

$$\begin{aligned} E(X_t(X_t-1)|X_{t-1}) = \frac{2\theta^2}{(1-\theta)^2} - \frac{2\theta^2}{(1-\theta)^2}(1+\alpha-\alpha\theta)^{-1-X_{t-1}} \\ - \frac{2\alpha\theta^2}{1-\theta}(1+X_{t-1})(1+\alpha-\alpha\theta)^{-2-X_{t-1}}. \end{aligned} \tag{2.3.22}$$

Сада, заменом последње једнакости у (2.3.21) заједно са условним очекивањем $E(X_t|X_{t-1})$, датим у (2.3.8), за крајњи облик условне дисперзије добијамо израз (2.3.20), што је и требало показати. □

На основу претходног тврђења, закључујемо да је код геометријског минификационог INAR(1) модела, условна дисперзија нелинеарна функција, што је случај и за условно очекивање. С друге стране, условна дисперзија је линеарна функција код INAR(1) модела.

2.3.2 Аутокорелациона структура модела

У наставку ћемо посматрати и дискутовати аутоковаријансну и аутокорелациону структуру модела. Показаћемо да овај модел има аутоковаријансну и аутокорелациону структуру сличну аутоковаријансној и аутокорелационој структури INAR(1) модела. Најпре ћемо навести неколико помоћних резултата који ће нам помоћи приликом одређивања аутоковаријансе $\gamma(k) \equiv Cov(X_t, X_{t-k})$ и аутокорелације $\rho(k)$ реда $k \geq 1$ овог модела.

Лема 2.3.4 *Нека је* $\{X_t,\ t \in \mathbb{Z}\}$ *геометријски минификациони* INAR(1) *модел дефинисан у* (2.1.3). *Тада су аутоковаријансна и аутокорелациона функција реда* 1 *дате, редом, као*

$$\gamma(1) = \frac{\mu^2(1+\mu)}{1+\alpha+\alpha\mu}, \quad \rho(1) = \frac{\mu}{1+\alpha+\alpha\mu}\,.$$

Доказ. Прво ћемо посматрати заједничку функцију генератрисе вероватноће случајних променљивих X_t и X_{t-1} која је облика

$$\begin{aligned} E(u^{X_t} v^{X_{t-1}}) &= E(E(u^{X_t} v^{X_{t-1}} | X_{t-1})) \\ &= \frac{1-\theta}{1-\theta u} E(v^{X_{t-1}}) \\ &+ \frac{\theta(1-u)}{1-\theta u}\Big(\frac{1}{1+\alpha-\alpha\theta u}\Big) E\bigg(\Big(\frac{v}{1+\alpha-\alpha\theta u}\Big)^{X_{t-1}}\bigg), \end{aligned} \tag{2.3.23}$$

за $|u| < \frac{\alpha(1+\mu)^2}{\mu[1+\alpha(1+\mu)]}$ и $|v| < \frac{(1+\mu)}{\mu}$. Сада, на основу чињенице да случајна променљива X_{t-1} има геометријску расподелу са функцијом генератрисе вероватноће $E(s^{X_{t-1}}) = (1+\mu-\mu s)^{-1}$, примећујемо да је заједничка функција генератрисе вероватноће

$$\begin{aligned} E(u^{X_t} v^{X_{t-1}}) = &\frac{1-\theta}{1-\theta u} \cdot \frac{1}{1+\mu-\mu v} \\ &+ \frac{\theta(1-u)}{1-\theta u} \cdot \frac{1}{(1+\alpha)(1+\mu)-\mu v-\alpha\theta(1+\mu)u}\,. \end{aligned} \tag{2.3.24}$$

Следеће, имамо да је

$$E(X_t X_{t-1}) = \frac{\partial^2 E(u^{X_t} v^{X_{t-1}})}{\partial u \partial v}\Big|_{u=1,v=1} = \frac{\mu^2(2+\alpha+\mu+\alpha\mu)}{1+\alpha+\alpha\mu}.$$

Сада је аутоковаријансна функција

$$\gamma(1) = Cov(X_t, X_{t-1}) = E(X_t, X_{t-1}) - E(X_t)E(X_{t-1}) = \frac{\mu^2(1+\mu)}{1+\alpha+\alpha\mu},$$

док је аутокорелациона функција

$$\rho(1) = Corr(X_t, X_{t-1}) = \frac{\mu}{1+\alpha+\alpha\mu},$$

што је и требало показати. □

Из саме дефиниције модела имамо да је $\alpha > \frac{\mu}{1+\mu}$, одакле следи да је $\frac{\mu}{1+\alpha+\alpha\mu} < \frac{\mu}{1+\mu}$. Коначно, за аутокорелациону функцију можемо закључити да је $0 < Corr(X_t, X_{t-1}) < \frac{\mu}{1+\mu}$.

У наредној леми посматраћемо аутоковаријансу реда $k \geq 1$.

Лема 2.3.5 *Нека је* $\{X_t,\ t \in \mathbb{Z}\}$ *геометријски минификациони* INAR(1) *модел дефинисан у* (2.1.3), $\theta = \frac{\mu[1+\alpha(1+\mu)]}{\alpha(1+\mu)^2}$, $a = \frac{\theta}{1-\theta}$, $A(s) = \frac{\theta(1-s)}{1-\theta s}$, $B(s) = (1+\alpha-\alpha\theta s)^{-1}$, $C(s) = A(s)B(s)$, $D(s) = 1 - A(s)$ *и нека је* $B^{(k)}(s) = B(B(\ldots B(s)))$, *где је* B *примењено* k *пута. Тада је аутоковаријанса реда* $k \geq 1$

$$\gamma(k) = \frac{\theta}{1-\theta} B(1) \left(\prod_{j=1}^{k-1} C(B^{(j)}(1)) \right) \frac{\mu(1+\mu)(1-B^{(k)}(1))}{(1+\mu-\mu B^{(k)}(1))^2}.$$

Доказ. На основу леме 2.3.3 имамо да је

$$\begin{aligned} \gamma(k) &= Cov(E(X_t|X_{t-k}), X_{t-k}) \\ &= -aB(1) \left(\prod_{j=1}^{k-1} C(B^{(j)}(1)) \right) Cov((B^{(k)}(1))^{X_{t-k}}, X_{t-k}). \end{aligned} \tag{2.3.25}$$

Случајна променљива X_{t-k} има геометријску расподелу са очекивањем μ, па је на основу тога

$$E\left((B^{(k)}(1))^{X_{t-k}} X_{t-k}\right) = \frac{\mu B^{(k)}(1)}{(1+\mu-\mu B^{(k)}(1))^2}$$

и

$$E\left((B^{(k)}(1))^{X_{t-k}}\right) = \frac{1}{1+\mu-\mu B^{(k)}(1)}.$$

Сада можемо закључити да је

$$Cov((B^{(k)}(1))^{X_{t-k}}, X_{t-k}) = \frac{\mu(1+\mu)(B^{(k)}(1)-1)}{(1+\mu-\mu B^{(k)}(1))^2}\,.$$

Коришћењем последњег резултата за аутоковаријансу реда k, коначно добијамо да је

$$\gamma(k) = \frac{\theta}{1-\theta}B(1)\left(\prod_{j=1}^{k-1} C(B^{(j)}(1)\right)\frac{\mu(1+\mu)(1-B^{(k)}(1))}{(1+\mu-\mu B^{(k)}(1))^2}\,.\square$$

Аутокорелациона функција реда $k \geq 1$ дата је следећим тврђењем.

Тврђење 2.3.4 *Нека је* $\{X_t,\ t\in\mathbb{Z}\}$ *геометријски минификациони* INAR(1) *модел дефинисан у* (2.1.3). *Тада је аутокорелациона функција реда* $k \geq 1$

$$\rho(k) \equiv Corr(X_t, X_{t-k}) = \left(\frac{\mu}{1+\alpha+\alpha\mu}\right)^k,\ \ k\geq 1. \tag{2.3.26}$$

Доказ. Доказ овог тврђења показаћемо математичком индукцијом. Тврђење је тачно за $k=1$, што закључујемо на основу леме 2.3.4. Претпоставимо да је тврђење тачно за $k=l$ и покажимо да важи и за $k=l+1$. Из леме 2.3.5 имамо да се аутокорелациона функција реда $k=l+1$ може представити на следећи начин

$$\rho(l+1) = \frac{\theta}{1-\theta}B(1)\left(\prod_{j=1}^{l} C(B^{(j)}(1)\right)\frac{1-B^{(l+1)}(1)}{(1+\mu-\mu B^{(l+1)}(1))^2}\,. \tag{2.3.27}$$

Како је трврђење из претпоставке тачно за $k=l$, имамо да је

$$\rho(l) = \frac{\theta}{1-\theta}B(1)\left(\prod_{j=1}^{l-1} C(B^{(j)}(1)\right)\frac{1-B^{(l)}(1)}{(1+\mu-\mu B^{(l)}(1))^2} = \left(\frac{\mu}{1+\alpha+\alpha\mu}\right)^l.$$

Применом последње једнакости у (2.3.27) и коришћењем чињенице да је $B^{(l+1)}(1) = (1 + \alpha - \alpha\theta B^{(l)}(1))^{-1}$ важи

$$\begin{aligned}
\rho(l+1) &= \left(\frac{\mu}{1+\alpha+\alpha\mu}\right)^{l} A(B^{(l)}(1))B(B^{(l)}(1)) \\
&\times \frac{(1+\mu-\mu B^{(l)}(1))^2}{1-B^{(l)}(1)} \frac{1-B^{(l+1)}(1)}{(1+\mu-\mu B^{(l+1)}(1))^2} \\
&= \left(\frac{\mu}{1+\alpha+\alpha\mu}\right)^{l} \alpha\theta B^{(l+1)}(1)(1+\mu-\mu B^{(l)}(1))^2 \\
&\times \frac{1+\alpha-\alpha\theta B^{(l)}(1)}{(1+\alpha(1+\mu)-\alpha\theta(1+\mu)B^{(l)}(1))^2} \\
&= \left(\frac{\mu}{1+\alpha+\alpha\mu}\right)^{l+1}. \qquad (2.3.28)
\end{aligned}$$

Овим је тврђење показано. □

Из претходног тврђења можемо извести закључак да је аутокорелациона функција било ког реда позитивна и да експоненцијално опада како $k \to \infty$. Такође, закључујемо да модел има исту аутокорелациону структуру као и INAR(1) модели. Иако је условно очекивање за овај модел нелинеарна функција, корелациона структура се описује линеарном функцијом. Минификациони модел уведен у Littlejohn (1992) такође има нелинеарно условно очекивање и линеарну корелациону структуру.

2.4 Оцењивање непознатих параметара

У овом одељку посматраћемо оцене непознатих параметара μ и α геометријског минификационог INAR(1) модела. Представићемо три метода за оцењивање непознатих параметара: метод условне максималне веродостојности (CML), метод момената (MM) и метод условних најмањих квадрата (CLS). Сви методи оцењивања су базирани на резултатима који су разматрани у претходном одељку.

Особине посматраних оцена сва три метода проверићемо кроз Монте-Карло симулације за различите вредности параметара. Поред тога, Монте-Карло симулације користимо и приликом провере особина корак унапред предвиђања заснованих на $\min-\mathrm{INAR}(1)$ моделу и на четири одговарајућа модела.

Нека је $(X_1, ..., X_n)$ случајан узорак обима n, дефинисан геометријским минификационим INAR(1) моделом. Анализирајмо сада детаљно сваки од поменутих метода за оцењивање непознатих параметара.

2.4.1 Метод условне максималне веродостојности

С обзиром да је геометријски минификациони INAR(1) модел Марковљев процес првог реда, можемо посматрати условну логаритамску функцију веродостојности $\log L(\alpha, \mu)$ коришћењем условне вероватноће (2.3.1) дате у тврђењу 2.3.1. Према томе, заменом (2.3.1) у израз за логаритамску функцију веродостојности за посматране вредности $x_1, \dots, x_n$, условна логаритамска функција веродостојности $\log L(\alpha, \mu)$ је облика

$$
\begin{aligned}
\log L(\alpha,\mu) &= \sum_{i=2}^{n} \log P(X_i = x_i | X_{i-1} = x_{i-1}) \\
&= \sum_{i=2}^{n} \log \Bigg[\theta^{x_i} \binom{x_i + x_{i-1}}{x_i} \left(\frac{\alpha}{1+\alpha}\right)^{x_i} \left(\frac{1}{1+\alpha}\right)^{1+x_{i-1}} \\
&+(1-\theta)\theta^{x_i} \left(1 - \sum_{j=0}^{x_i} \binom{j + x_{i-1}}{j} \left(\frac{\alpha}{1+\alpha}\right)^{j} \left(\frac{1}{1+\alpha}\right)^{1+x_{i-1}} \right) \Bigg].
\end{aligned}
\tag{2.4.1}
$$

Оцене за непознате параметре μ и α, применом овог метода, добијамо као вредности које максимизирају условну логаритамску функцију веродостојности. Као што је и уобичајено за овај метод, до оцена добијених методом условне максималне веродостојности не можемо доћи аналитичким путем, већ морамо користити нумеричке методе. За овај начин оцењивања користићемо оптимизациони метод базиран на CG (коњуговани градијент) методу уграђеном у функцији optim у статистичком софтверу R. Овај метод смо изабрали из два разлога. Први је тај што смо могли лако да одредимо изводе условне логаритамске функције веродостојности, а други јер су симулације показале да је CG метод бољи од Nelder-Mead и BFGS (квази-Њутн) метода. Условна логаритамска функција веродостојности је нелинеарна функција и има пуно локалних максимума, тако да се Nelder-Mead метод показао лошим због некоришћења градијента. CG метод не складишти матрицу прорачуна и због тога је много успешнији у озбиљнијим проблемима оптимизације од BFGS метода.

2.4.2 Метод момената

За разлику од метода условне максималне веродостојности, код метода момената можемо аналитички одредити оцене непознатих параметара. Како је геометријски минификациони INAR(1) модел стационаран и важи $E(X_t) = \mu$ за свако $t \in \mathbb{Z}$, можемо оценити параметар μ узорачком средином $\overline{X}_n$. Према томе, оцена параметра μ је

$$\widehat{\mu} = \overline{X}_n.$$

За оцењивање параметра α користићемо резултат тврђења 2.3.4. Наиме, за $k = 1$ у (2.3.26) добијамо да је

$$\rho(1) = \frac{\mu}{1 + \alpha(1 + \mu)} .$$

Решавањем једначине у односу на α, имамо да је

$$\alpha = \frac{1}{1 + \mu} \left[\frac{\mu}{\rho(1)} - 1 \right] ,$$

одакле је оцена параметра α облика

$$\widehat{\alpha} = \frac{1}{1+\overline{X}_n}\left[\frac{\overline{X}_n}{\widehat{\rho}_n} - 1\right],$$

где је $\widehat{\rho}_n$ узорачка аутокорелација реда 1 дата са

$$\widehat{\rho}_n = \frac{\sum_{t=1}^{n-1}(X_t - \overline{X}_n)(X_{t+1} - \overline{X}_n)}{\sum_{t=1}^{n}(X_t - \overline{X}_n)^2}.$$

За узорак великог обима, оцене добијене методом момената можемо користити као почетне вредности код примене нумеричког одређивања оцена непознатих параметара приликом реализације метода условне максималне веродостојности као и приликом реализације метода условних најмањих квадрата, о коме ће бити више речи у наставку.

2.4.3 Метод условних најмањих квадрата

Услед примене метода условних најмањих квадрата, оцене за непознате параметаре μ и α посматрамо као вредности које минимизирају функцију

$$S(\mu,\alpha) = \sum_{t=2}^{n}(X_t - E(X_t|X_{t-1}))^2.$$

Заменом израза за условно очекивање, датог са (2.3.8) у тврђењу 2.3.2, функција S је облика

$$S(\mu,\alpha) = \sum_{t=2}^{n}\left(X_t - \frac{\theta}{1-\theta}\left[1-(1+\alpha-\alpha\theta)^{-1-X_{t-1}}\right]\right)^2,$$

где је $\theta = \frac{\mu[1+\alpha(1+\mu)]}{\alpha(1+\mu)^2}$. Као и у случају са методом условне максималне веродостојности, оцене добијене методом условних најмањих квадрата могу се одредити нумерички коришћењем оптимизационог метода.

2.4.4 Симулације

Сада ћемо дискутовати о особинама оцена добијених претходно уведеним методима. На основу min-INAR(1) модела, симулирано је 10000 узорака обима 1000 и посматрани су подузорци обима 100, 200, 500 и 1000. За тачне вредности параметара μ и α користићемо а) $\mu = 1,4135$ и $\alpha = 1,7743$, б) $\mu = 1$ и $\alpha = 3$, и в) $\mu = 4$ и $\alpha = 0,81$. Први пар тачних вредности добијен је из реалних података посматраних на крају овог одељка, док трећи пар тачних вредности представља гранични случај када је α близу своје границе $\mu/(1+\mu)$. Можемо приметити да трећи случај даје јако добре оцене, али се проблем јавља у предвиђању за корак унапред о чему ће бити речи касније. Посматраћемо узорачке средине добијених оцена и њихове стандардне девијације, које су представљене између заграда. Сви резултати су дати у табели 2.1. У првом случају имамо умерену позитивну корелацију 0,2676, у другом слабу позитивну корелацију 0,1429, док у трећем случају имамо јаку позитивну корелацију 0,7921.

На основу резултата датих у табели 2.1, можемо приметити да је стандардна девијација за параметар α приликом оцењивања методом момената (MM) у прва два случаја велика, али опада како обим узорка расте. Разлог оваквог понашања стандардне девијације је слаба аутокорелација која може бити значајно мања приликом оцењивања. Како се приликом примене метода момената користи реципрочна вредност оцењене аутокорелације, добијамо велике вредности за оцену параметра α. За друга два метода за оцењивање непознатих параметара добијамо веома добре оцене са малим стандардним девијацијама. Најбољи резултати добијени су применом метода условне максималне веродостојности (CML), али је најмање времена за рачунање потребно за оцењивање методом условних најмањих квадрата (CLS) када имамо велики обим узорка. Такође, можемо приметити да стандардне девијације оцена добијених применом сва три метода опадају како обим узорка расте, те показују да је тачност све већа.

Табела 2.1: Оцене добијене применом метода условне максималне веродостојности, метода момената и метода условних најмањих квадрата, за различите стварне вредности параметара μ и α.

а) $\mu = 1,4135$ и $\alpha = 1,7743$						
n	$\widehat{\mu}_{CML}$	$\widehat{\alpha}_{CML}$	$\widehat{\mu}_{MM}$	$\widehat{\alpha}_{MM}$	$\widehat{\mu}_{CLS}$	$\widehat{\alpha}_{CLS}$
100	1,4143	2,1504	1,4134	4,0611	1,4105	2,2765
	(0,2443)	(1,1903)	(0,2439)	(82,4721)	(0,2497)	(1,1953)
200	1,4126	1,9577	1,4138	2,2364	1,4107	2,0594
	(0,1706)	(0,7210)	(0,1714)	(4,4570)	(0,1737)	(0,8620)
500	1,4125	1,8443	1,4130	1,9054	1,4115	1,8824
	(0,1083)	(0,3813)	(0,1092)	(0,4873)	(0,1102)	(0,4738)
1000	1,4126	1,8088	1,4130	1,8375	1,4120	1.8275
	(0,0764)	(0,2543)	(0,0771)	(0,315)	(0,0775)	(0,3295)
б) $\mu = 1$ и $\alpha = 3$						
n	$\widehat{\mu}_{CML}$	$\widehat{\alpha}_{CML}$	$\widehat{\mu}_{MM}$	$\widehat{\alpha}_{MM}$	$\widehat{\mu}_{CLS}$	$\widehat{\alpha}_{CLS}$
100	1,0146	3,2663	1,0027	9,7162	0,9971	3,0418
	(0,1798)	(1,7431)	(0,1639)	(136,2954)	(0,1769)	(1,5676)
200	1,0024	3,2468	1,0017	7,2589	0,9960	3,2108
	(0,1177)	(1,3448)	(0,1157)	(59,2600)	(0,1182)	(1,3833)
500	1,0006	3,0740	1,0008	4,0011	0,9931	2,8262
	(0,0728)	(0,8971)	(0,0728)	(11,9227)	(0,0744)	(0,8849)
1000	1,0004	3,0407	1,0005	3,3136	0,9982	3,0323
	(0,0515)	(0,6274)	(0,0515)	(1,2489)	(0,0521)	(0,7138)
в) $\mu = 4$ и $\alpha = 0,81$						
n	$\widehat{\mu}_{CML}$	$\widehat{\alpha}_{CML}$	$\widehat{\mu}_{MM}$	$\widehat{\alpha}_{MM}$	$\widehat{\mu}_{CLS}$	$\widehat{\alpha}_{CLS}$
100	4,7501	0,8469	4,0021	0,9082	4,5772	0,9407
	(0,6583)	(0,0371)	(1,2761)	(0,1190)	(0,8277)	(0,1471)
200	4,7416	0,8397	4,0026	0,8708	4,4523	0,9005
	(0,5667)	(0,0209)	(0,9308)	(0,0688)	(0,7243)	(0,0939)
500	4,7330	0,8358	4,0012	0,8479	4,3252	0,8646
	(0,4415)	(0,0140)	(0,5868)	(0,0380)	(0,6125)	(0,0547)
1000	4,7380	0,8349	3,9989	0,8383	4,3019	0,8500
	(0,3696)	(0,0116)	(0,4161)	(0,0273)	(0,4989)	(0,0371)

2.4.5 Предвиђање за један корак унапред

Условно очекивање $E(X_t|X_{t-1})$ дато у (2.3.8) је нелинеарна функција по X_{t-1}. Како ћемо касније, у одељку Примене на реалним подацима, користити ову нелинеарну функцију за предвиђање вредности из геометријског минификационог модела min-INAR(1), веома је важно проверити особине предвиђања овог модела као и четири конкурентна модела, која ће касније бити разматрана. Конкурентни модели су PoINAR(1) (Alzaid и Al-Osh (1988)), GINAR(1) (Alzaid и Al-Osh (1988)), NGINAR(1) (Ristić , Bakouch и Nastić (2009)) и геометријски минификациони модел првог реда уведен у Littlejohn (1992). Њихове особине предвиђања проверићемо симулацијама. У вези са тим, симулираћемо 10000 узорака обима 168 на основу min-INAR(1) модела. За тачне вредности параметара узећемо $\mu = 1.4135$ и $\alpha = 1.7743$. У сваком симулираном узорку, првих 138 реализација користимо за оцењивање, док преосталих 30 реализација користимо за предвиђање. За сваки симулирани узорак, на основу последњих 30 реализација рачунамо средње квадратне грешке и коначно за свих 10000 узорака рачунамо просечне средње квадратне грешке за сваки од пет посматраних модела. Добијени резултати дати су у табели 2.2. Из табеле 2.2 можемо закључити следеће. Најмања средње квадратна грешка је добијена за min-INAR(1) модел када су реализације настале управо на основу овог модела. Затим, за сваки од преостала четири модела, симулирамо 10000 узорака за случај умерене корелације. Сваки од симулираних узорака се поново дели на два дела, на првих 138 реализација и на преосталих 30 реализација. Од добијених резултата приказаних у табели 2.2, видимо да min-INAR(1) модел даје добра предвиђања када су реализације симулиране на основу модела представљеног у Littlejohn (1992). Ако се реализације добијају из једног од три INAR модела, онда имамо другачији закључак. Уколико је корелација између реализација мала, тада min-INAR(1) модел веома добро предвиђа ове вредности. Ово је очигледно јер су линеарне корелације мале, што имплицира нелинеарност понашања. Али, када су корелације веће, онда min-INAR(1) не предвиђа баш добро и у овом случају имамо линеарно понашање које је прикладније за INAR моделе.

На крају овог дела разматраћемо резултате, који нису представљени, за трећи случај када је $\mu = 4$ и $\alpha = 0.81$. Ово је гранични случај из кога следи да је θ близу 1 и да је условно очекивање $\infty \cdot 0$. Као последицу овога, добијамо лоша предвиђања за наш модел и тада је боље користити INAR моделе за предвиђања.

Табела 2.2: Резултати предвиђања на основу различитих симулираних модела.

Симулације на основу min-INAR(1) модела					
	GINAR(1)	PoINAR(1)	NGINAR(1)	Littlejohn	min-INAR(1)
$\mu = 1.4135$, $\alpha = 1.7743$	1.7481	1.7393	1.7543	2.1439	1.7227
Симулације на основу GINAR(1) модела					
	GINAR(1)	PoINAR(1)	NGINAR(1)	Littlejohn	min-INAR(1)
$\mu = 1$, $\alpha = 0.3$	1.3163	1.3216	1.3164	1.5966	1.3442
Симулације на основу PoINAR(1) модела					
	GINAR(1)	PoINAR(1)	NGINAR(1)	Littlejohn	min-INAR(1)
$\lambda = 1$, $\alpha = 0.3$	1.1434	1.1342	1.1761	1.3756	1.3291
Симулације на основу NGINAR(1) модела					
	GINAR(1)	PoINAR(1)	NGINAR(1)	Littlejohn	min-INAR(1)
$\mu = 1$, $\beta = 0.3$	1.3078	1.3105	1.3040	1.5882	1.3292
Симулације на основу Littlejohn's модела					
	GINAR(1)	PoINAR(1)	NGINAR(1)	Littlejohn	min-INAR(1)
$p = 0.2$, $\rho = 0.5$	4.0308	3.8118	3.9056	4.2667	3.6190

2.5 Примена на реалним подацима

Сада ћемо разматрати могућу примену min-INAR(1) модела на реалним подацима, који су већ коришћени у литератури. Такође, модел ћемо упоредити и са неколико конкурентних модела. Реални скуп података, који користимо, садржи добро познате полио податке који представљају месечни број новозаражених полиомијелитисом (дечијом парализом) у Сједињеним Америчким Државама од 1970. до 1983. године. Ове податке је први пут користио Zeger (1988), али су и касније, Maiti и Biswas (2015) примењивали INAR моделе на полио податке. За овај реални скуп података користићемо следећу методологију. Прво, поделићемо овај реални скуп података на два дела, тако да први део садржи $n-30$ реализација из скупа података дужине n, док преосталих 30 реализација припадају другом делу. Други део се користи за предвиђање и израчунавање средње квадратне грешке, док се први део користи за све преостало, а то је оцењивање непознатих параметара, провера маргиналне расподеле, провера реда и адекватности модела. Пре него што проверимо адекватност модела, упоредићемо min-INAR(1) модел са четири одговарајућа модела првог реда:

- GINAR(1) - INAR(1) модел са геометријском маргиналном расподелом, уведен у Alzaid, Al-Osh (1988),
- Poisson INAR(1) - INAR(1) модел са Пуасоновом маргиналном расподелом, уведен у Alzaid, Al-Osh (1988),
- NGINAR(1) - INAR(1) модел са геометријском маргиналном расподелом, уведен у Ristić, Bakouch, Nastić (2009),
- Геометријски минификациони модел, уведен у Littlejohn (1992).

Исти временски низ моделирамо користећи сваки од претходно наведених пет модела.

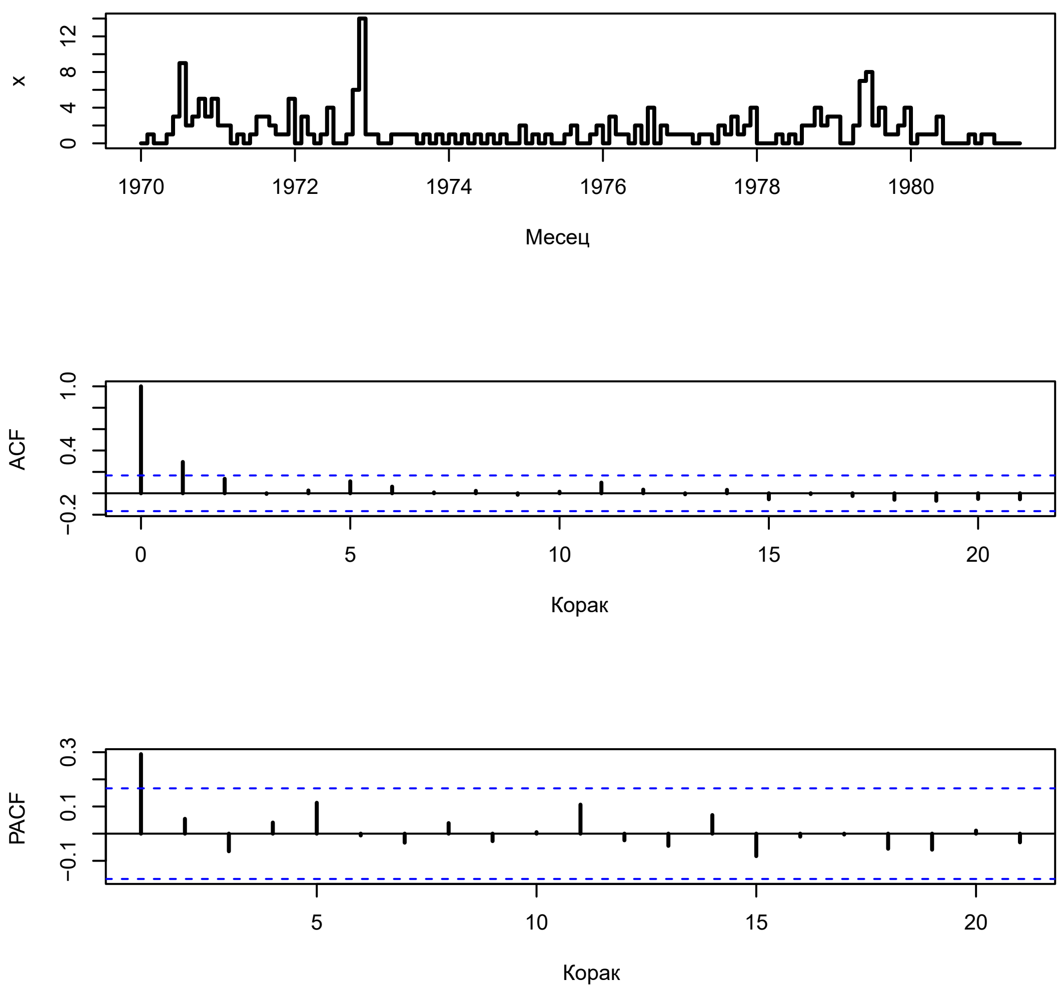
За адекватност модела, проверавамо да ли реални скуп података представља типичну реалнизацију min-INAR(1) модела. Више детаља о сваком примењеном кораку разматране методологије за овај реални скуп података даћемо у наставку.

Скуп података о полиомијелитису садржи 168 података који су бележени сваког месеца између јануара 1970. и децембра 1983. Подаци су дати у табели 2.3. Оригинални облик табеле је дат као табела 2 у Zeger (1988). Узорак делимо на два дела. Први подузорак се састоји од првих 138 опсервација, док последњих 30 опсервација чине други подузорак. Тренутно ћемо посматрати само први подузорак. Неке од дескриптивних статистика настале из првог подузорка су: средња вредност узорка и стандардна девијација узорка, чије су вредности 1.420290 и 1.969889, редом, минимални и максимални број месечног броја новооболелих од полиомијелитиса са вредностима 0 и 14, док су медијана, први и трећи квартил 1, 0 и 2, редом. Графички приказ вредности првог подузорка дат је у првом делу слике 2.2. Из реализације подузорка можемо укратко закључити да се месечни случајеви заражених полиомијелитисом могу описати min-INAR(1) моделом. Периоди екстремних активности инфекције су око 1971., 1973. и 1979. године.

Табела 2.3: Месечни број новозаражених полиомијелитисом од 1970. до 1983.

	Јан.	Феб.	Мар.	Апр.	Мај	Јун	Јул	Авг.	Сеп.	Окт.	Нов.	Дец.
1970	0	1	0	0	1	3	9	2	3	5	3	5
1971	2	2	0	1	0	1	3	3	2	1	1	5
1972	0	3	1	0	1	4	0	0	1	6	14	1
1973	1	0	0	1	1	1	1	0	1	0	1	0
1974	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	0	2
1975	0	1	0	1	0	0	1	2	0	0	1	2
1976	0	3	1	1	0	2	0	4	0	2	1	1
1977	1	1	0	1	1	0	2	1	3	1	2	4
1978	0	0	0	1	0	1	0	2	2	4	2	3
1979	3	0	0	2	7	8	2	4	1	1	2	4
1980	0	1	1	1	3	0	0	0	0	1	0	1
1981	1	0	0	0	0	0	1	2	0	2	0	0
1982	0	1	0	1	0	1	0	2	0	0	1	2
1983	0	1	0	0	0	1	2	1	0	1	3	6

У другом и трећем делу слике 2.2 дате су аутокорелациона функција (ACF) и парцијална аутокорелациона функција (PACF). Вредност парцијалне аутокорелационе функције значајна је само у кораку 1, што нам омогућава да закључимо да је модел првог реда прикладан за посматрање првог подузорка. Узорачка аутокорелација реда 1 је 0.293, што указује на умерену позитивну линеарну



Слика 2.2: Графикони реализације, аутокорелационе и парцијалне аутокорелационе функције података о месечном броју новозаражених полиомијелитисом.

корелацију између опсервација.

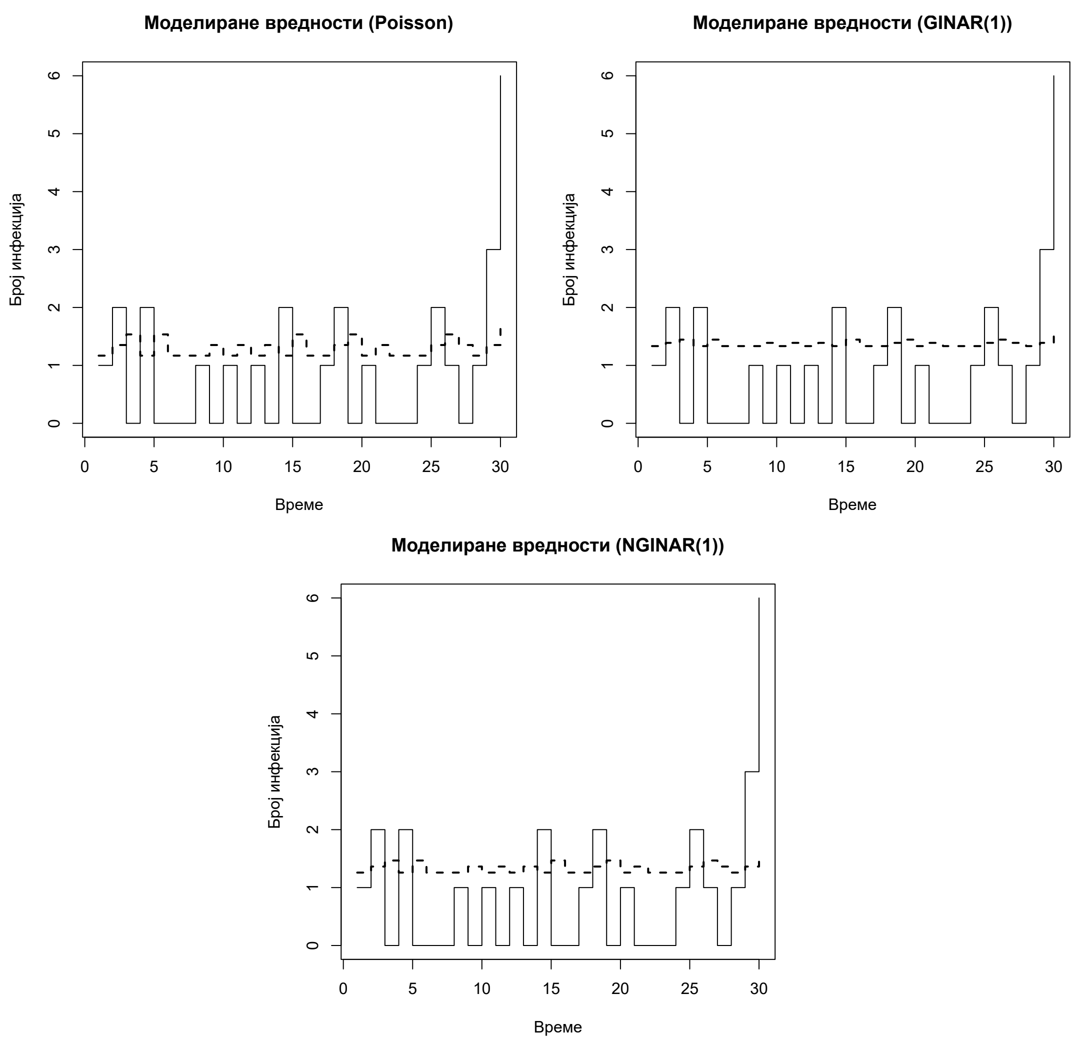
Као следећи корак проверавамо да ли је геометријска расподела одговарајућа маргинална расподела за први подузорак, јер је min-INAR(1) модел заснован под претпоставком да има геометријску маргиналну расподелу. Прво посматрамо оцене добијене методом условне максималне веродостојности за min-INAR(1) модел на основу првог подузорка. Њихове вредности су $\widehat{\mu} = 1,4135$, и $\widehat{\alpha} = 1,7743$. Изабрали смо да користимо CML метод за оцењивање непознатих параметара, јер је обим узорка мали за постизање прецизних оцена методом MM. За ове оцене имамо да је фитовано очекивање $1,4135$, фитована дисперзија $3,4115$, док фитована аутокорелација реда 1 има вредност $0,2676$.

Коришћењем Хи-квадрат теста за проверу адекватности расподеле може доћи до погрешног формирања категорија и губљења информација о подацима. Да бисмо избегли погрешне закључке, нећемо користити Хи-квадрат тест да бисмо проверили прикладност геометријске расподеле као маргиналне расподеле за полио податке, већ ћемо користити Колмогоров-Смирнов тест, који је уведен и детаљно објашњен у Best и Rayner (2003). Применом овог теста добијамо да је реализована вредност тест статистике 7,178694. Како су подаци о месечном броју новозаражених полиомијелитисом временски зависни, користићемо bootstrap метод за одређивање p вредности овог теста. Bootstrap метод за целобројне ауторегресивне моделе детаљно је објашњен у Ristić и Popović (2019). Прво, симулирамо 10000 узорака из геометријске расподеле обима 138, где за тачне вредности параметра μ и α овог модела узимамо оцене добијене методом условне максималне веродостојности, а то су $\widehat{\mu} = 1,4135$ и $\widehat{\alpha} = 1,7743$. За сваки од симулираних узорака одређујемо вредност Колмогоров-Смирнове тест статиситке и налазимо број вредности тест статистика које су веће од вредности добијене за вредност Колмогоров-Смирнове тест статистике на основу полио података. Дељењем овог броја са бројем симулираних узорака, одређујемо p-вредност. Како је p-вредност за овај тест 0,5192, то значи да прихватамо нулту хипотезу тј. да се полио подаци могу описати геометријском расподелом.

Сада ћемо min-INAR(1) модел упоредити са још неким моделима. Користићемо GINAR(1) модел и Poisson модел јер су они већ примењивани на полио податке у Maiti и Biswas (2015). Затим, како модели NGINAR(1) и геометријски минификациони модел кога је дефинисао Littlejohn (1992) имају геометријску маргиналну расподелу, упоредићемо и њих са min-INAR(1) моделом. Као критеријум за упоређивање ових пет модела користимо Акаиков информациони критеријум (AIC), Бајесов информациони критеријум (BIC) и средње квадратну грешку (RMS). Вредност за AIC рачунамо као $AIC = 2k - 2ln(L)$, док вредност за BIC добијамо из $BIC = kln(n) - 2ln(L)$. У управо наведеним формулама, k је број оцењених параметара, L је вредност функције веродостојности израчунате за оцењене параметре, док је n дужина низа. RMS представља квадратни корен суме квадрата одступања опсервираних и прогнозираних вредности серије, тј. RMS се може представити као $RMS = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=2}^{n}(X_i - E(X_i \mid X_{i-1}))^2}$, где је у овом случају $\{X_t\}$ низ полио. Прва два критеријума говоре колико је претпостављена расподела модела одговарајућа за посматране податке, док трећи критеријум процењује грешку предвиђања за један корак унапред. Последњи критеријум се користи за тестирање квалитета прогнозирања свих пет модела. AIC и BIC се рачунају на основу првог подузорка од 138 опсервација, док се RMS израчунава на основу другог подузорка кога чине последњих 30 опсервација. Вредности за AIC, BIC и RMS рачунамо уз помоћ претходно одређених оцена методом условне максималне веродостојности. Вредности оцена и критеријума дате су у табели 2.4. На основу ове табеле можемо приметити да су за min-INAR(1) модел добијене најмање вредности за сва три критеријума. Овим је показано да се min-INAR(1) модел најбоље уклапа међу разматране моделе. Трајекторије временског низа који представља месечни број новозаражених, као и моделиране вредности добијене за сваки од пет модела приказане су на сликама 2.3 и 2.4.

Када модел примењујемо на реалне податке, потребно је показати да је тај модел адекватан, о чему ћемо говорити у наставку. Да би показали адекватност модела, показаћемо да узорковане вредности неких статистика припадају одговарајућим bootstrap интервалима поверења. Посматраћемо следеће статистике: узорачку средину, узорачку стандардну девијацију, узорачку аутокорелациону функцију и стандардизоване Pearson-ове резидуале.

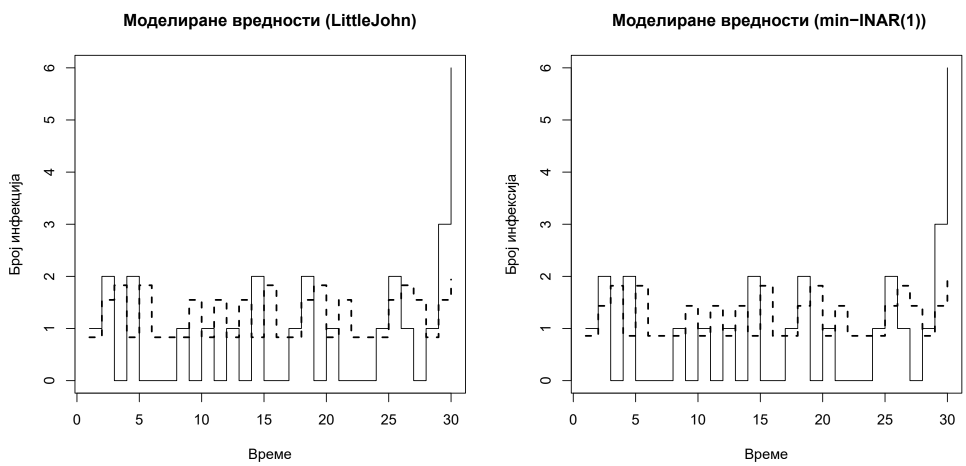
У ту сврху симулирамо 10000 узорака обима 138 на основу геометријског min-INAR(1) модела, где за стварне вредности параметара користимо оцене добијене методом условне максималне веродостојности.



Слика 2.3: Моделиране вредности за последњих 30 опсервација PoINAR(1), GINAR(1) и NGINAR(1) модела за месечни број инфекција полиомијелитисом.

Табела 2.4: CML оцене, *AIC*, *BIC* и *RMS* вредности за месечни број инфекција полиомијелитисом.

Модел	CML оцене	AIC	BIC	RMS
GINAR(1)	$\widehat{\alpha} = 0,0559$, $\widehat{\mu} = 1,4119$	$454,0945$	$459,9490$	$1,3268$
Poisson	$\widehat{\alpha} = 0,1834$, $\widehat{\lambda} = 1,1683$	$496,5606$	$502,4152$	$1,2857$
NGINAR(1)	$\widehat{\beta} = 0,1043$, $\widehat{\mu} = 1,4054$	$453,4588$	$459,3133$	$1,3062$
Littlejohn	$\widehat{p} = 0,2786$, $\widehat{\rho} = 0,8822$	$445,4834$	$451,3379$	$1,3126$
min-INAR(1)	$\widehat{\alpha} = 1,7743$, $\widehat{\mu} = 1,4135$	$443,1317$	$448,9863$	$1,2839$



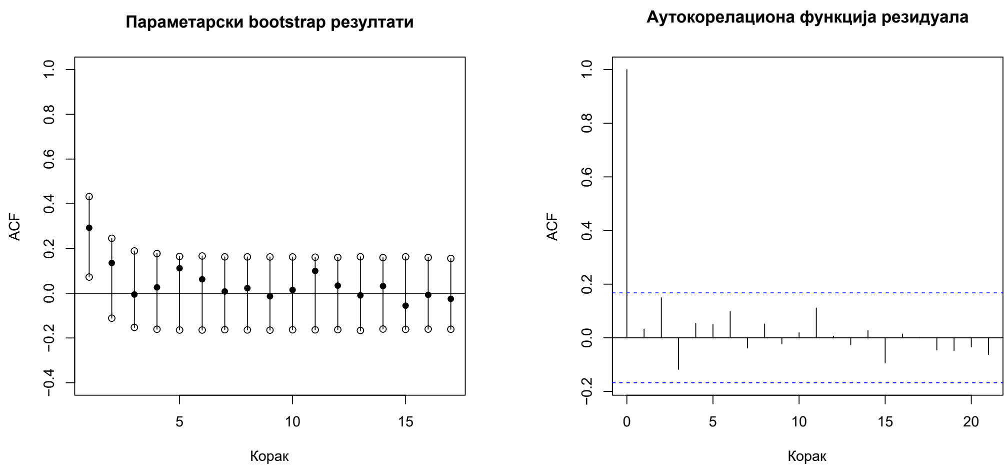
Слика 2.4: Моделиране вредности за последњих 30 опсервација LittleJohn и min-INAR модела за месечни број инфекција полиомијелитисом.

За сваки од симулираних узорака рачунамо средњу вредност узорка и стандардну девијацију узорка и на основу њих, на одговарајући начин одређујемо $2,5\%$ и $97,5\%$ квантиле. Дакле 95% интервали поверења за средњу вредност узорка и стандардну девијацију узорка су (1,0435; 1,8406) и (1,3754; 2,3601), редом. Можемо приметити да bootstrap интервал поверења за узорачку средину садржи узорачку средину, која је вредности 1,420290, док интервал поверења за узорачку стандардну девијацију садржи узорачку стандардну девијацију месечног броја инфекције полиомијелитиса, чија је вредност 1,969889. У наредном кораку, посматра се аутокорелација за сваки од већ разматраних узорака, као и аутокорелациона функцију за сваки ред. Након тога, одређују се $2,5\%$ и $97,5\%$ квантили и одређује се bootstrap интервал поверења за редове од 1 до 18. Bootstrap интервали поверења и узорачке аутокорелације за месечни број инфекција полиомијелитисом приказани су на левом делу слике 2.5. На основу претходног, можемо закључити да су све посматране вредности покривене одговарајућим bootstrap интервалима поверења и да је корелациона структура месечног броја инфекција полиомијелитисом адекватно описана min-INAR(1) моделом.

Као последњи корак за проверу адекватности геометријског min-INAR(1) модела разматрамо стандардизоване Pearson-ове резидуале. Стандардизовани Pearson-ови резидуали, који су за овај модел дефинисани за $t \in \{2, \ldots, 138\}$, су облика

$$e_t = \frac{x_t - E(X_t \mid x_{t-1})}{\sqrt{D(X_t \mid x_{t-1})}},$$

где су условно очекивање и условна дисперзија претходно одређени у (2.3.8) и (2.3.20). Ако покажемо да су резидуали некорелисани и да су узорачка средина и узорачка дисперзија резидуала близу 0 и 1, редом, можемо закључити да је геометријски min-INAR(1) модел адекватан модел за овај скуп података. Са десног дела слике 2.5, можемо приметити да су резидуали некорелисани. Средња вредност резидуала и дисперзија резидуала, за овај скуп података, су -0.007612524 и 0.874093989, редом. Средња вредност је близу нуле, док је дисперзија близу јединице. Дакле можемо закључити да је геометријски min-INAR(1) модел адекватан модел за месечни број инфекција полиомијелитисом.



Слика 2.5: Аутокорелациона функција са 95% bootstrap интервалима поверења за месечни број инфекција полиомијелитисом и аутокорелациона функција резидуала за месечни број инфекција полиомијелитисом.

Глава 3

EM алгоритам за оцењивање непознатих параметара min-INAR(1) модела

Један од најчешћих проблема који се јавља приликом оцењивања параметара методом максималне веродостојности у INAR(1) моделима, укључујући и минификационе моделе, јесте то што се оцене не могу одредити аналитички, већ се за њихово налажење мора користити неки нумерички метод. У овој глави представићемо EM алгоритам за min-INAR(1) модел дефинисан у другој глави и тиме решити наведени проблем.

EM алгоритам за INAR моделе први су конструисали Karlis и Xekalaki (2001). Они су посматрали једноставне INAR(1) моделе са Пуасоновом маргиналном расподелом и показали да се коришћењем EM алгоритма, оцене непознатих параметара могу представити у аналитичком облику. Пре њих, до оцена добијених методом максималне веродостојности долазило се искључиво неким нумеричким методима. Неколико година касније, Brijs, Karlis и Wets (2007) су применили EM алгоритам на INAR Пуасонов регресиони модел. Следеће године, исти аутори су користили EM алгоритам за целобројне ауторегресивне моделе приликом моделирање бројачких података са временском међузависношћу. EM алгоритам су такође користили и Khoo, Ong и Biswas (2017) за оцењивање параметара у INAR моделу, који је за разлику од претходних модела мешавина INAR модела. Стога је у овим радовима показано да се ЕМ алгоритам може успешно применити на INAR моделе. Међутим, посматрани модели су једноставни, што значи да за већину INAR модела одговарајући ЕМ алгоритам није конструисан због сложености самог алгоритма.

Наиме, ЕМ алгоритам, како га уводе Dempster, Laird и Rubin (1977), састоји се од два корака. Најпре се уводе латентне променљиве помоћу којих се одређује логаритамска функција веродостојности посматраног узорка. У првом кораку, такозваном Е кораку, кораку очекивања (Expectation), ова функција се користи за одређивање условних очекивања, чије се почетне вредности одређују у сваком кораку итерације. У другом кораку, такозваном М кораку, кораку максимизације (Maximization), почетне вредности се користе за оцењивање непознатих параметара добијених максимизирањем логаритамске функције веродостојности комплетног узорка, конструисаног у кораку Е.

Код INAR модела, први проблем је како одредити латентне променљиве тако да се оцене непознатих параметара добију у аналитичком облику. Како је овај проблем тешко решити на основу оригиналне дефиниције min-INAR(1) модела, у првом поглављу ћемо представити еквивалентну репрезентацију овог модела, која ће нам омогућити да изаберемо латентне променљиве помоћу којих долазимо до оцена у аналитичком облику. Својства која се користе за показивање еквивалинције модела и за оцену непознатих параметара, такође су дата у овом поглављу. У поглављу 3.2 представићемо оцене непознатих параметара min-INAR(1) модела, базираних на ЕМ алгоритму. Глава се завршава Монте-Карло симулацијама, које показују својства добијених оцена.

3.1 Еквивалентна репрезентација модела min-INAR(1)

У овом поглављу показаћемо да се min-INAR(1) модел, дефинисан у другој глави, може представити у еквивалентном облику који је погодан за конструкцију EM алгоритма. Подсетимо се прво дефиниције min-INAR(1) модела. За временски низ $\{X_t,\, t \in \mathbb{Z}\}$ кажемо да је геометријски минификациони INAR(1) модел ако задовољава једначину

$$X_t = \min(\alpha \diamond X_{t-1}, \varepsilon_t), \qquad t \in \mathbb{Z}, \tag{3.1.1}$$

где случајне променљиве X_t и ε_t имају геометријску расподелу са параметрима $\frac{\mu}{1+\mu}$ и $\frac{\mu[1+\alpha(1+\mu)]}{\alpha(1+\mu)^2}$, редом. Модел је дефинисан за $\mu > 0$ и $\alpha > \frac{\mu}{1+\mu}$. Оператор који се јавља у дефиницији модела је модификовани негативни биномни оператор, дефинисан у (1.2.1). Напоменимо да под геометријском расподелом са параметром θ подразумевамо расподелу дату законом расподеле вероватноће

$$P(X = i) = (1-\theta)\theta^i, \quad i = 0, 1, ...$$

Записаћемо ову расподелу као $Geom(\theta)$. Како је са овим моделом тешко изабрати латентне променљиве које ће довести до оцена у аналитичком облику, показаћемо да се модел може представити у еквивалентном облику погодном за решавање овог проблема.

Показаћемо да се једначина (3.1.1) може представити у облику

$$X_t = \nu \diamond \min(X_{t-1}, \eta_t), \quad t \in \mathbb{Z}, \tag{3.1.2}$$

где су параметар ν и случајна променљива η_t такви да случајне променљиве $\min(\alpha \diamond X_{t-1}, \varepsilon_t)$ и $\nu \diamond \min(X_{t-1}, \eta_t)$ имају геометријску $Geom(\frac{\mu}{1+\mu})$ расподелу и да су њихове условне расподеле $\min(\alpha \diamond X_{t-1}, \varepsilon_t) \mid X_{t-1}$ и $\nu \diamond \min(X_{t-1}, \eta_t) \mid X_{t-1}$ једнаке.

Да бисмо олакшали одређивање расподеле случајне променљиве η_t, уводимо случајну променљиву $Y_t = \min\{X_{t-1}, \eta_t\}$, тако да је $X_t = \nu \diamond Y_t$, за свако $t \in \mathbb{Z}$. Расподела случајне променљиве Y_t је дата следећом лемом.

Лема 3.1.1 *Нека је* $\{X_t, t \in \mathbb{Z}\}$ *минификациони модел дефинисан у* (3.1.2) *са геометријском маргиналном расподелом* $Geom(\frac{\mu}{1+\mu})$, $\mu > 0$. *Тада случајна променљива* Y_t *дефинисана као*

$$Y_t = \min\{X_{t-1}, \eta_t\}$$

има геометријску расподелу $Geom\left(\frac{\delta}{1+\delta}\right)$, *где је* $\delta = \frac{\mu-\nu}{\nu}$, *ако и само ако је* $\mu > \nu$.

Доказ. Нека је $\{X_t, t \in \mathbb{Z}\}$ минификациони модел дефинисан у (3.1.2) са геометријском маргиналном расподелом $Geom\big(\frac{\mu}{1+\mu}\big)$. Из дефиниције модела $\{X_t, t \in \mathbb{Z}\}$ имамо да функција генератрисе вероватноће случајне променљиве X_t задовољава једнакост

$$E(s^{X_t}) = E(s^{\nu \diamond Y_t}).$$

Како је "$\diamond$" модификовани негативни биномни опетатор, имамо да је

$$E(s^{\nu\diamond Y_t}) = E(E(s^{\nu\diamond Y_t} \mid Y_t)) = E(E(s^{\sum_{i=1}^{Y_t+1} G_i} \mid Y_t)),$$

где су случајне променљиве G_i, $i \geq 1$, међусобно независне са расподелом $Geom\left(\frac{\nu}{1+\nu}\right)$, те је

$$E(s^{\nu\diamond Y_t}) = E\Big((E(s^{G_1}))^{Y_t+1}\Big) = \frac{1}{1+\nu-\nu s}\Phi_{Y_t}\Big(\frac{1}{1+\nu-\nu s}\Big).$$

На основу једнакости $E(s^{X_t}) = (1+\mu-\mu s)^{-1}$ имамо да је

$$\Phi_{Y_t}\left(\frac{1}{1+\nu-\nu s}\right) = \frac{1+\nu-\nu s}{1+\mu-\mu s}, \qquad \mid s \mid < \frac{\mu}{\mu-\nu}. \tag{3.1.3}$$

Затим, како једначину (3.1.3) можемо написати у облику

$$\Phi_{Y_t}\left(\frac{1}{1+\nu-\nu s}\right) = \frac{1}{1+\delta-\delta\frac{1}{1+\nu-\nu s}}, \qquad \mid s \mid < \frac{\mu}{\mu-\nu},$$

где је $\delta = \frac{\mu-\nu}{\nu}$, можемо закључити да случајна променљива Y_t има геометријску расподелу $Geom(\frac{\delta}{1+\delta})$. Ова расподела је добро дефинисана ако и само ако је $\mu > \nu$, чиме је доказана лема. □

Модел, дефинисан у (3.1.2), је у потпуности одређен уколико је одређена расподела иновационог низа $\{\eta_t, t \in \mathbb{Z}\}$. Следеће тврђење нам даје облик расподеле иновационог низа.

Тврђење 3.1.1 *Нека је* $\{X_t, t \in \mathbb{Z}\}$ *минификациони модел дефинисан у* (3.1.2) *са геометријском маргиналном расподелом* $Geom\left(\frac{\mu}{1+\mu}\right)$, $\mu > 0$. *Тада случајна променљива* η_t *има геометријску* $Geom\left(\frac{(\mu-\nu)(1+\mu)}{\mu^2}\right)$ *расподелу ако и само ако је* $\nu \in \left(\frac{\mu}{1+\mu}, \mu\right)$.

Доказ. Нека је $\{X_t, t \in \mathbb{Z}\}$ минификациони модел дефинисан у (3.1.2) са геометријском маргиналном расподелом $Geom\left(\frac{\mu}{1+\mu}\right)$, $\mu > 0$ и нека је x произвољан ненегативан цео број. Због међусобне независности случајних променљивих X_{t-1} и η_t имамо да је

$$P(Y_t \geq x) = P(\min\{X_{t-1}, \eta_t\} \geq x) = P(X_{t-1} \geq x)P(\eta_t \geq x). \tag{3.1.4}$$

Како су случајне променљиве X_{t-1} и Y_t геометријски расподељене, имамо да је

$$P(X_{t-1} \geqslant x) = \left(\frac{\mu}{1+\mu}\right)^x$$

и

$$P(Y_t \geqslant x) = \left(\frac{\delta}{1+\delta}\right)^x,$$

за $\delta = \frac{\mu-\nu}{\nu}$. Примењујући ове резултате на (3.1.4), добијамо да је

$$P(\eta_t \geq x) = \frac{P(Y_t \geq x)}{P(X_{t-1} \geq x)} = \left(\frac{(\mu-\nu)(1+\mu)}{\mu^2}\right)^x. \tag{3.1.5}$$

Сада, имамо да је вероватноћа у (3.1.5) добро дефинисана ако и само ако је задовољен усвов да је $P(\eta_t \geq x) \in [0, 1]$, који је испуњен ако и само ако је $\mu > \nu > \frac{\mu}{1+\mu}$. Према томе, можемо закључити да случајна променљива η_t има геометријску расподелу $Geom\left(\frac{(\mu-\nu)(1+\mu)}{\mu^2}\right)$ ако и само ако је $\nu \in \left(\frac{\mu}{1+\mu}, \mu\right)$. $\square$

Сада ћемо посматрати нека својства еквивалентне репрезентације модела која ће нам касније бити од користи. Да бисмо приказали нека својства на једноставнији начин, прво показујемо да се случајна променљива $X_t \mid \{X_{t-1} = y\}$, где је y произвољан ненегативан цео број, може представити као мешавина негативно биномно расподељених случајних променљивих. Из тог разлога наводимо следеће тврђење.

Тврђење 3.1.2 *Нека је* $\{X_t, t \in \mathbb{Z}\}$ *минификациони модел дефинисан у* (3.1.2) *са геометријском маргиналном расподелом* $Geom\left(\frac{\mu}{1+\mu}\right)$, $\mu > 0$. *Тада случајна променљива* $X_t \mid \{X_{t-1} = y\}$, *где је* y *произвољан ненегативан цео број, може бити представљена као мешавина негативно биномно расподељених случајних променљивих* $\{\mathcal{W}_i\}_{i\geq 1}$ *са* $\mathcal{NB}\left(i, \frac{\nu}{1+\nu}\right)$, *односно*

$$X_t \mid \{X_{t-1} = y\} \stackrel{d}{=} \sum_{i=0}^{y-1} \mathcal{W}_{i+1} I(Q_y = i) + \mathcal{W}_{y+1} I(Q_y = y), \tag{3.1.6}$$

где је Q_y *дискретна случајна променљива са законом функције расподеле*

$$Q_y : \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & y-1 & y \\ 1-\theta & \theta(1-\theta) & \cdots & \theta^{y-1}(1-\theta) & \theta^y \end{pmatrix}, \quad y \geq 1,$$

и

$$Q_0 \equiv 0.$$

Доказ. Нека је $\{X_t, t \in \mathbb{Z}\}$ минификациони модел дефинисан у (3.1.2) са геометријском маргиналном расподелом $Geom\left(\frac{\mu}{1+\mu}\right)$, $\mu > 0$. Прво ћемо одредити условну функцију генератрисе вероватноће $E(s^{X_t} \mid X_{t-1} = y)$ за произвољан ненегативан цео број y. Користећи репрезентацију (3.1.2) имамо да је

$$\begin{aligned} E(s^{X_t} \mid X_{t-1} = y) &= E(s^{\nu \diamond \min\{X_{t-1}, \eta_t\}} \mid X_{t-1} = y) \\ &= E(s^{\nu \diamond \min\{y, \eta_t\}}) \\ &= \sum_{z=0}^{y} E(s^{\nu \diamond z}) \theta^z (1-\theta) + \sum_{z=y+1}^{\infty} E(s^{\nu \diamond y}) \theta^z (1-\theta), \end{aligned} \tag{3.1.7}$$

где је $\theta = \frac{(\mu-\nu)(1+\mu)}{\mu^2}$.

Са $\mathcal{NB}(x, \frac{\nu}{1+\nu})$ означимо случајну променљиву која има негативну биномну расподелу са параметрима x и $\frac{\nu}{1+\nu}$, тј. случајну променљиву која има закон расподеле вероватноће

$$P\left(\mathcal{NB}\left(x, \frac{\nu}{1+\nu}\right) = i\right) = \binom{x+i}{i} \left(\frac{\nu}{1+\nu}\right)^i \left(\frac{1}{1+\nu}\right)^x.$$

У поглављу 2.1 показали смо да ако случајна променљива X има геометријску расподелу $Geom\left(\frac{\alpha}{1+\alpha}\right)$, $\alpha > 0$, тада случајна променљива $\alpha \diamond X$, за дато X, има негативну биномну расподелу $\mathcal{NB}(X+1, \frac{\alpha}{1+\alpha})$. На основу ове чињенице можемо закључити да $\nu \diamond z$ и $\nu \diamond y$ имају негативне биномне расподеле $\mathcal{NB}\left(z+1, \frac{\nu}{1+\nu}\right)$ и $\mathcal{NB}\left(y+1, \frac{\nu}{1+\nu}\right)$, редом. Сада се условна функција генератрисе вероватноће из (3.1.7) може представити као

$$\begin{aligned} E(s^{X_t} \mid X_{t-1} = y) &= \sum_{z=0}^{y} E(s^{\mathcal{NB}\left(z+1, \frac{\nu}{1+\nu}\right)})\theta^z(1-\theta) \\ &+ \sum_{z=y+1}^{\infty} E(s^{\mathcal{NB}\left(y+1, \frac{\nu}{1+\nu}\right)})\theta^z(1-\theta) \\ &= \sum_{z=0}^{y} E(s^{\mathcal{NB}\left(z+1, \frac{\nu}{1+\nu}\right)})\theta^z(1-\theta) \\ &+ E(s^{\mathcal{NB}\left(y+1, \frac{\nu}{1+\nu}\right)})\theta^{y+1}. \end{aligned} \tag{3.1.8}$$

Из (3.1.8), закључујемо да се случајна променљива $X_t \mid \{X_{t-1} = y\}$ може представити као мешавина негативно биномно расподељених случајних променљивих, тачније ако са $\{\mathcal{W}_i\}_{i\geq 1}$ означимо низ са $\mathcal{NB}\left(i, \frac{\nu}{1+\nu}\right)$ расподелом, тада важи

$$X_t \mid \{X_{t-1} = y\} = \begin{cases} W_1, & \text{с.в.} \quad (1-\theta), \\ W_2, & \text{с.в.} \quad \theta(1-\theta), \\ & \cdot \\ & \cdot \\ & \cdot \\ W_y, & \text{с.в.} \quad \theta^{y-1}(1-\theta), \\ W_{y+1}, & \text{с.в.} \quad \theta^y. \end{cases}$$

Ако сада уведемо случајне променљиве

$$Q_y : \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & y-1 & y \\ 1-\theta & \theta(1-\theta) & \cdots & \theta^{y-1}(1-\theta) & \theta^y \end{pmatrix}, \quad y \geq 1 \tag{3.1.9}$$

и

$$Q_0 \equiv 0,$$

тада имамо да је

$$X_t \mid \{X_{t-1} = y\} = \sum_{i=0}^{y-1} \mathcal{W}_{i+1} I(Q_y = i) + \mathcal{W}_{y+1} I(Q_y = y),$$

чиме је тврђење доказано. □

На основу претходног тврђења можемо на једноставан начин одредити вероватноћу прелаза и условно очекивање случајне променљиве X_t за познато X_{t-1}. Ова својства су дата следећим тврђењима. Почећемо од вероватноће прелаза, коју користимо за оцењивање непознатих параметара методом условне максималне веродостојности.

Тврђење 3.1.3 *Нека је $\{X_t, t \in \mathbb{Z}\}$ минификациони модел дефинисан у* (3.1.2) *са геометријском маргиналном расподлеом Geom* $\left(\frac{\mu}{1+\mu}\right)$, $\mu > 0$. *Вероватноће прелаза за модел $\{X_t, t \in \mathbb{Z}\}$ је*

$$\begin{aligned} P(X_t = x \mid X_{t-1} = y) &= \sum_{i=0}^{y-1} \theta^i (1-\theta) \binom{i+x}{x} \left(\frac{1}{1+\nu}\right)^{i+1} \left(\frac{\nu}{1+\nu}\right)^x \\ &+ \theta^y \binom{y+x}{x} \left(\frac{1}{1+\nu}\right)^{y+1} \left(\frac{\nu}{1+\nu}\right)^x, x, y \in \mathbf{N_0}, \end{aligned} \tag{3.1.10}$$

где је $\theta = \frac{(\mu-\nu)(1+\mu)}{\mu^2}$.

Доказ. Нека су x и y произвољни ненегативни цели бројеви. На основу једнакости (3.1.6) имамо да је

$$\begin{aligned} P(X_t = x \mid X_{t-1} = y) = \sum_{i=0}^{y-1} P(\mathcal{W}_{i+1} = x) P(Q_y = i) \\ + P(\mathcal{W}_{y+1} = x) P(Q_y = y), \end{aligned}$$

одакле једноставно следи (3.1.10). □

Сада ћемо навести условно очекивање $E(X_t \mid X_{t-1})$, које ће нам бити потребно приликом показивања еквивалентности модела.

Тврђење 3.1.4 *Нека је* $\{X_t, t \in \mathbb{Z}\}$ *минификациони модел дефинисан у* (3.1.2) *са геометријском маргиналном расподелом* $Geom\left(\frac{\mu}{1+\mu}\right)$, $\mu > 0$. *Условно очекивање случајне променљиве* X_t *за дато* X_{t-1} *је*

$$E(X_t \mid X_{t-1}) = \frac{\nu}{1-\theta}(1-\theta^{X_{t-1}+1}), \tag{3.1.11}$$

где је $\theta = \frac{(\mu-\nu)(1+\mu)}{\mu^2}$.

Доказ. Нека је y произвољан ненегативан цео број и нека је $\theta = \frac{(\mu-\nu)(1+\mu)}{\mu^2}$. Тада, условно очекивање случајне променљиве X_t за дато $X_{t-1} = y$ је

$$\begin{aligned} E(X_t \mid X_{t-1} = y) &= \sum_{i=0}^{y-1} E(\mathcal{W}_{i+1})P(Q_y = i) + E(\mathcal{W}_{y+1})P(Q_y = y) \\ &= \nu(1-\theta)\sum_{i=0}^{y-1}(i+1)\theta^i + \nu(y+1)\theta^y \\ &= \nu(1-\theta)\frac{1-\theta^y-\theta^y y+\theta^{y+1}y}{(1-\theta)^2} + \nu(y+1)\theta^y \\ &= \frac{\nu}{1-\theta}(1-\theta^{y+1}), \end{aligned}$$

чиме је тврђење доказано. $\square$

Сада дајемо израз за условну функцију генератрисе вероватноће случајне променљиве X_t за дато X_{t-1}.

Тврђење 3.1.5 *Нека је* $\{X_t, t \in \mathbb{Z}\}$ *минификациони модел дефинисан у* (3.1.2) *са геометријском маргиналном расподелом* $Geom\left(\frac{\mu}{1+\mu}\right)$, $\mu > 0$. *Условна функција генератрисе вероватноће случајне променљиве* X_t *за дато* X_{t-1} *је*

$$\begin{aligned} E(s^{X_t} \mid X_{t-1} = y) &= \frac{\nu+\nu\mu-\mu}{\nu+\nu\mu-\mu+\nu\mu^2-\nu\mu^2 s} \\ &+ \frac{\nu\mu^2-\nu\mu^2 s}{\nu+\nu\mu-\mu+\nu\mu^2-\nu\mu^2 s}\left(\frac{(\mu-\nu)(1+\mu)}{\mu^2(1+\nu-\nu s)}\right)^{y+1}. \end{aligned}$$

Доказ. Нека је y произвољан ненегативан цео број. Тада је

$$E(s^{X_t} \mid X_{t-1} = y) = \sum_{x=0}^{\infty} s^x P(X_t = x \mid X_{t-1} = y).$$

На основу (3.1.10), следи да је

$$\begin{aligned} E(s^{X_t} \mid X_{t-1} = y) &= \sum_{x=0}^{\infty} s^x \sum_{i=0}^{y-1} \theta^i (1-\theta) \binom{i+x}{x} \left(\frac{1}{1+\nu}\right)^{i+1} \left(\frac{\nu}{1+\nu}\right)^x \\ &+ \sum_{x=0}^{\infty} s^x \theta^y \binom{y+x}{x} \left(\frac{1}{1+\nu}\right)^{y+1} \left(\frac{\nu}{1+\nu}\right)^x \\ &= \frac{1-\theta}{1+\nu-\nu s-\theta} \left(1 - \left(\frac{\theta}{1+\nu-\nu s}\right)^y\right) \\ &+ \frac{\theta^y}{(1+\nu-\nu s)^{y+1}}, \end{aligned}$$

за $\theta = \frac{(\mu-\nu)(1+\mu)}{\mu^2}$. Условна функција генератрисе вероватноће је дакле једнака

$$\begin{aligned} E(s^{X_t} \mid X_{t-1} = y) &= \frac{\nu+\nu\mu-\mu}{\nu+\nu\mu-\mu+\nu\mu^2-\nu\mu^2 s} \\ &+ \frac{\nu\mu^2-\nu\mu^2 s}{\nu+\nu\mu-\mu+\nu\mu^2-\nu\mu^2 s} \left(\frac{(\mu-\nu)(1+\mu)}{\mu^2(1+\nu-\nu s)}\right)^{y+1} \end{aligned}$$

чиме је тврђење показано. □

Коначно, користећи претходно својство, можемо показати да су ове две репрезентације идентичне. Прво примећујемо да ако су ове две репрезентације једнаке, онда су и њихова условна очекивања једнака. Претпоставимо да су репрезентације једнаке и испитајмо да ли постоји јединствени ν за такав случај. Изједначавањем условних очекивања, добијамо

$$E(\min(\alpha \diamond X_{t-1}, \varepsilon_t) \mid X_{t-1})) = E(\nu \diamond \min(X_{t-1}, \eta_t) \mid X_{t-1}), \qquad (3.1.12)$$

односно

$$\frac{\theta}{1-\theta}\Big[1 - \Big(\frac{1}{1+\alpha-\alpha\theta}\Big)^{1+X_{t-1}}\Big] = \frac{\nu}{1-\theta_1}\Big(1 - \theta_1^{X_{t-1}+1}\Big),$$

за $\theta = \frac{\mu[1+\alpha(1+\mu)]}{\alpha(1+\mu)^2}$ и $\theta_1 = \frac{(\mu-\nu)(1+\mu)}{\mu^2}$. На основу (3.1.12), можемо добити две једначине

$$\frac{\theta}{1-\theta} = \frac{\nu}{1-\theta_1} \qquad \text{и} \qquad 1 - \left(\frac{1}{1+\alpha-\alpha\theta}\right)^{1+X_{t-1}} = 1 - \theta_1^{X_{t-1}+1},$$

које имају исто решење

$$\nu = \frac{\mu(1+\alpha+\alpha\mu)}{1+\mu+\mu^2+\alpha+\alpha\mu}. \tag{3.1.13}$$

Како смо пронашли параметар ν који задовољава (3.1.12), можемо извести функцију условне вероватноће случајне променљиве X_t за дато X_{t-1} за репрезентацију (3.1.2). Као резултат добијамо

$$\begin{aligned} E(s^{\nu\diamond\min(X_{t-1},\nu_t)} \mid X_{t-1}) &= \frac{\nu+\nu\mu-\mu}{\nu+\nu\mu-\mu+\nu\mu^2-\nu\mu^2 s} \\ &+ \frac{\nu\mu^2-\nu\mu^2 s}{\nu+\nu\mu-\mu+\nu\mu^2-\nu\mu^2 s} \\ &\times \left(\frac{(\mu-\nu)(1+\mu)}{\mu^2(1+\nu-\nu s)}\right)^{X_{t-1}+1} \\ &= \frac{\alpha+\alpha\mu-\mu}{\alpha+2\alpha\mu+\alpha\mu^2-\mu s(1+\alpha+\alpha\mu)} \\ &+ \frac{\mu(1+\alpha+\alpha\mu)(1-s)}{\alpha+2\mu\alpha+\mu^2\alpha-\mu s(1+\alpha-\alpha\mu)} \\ &\times \left(\frac{(1+\mu)^2}{(1+\mu)^2(1+\alpha)-\mu(1+\alpha-\alpha\mu)s}\right)^{1+X_{t-1}}. \end{aligned} \tag{3.1.14}$$

Сређивањем претходног израза, долазимо до тога да је

$$E(s^{X_t} \mid X_{t-1}) = \frac{1-\theta}{1-\theta s} + \frac{\theta(1-s)}{1-\theta s}\left(\frac{1}{1+\alpha-\alpha\theta s}\right)^{1+X_{t-1}},$$

што је условна функција генератрисе вероватноће, дата у (2.1.3). Према томе, показали смо еквивалентност ове две репрезентације.□

Ово поглавље завршићемо одређивањем условне дисперзије модела (3.1.2). Прво ћемо одредити условни момент другог реда, а затим, користећи условни момент другог реда и условно очекивање одредићемо условну дисперзију.

Лема 3.1.2 *Нека је* $\{X_t, t \in \mathbb{Z}\}$ *минификациони модел дефинисан у* (3.1.2) *са геометријском маргиналном расподелом* $Geom\left(\frac{\mu}{1+\mu}\right)$, $\mu > 0$. *Условни момент другог реда случајне променљиве* X_t *за дато* X_{t-1} *је*

$$\begin{aligned} E({X_t}^2 \mid X_{t-1} = y) = &\frac{\nu}{1-\theta}(1-\theta^{y+1}) \\ &+ \frac{2\nu^2}{(1-\theta)^2}[1-(2+y)\theta^{y+1}+(1+y)\theta^{y+2}], \end{aligned} \tag{3.1.15}$$

за $\theta = \frac{(\mu-\nu)(1+\mu)}{\mu^2}$.

Доказ. Нека је y произвољан ненегативан цео број и нека је $\theta = \frac{(\mu-\nu)(1+\mu)}{\mu^2}$. Тада, условни момент другог реда случајне променљиве X_t за дато $X_{t-1} = y$ је

$$E({X_t}^2 \mid X_{t-1} = y) = \sum_{i=0}^{y-1} E(\mathcal{W}_{i+1}^2)P(Q_y = i) + E(\mathcal{W}_{y+1}^2)P(Q_y = y). \tag{3.1.16}$$

Сада, користећи чињеницу да случајна променљива $\mathcal{W}_{i+1}$ има негативну биномну расподелу са параметрима $i+1$ и $\frac{\nu}{1+\nu}$, као и да је момент другог реда $E(\mathcal{W}_{i+1}^2) = \nu(i+1)[(1+\nu)+\nu(i+1)]$, добијамо да је условни момент другог реда случајне променљиве X_t облика

$$\begin{aligned} E({X_t}^2 \mid X_{t-1} = y) = &\sum_{i=0}^{y-1} \nu(i+1)[(1+\nu)+\nu(i+1)]\theta^i(1-\theta) \\ &+ \nu(y+1)[(1+\nu)+\nu(y+1)]\theta^y \\ &= \nu(1-\theta)\sum_{i=0}^{y-1}(i+1)\theta^i + \nu^2(1-\theta)\sum_{i=0}^{y-1}(i+1)(i+2)\theta^i \\ &+ \nu(y+1)[1+\nu(y+2)]\theta^y. \end{aligned} \tag{3.1.17}$$

Даље следи

$$
\begin{aligned}
E({X_t}^2 \mid X_{t-1} = y) = {} & \nu \frac{1-\theta^y - \theta^y y + \theta^{y+1} y}{1-\theta} \\
& - \frac{\nu^2}{(1-\theta)^2}[-2 + \theta^y(2 + (\theta-1)y(-3+\theta+(\theta-1)y))] \\
& + \nu(y+1)[1+\nu(y+2)]\theta^y \\
= {} & \frac{\nu}{1-\theta}(1-\theta^{y+1}) \\
& + \frac{2\nu^2}{(1-\theta)^2}[1-(2+y)\theta^{y+1} + (1+y)\theta^{y+2}],
\end{aligned}
\tag{3.1.18}
$$

чиме је лема показана. □

Следећим тврђењем дајемо облик условне дисперзије случајне променљиве X_t за дато X_{t-1}.

Тврђење 3.1.6 *Нека је $\{X_t, t \in \mathbb{Z}\}$ минификациони модел дефинисан у* (3.1.2) *са геометријском маргиналном расподелом Geom* $\left(\frac{\mu}{1+\mu}\right)$, $\mu > 0$. *Условна дисперзија случајне променљиве X_t за дато X_{t-1} је*

$$
\begin{aligned}
D(X_t \mid X_{t-1}) = {} & \frac{\nu}{1-\theta}(1-\theta^{X_{t-1}+1}) \\
& + \frac{\nu^2}{(1-\theta)^2}(1-\theta^{2X_{t-1}+2} - 2\theta^{X_{t-1}+1}(1-\theta)(1+X_{t-1}),
\end{aligned}
\tag{3.1.19}
$$

за $\theta = \frac{(\mu-\nu)(1+\mu)}{\mu^2}$.

Доказ. На основу тврђења 3.1.4 и леме 3.1.2 имамо да је условна дисперзија случајне промењливе X_t за дато X_{t-1}

$$\begin{aligned} D(X_t \mid X_{t-1}) &= E({X_t}^2 \mid X_{t-1}) - [E(X_t \mid X_{t-1})]^2 \\ &= \frac{\nu}{1-\theta}(1-\theta^{X_{t-1}+1}) \\ &+ \frac{2\nu^2}{(1-\theta)^2}[1-(2+X_{t-1})\theta^{X_{t-1}+1} + (1+X_{t-1})\theta^{X_{t-1}+2}] \\ &- \left[\frac{\nu}{1-\theta}(1-\theta^{X_{t-1}+1})\right]^2, \end{aligned} \tag{3.1.20}$$

одакле имамо да је

$$\begin{aligned} D(X_t \mid X_{t-1}) &= \frac{\nu}{1-\theta}(1-\theta^{X_{t-1}+1}) \\ &+ \frac{\nu^2}{(1-\theta)^2}[1-2\theta^{X_{t-1}+1} - 2X_{t-1}\theta^{X_{t-1}+1} + 2\theta^{X_{t-1}+2} \\ &+ 2\theta^{X_{t-1}+2}X_{t-1} - \theta^{2X_{t-1}+2}] \\ &= \frac{\nu}{1-\theta}(1-\theta^{X_{t-1}+1}) \\ &+ \frac{\nu^2}{(1-\theta)^2}(1-\theta^{2X_{t-1}+2} - 2\theta^{X_{t-1}+1}(1-\theta)(1+X_{t-1}), \end{aligned} \tag{3.1.21}$$

што је и требало показати. □

3.2 Конструкција ЕМ алгоритма

Функција условне логаритамске веродостојности $\min - \mathrm{INAR}(1)$ модела је компликована и захтева неки нумерички метод за њено максимизирање. Да бисмо избегли нумеричко решавање, у овом поглављу конструисаћемо ЕМ алгоритам који ће нам омогућити да одредимо аналитичке облике оцена непознатих параметара. Из тог разлога користимо еквивалентну репрезентацију о којој смо говорили у претходном поглављу. Како су условне расподеле једнаке и оба процеса су Марковљеви процеси првог реда, њихове логаритамске функције веродостојности ће достићи екстремуме у истим вредностима параметара. Када оценимо непознате параметре ν и μ, једноставно добијамо непознати параметар α из једначине (3.1.13).

Нека је дато n реализација, $x_1, ..., x_n$, модела (3.1.2). Претпоставимо да је комплетан узорак $(X_1, ..., X_n, \eta_2, ..., \eta_n)$, при чему се једино опсервирају вредности случајних промењљивих $X_1, ..., X_n$. Нека је $\xi = (\mu, \nu)$ вектор непознатих параметара и нека је $\xi_{old} = (\mu_{old}, \nu_{old})$ тренутна оцена вектора ξ. Одредимо најпре условну функцију веродостојности

$$P(X_i = x_i, \eta_i = e_i, 2 \leq i \leq n \mid X_1 = x_1, \xi_{old}). \tag{3.2.1}$$

Да бисмо поједноставили запис, користимо следеће ознаке $\boldsymbol{Z} = (X_2, ..., X_{n-1}, \eta_2, ..., \eta_{n-1})$ и $\boldsymbol{z} = (x_2, ..., x_{n-1}, e_2, ..., e_{n-1})$ и на основу тога имамо да је (3.2.1) једнако

$$P(X_n = x_n \mid \eta_n = e_n, \boldsymbol{Z} = \boldsymbol{z}, X_1 = x_1, \xi_{old}) P(\eta_n = e_n, \boldsymbol{Z} = \boldsymbol{z} \mid X_1 = x_1, \xi_{old}).$$

Како X_n зависи само од X_{n-1} и η_n, али не и од претходних вредности X_i и η_i, то је

$$\begin{aligned} &P(X_n = x_n \mid \eta_n = e_n, \boldsymbol{Z} = \boldsymbol{z}, X_1 = x_1, \xi_{old}) = \\ &\quad = P(X_n = x_n \mid \eta_n = e_n, X_{n-1} = x_{n-1}, \xi_{old}). \end{aligned} \tag{3.2.2}$$

Слично, због независности случајне промењљиве η_n од η_{n-i} и X_{n-i}, за $i \geq 1$, добијамо да је

$$P(\eta_n = e_n \mid \boldsymbol{Z} = \boldsymbol{z}, X_1 = x_1, \xi_{old}) = P(\eta_n = e_n). \tag{3.2.3}$$

Када (3.2.2) и (3.2.3) заменимо у (3.2.1), добијамо следеће

$$\begin{aligned} &P((\boldsymbol{Z}, X_n, \eta_n) = (\boldsymbol{z}, z_n, e_n) \mid X_1 = x_1, \xi_{old}) = \\ &= \textstyle\prod_{i=2}^{n} P(X_i = x_i \mid X_{i-1} = x_{i-1}, \eta_i = e_i, \xi_{old}) P(\eta_i = e_i). \end{aligned} \tag{3.2.4}$$

Из дефиниције модела даље добијамо

$$\begin{aligned} P(X_i = x_i \mid X_{i-1} &= x_{i-1}, \eta_i = e_i, \xi_{old}) = \\ &= P(\nu \diamond \min(x_{i-1}, e_i) = x_i) \\ &= P\left(\mathcal{NB}\left(\min(x_i, e_i) + 1, \frac{\nu}{1+\nu}\right) = x_i\right) \\ &= \binom{\min(x_{i-1} + e_i) + x_i}{x_i} \left(\frac{\nu}{1+\nu}\right)^{x_i} \\ &\times \left(\frac{1}{1+\nu}\right)^{\min(x_{i-1}, e_i)+1}, \end{aligned} \tag{3.2.5}$$

док из дефиниције случајне променљиве η_i имамо да је

$$P(\eta_i = e_i) = \left(\frac{(\mu - \nu)(1+\mu)}{\mu^2}\right)^{e_i} \frac{\nu + \nu\mu - \mu}{\mu^2}. \tag{3.2.6}$$

Када (3.2.5) и (3.2.6) заменимо у (3.2.4), добијамо

$$\begin{aligned} P(X_i = x_i, \eta_i = e_i, 2 \le i \le n \mid X_1 = x_1, \xi_{old}) &= \\ &= \left(\frac{\nu}{1+\nu}\right)^{\sum_{i=2}^n x_i} \left(\frac{1}{1+\nu}\right)^{n-1+\sum_{i=2}^n \min(x_{i-1}, e_i)} \\ &\times \left(\frac{(\mu-\nu)(1+\mu)}{\mu^2}\right)^{\sum_{i=2}^n e_i} \left(\frac{\nu + \nu\mu - \mu}{\mu^2}\right)^{n-1} \\ &\times \prod_{i=2}^{n} \binom{\min(x_{i-1}, e_i) + x_i}{x_i}. \end{aligned} \tag{3.2.7}$$

Према томе, логаритмовањем израза (3.2.7) и изостављањем константе која не зависи од ν и μ, дефинишемо функцију $l(\xi, \mathbf{X}, \eta)$ на следећи начин

$$\begin{aligned} l(\xi,\mathbf{X},\eta) &= \sum_{i=2}^{n} X_i[\log\nu - \log(1+\nu)] - [n-1+\sum_{i=2}^{n}\min(X_{i-1},\eta_i)] \\ &\times \log(1+\nu) + \sum_{i=2}^{n}\eta_i[\log(\mu-\nu)+\log(1+\mu)-2\log\mu] \\ &+ (n-1)[\log(\nu+\nu\mu-\mu)-2\log\mu], \end{aligned} \tag{3.2.8}$$

где је $\mathbf{X} = (X_1, ..., X_n)$ и $\boldsymbol{\eta} = (\eta_2, ..., \eta_n)$. Сада, на основу (3.2.8), можемо дефинисати Е-корак у ЕМ алгоритму.

3.2.1 Е-корак

У Е-кораку израчунавамо вредност функције $Q(\xi, \xi_{old})$ дефинисане као

$$Q(\xi,\xi_{old}) = E(l(\xi,\boldsymbol{X},\boldsymbol{\eta}) \mid \boldsymbol{X}=\boldsymbol{x},\xi_{old}),$$

где је $\boldsymbol{x} = (x_1, ..., x_n)$. Она је једнака

$$\begin{aligned} Q(\xi,\xi_{old}) = &\sum_{i=2}^{n} x_i[\log\nu-\log(1+\nu)] \\ &-[n-1+\sum_{i=2}^{n}E(\min(X_{i-1},\eta_i)\mid\mathbf{X}=\mathbf{x},\xi_{old})]\times log(1+\nu) \\ &+\sum_{i=2}^{n}E(\eta_i\mid X=x,\xi_{old})[\log(\mu-\nu)+\log(1+\mu)-2\log\mu] \\ &+(n-1)[\log(\nu+\nu\mu-\mu)-2\log\mu]. \end{aligned}$$

Ради лакшег израчунавања уводимо ознаке

$$a_i = E(\min(X_{i-1},\eta_i)\mid\boldsymbol{X}=\boldsymbol{x},\xi_{old}) \quad \text{и} \quad b_i = E(\eta_i\mid\boldsymbol{X}=\boldsymbol{x},\xi_{old}),$$

након чега је вредност функције $Q(\xi, \xi_{old})$ облика

$$\begin{aligned} Q(\xi,\xi_{old}) &= \sum_{i=2}^{n} x_i[\log\nu-\log(1+\nu)] - [n-1+\sum_{i=2}^{n}a_i]\log(1+\nu) \\ &+ \sum_{i=2}^{n} b_i[\log(\mu-\nu)+\log(1+\mu)-2\log\mu] \\ &+ (n-1)[\log(\nu+\nu\mu-\mu)-2\log\mu]. \end{aligned} \tag{3.2.9}$$

За израчунавање функције $Q(\xi, \xi_{old})$ потребно је да израчунамо управо ове вредности a_i и b_i, $2 \leq i \leq n$. Посматрајмо најпре вредност a_i, која је једнака

$$\begin{aligned}
a_i &= E(\min(X_{i-1}, \eta_i) \mid \mathbf{X} = \mathbf{x}, \xi_{old}) \\
&= \sum_{z=0}^{\infty} z P(\min(X_{i-1}, \eta_i) = z \mid \mathbf{X} = \mathbf{x}, \xi_{old}) \\
&= \sum_{z=0}^{\infty} z \frac{P(X_n = x_n \mid X_{n-1} = x_{n-1},) \cdot \ldots \cdot P(X_{i+1} = x_{i+1} \mid X_i = x_i)}{P(X_n = x_n \mid X_{n-1} = x_{n-1},) \cdot \ldots \cdot P(X_{i+1} = x_{i+1} \mid X_i = x_i)} \\
&\times \frac{P(X_i = x_i \mid \min(X_{i-1}, \eta_i) = z, \xi_{old}) P(X_{i-1} = x_{i-1}, \ldots, X_1 = x_1, \xi_{old})}{P(X_i = x_i \mid X_{i-1} = x_{i-1}, \xi_{old}) P(X_{i-1} = x_{i-1}, \ldots, X_1 = x_1, \xi_{old})} \\
&\times P(\min(X_{i-1}, \eta_i) = z \mid X_{i-1} = x_{i-1}, \ldots, X_1 = x_1, \xi_{old}) \\
&= \sum_{z=0}^{\infty} z \frac{P(X_i = x_i \mid \min(X_{i-1}, \eta_i) = z, \xi_{old})}{P(X_i = x_i \mid X_{i-1} = x_{i-1}, \xi_{old})} \\
&\times P(\min(X_{i-1}, \eta_i) = z \mid X_{i-1} = x_{i-1}, \xi_{old}) \\
&= \frac{1}{P(X_i = x_i \mid X_{i-1} = x_{i-1}, \xi_{old})} \\
&\times \left[\sum_{z=0}^{x_{i-1}-1} z \binom{z + x_i}{x_i} \left(\frac{\nu_{old}}{1 + \nu_{old}} \right)^{x_i} \left(\frac{1}{1 + \nu_{old}} \right)^{z+1} \times \theta_{old}^{z} (1 - \theta_{old}) \right. \\
&\left. + x_{i-1} \binom{x_i + x_{i-1}}{x_{i-1}} \left(\frac{\nu_{old}}{1 + \nu_{old}} \right)^{x_i} \left(\frac{1}{1 + \nu_{old}} \right)^{x_{i-1}+1} \theta_{old}^{x_{i-1}} \right],
\end{aligned} \tag{3.2.10}$$

где је $\theta_{old} = \frac{(\mu_{old} - \nu_{old})(1 + \mu_{old})}{\mu_{old}^2}$. Слично, имамо да је

$$\begin{aligned}
b_i &= E(\eta_i \mid \mathbf{X} = \mathbf{x}, \xi_{old}) \\
&= \sum_{z=0}^{\infty} z P(\eta_i = z \mid \mathbf{X} = \mathbf{x}, \xi_{old}) \\
&= \sum_{z=0}^{\infty} z \frac{P(X_1 = x_1, \ldots, X_n = x_n, \eta_i = z, \xi_{old})}{P(X_1 = x_1, \ldots, X_n = x_n, \xi_{old}))},
\end{aligned} \tag{3.2.11}$$

тј. важи да је

$$
\begin{aligned}
b_i &= \sum_{z=0}^{\infty} z \frac{P(X_n = x_n \mid X_{n-1} = x_{n-1},) \cdot ... \cdot P(X_{i+1} = x_{i+1} \mid X_i = x_i)}{P(X_n = x_n \mid X_{n-1} = x_{n-1},) \cdot ... \cdot P(X_{i+1} = x_{i+1} \mid X_i = x_i)} \\
&\times \frac{P(X_i = x_i \mid X_{i-1} = x_{i-1}, \eta_i = z, \xi_{old}) P(\eta_i = z, \xi_{old})}{P(X_i = x_i \mid X_{i-1} = x_{i-1}, \xi_{old})} \\
&\times \frac{P(X_{i-1} = x_{i-1}, ..., X_1 = x_1, \xi_{old})}{P(X_{i-1} = x_{i-1}, ..., X_1 = x_1, \xi_{old})} \\
&= \sum_{z=0}^{\infty} z \frac{P(X_i = x_i \mid X_{i-1} = x_{i-1}, \eta_i = z, \xi_{old})}{P(X_i = x_i \mid X_{i-1} = x_{i-1}, \xi_{old})} P(\eta_i = z, \xi_{old}) \\
&= \sum_{z=0}^{\infty} z \frac{P(\nu_{old} \diamond \min(x_{i-1}, z) = x_i)}{P(X_i = x_i \mid X_{i-1} = x_{i-1}, \xi_{old})} \theta_{old}^{z} (1 - \theta_{old}) \\
&= \frac{1}{P(X_i = x_i \mid X_{i-1} = x_{i-1}, \xi_{old})} \\
&\times \sum_{z=0}^{\infty} z \cdot P(\mathcal{NB}(\min(x_{i-1}, z) + 1, \frac{\nu_{old}}{1 + \nu_{old}}) = x_i) \theta_{old}^{z} (1 - \theta_{old}),
\end{aligned}
\tag{3.2.12}
$$

где $\mathcal{NB}(\min(x_{i-1}, z) + 1, \frac{\nu_{old}}{1+\nu_{old}})$ представља случајну променљиву са негативном биномном расподелом. Даље имамо да је

$$
\begin{aligned}
b_i &= \frac{1}{P(X_i = x_i \mid X_{i-1} = x_{i-1}, \xi_{old})} \\
&\times \left[\sum_{z=0}^{x_{i-1}} z \binom{z + x_i}{x_i} \left(\frac{\nu_{old}}{1 + \nu_{old}} \right)^{x_i} \left(\frac{1}{1 + \nu_{old}} \right)^{z+1} \theta_{old}^{z} (1 - \theta_{old}) \right. \\
&+ \binom{x_{i-1} + x_i}{x_i} \left(\frac{\nu_{old}}{1 + \nu_{old}} \right)^{x_i} \left(\frac{1}{1 + \nu_{old}} \right)^{x_{i-1}+1} \\
&\times \left. \frac{\theta_{old}^{x_{i-1}+1} (1 + x_{i-1} - \theta_{old} x_{i-1})}{1 - \theta_{old}} \right].
\end{aligned}
\tag{3.2.13}
$$

Када заменимо (3.2.10) и (3.2.13) у (3.2.9), добијамо вредност функције $Q(\xi, \xi_{old})$.

На први поглед, иако суме a_i и b_i изгледају компликовано, могу се представити у облику који је лак за примену. Наиме, ове суме се могу представити функцијама расподеле случајних промењивух које имају негативну биномну расподелу. Тачније, могу се представити у облику

$$\begin{aligned} a_i &= \frac{(x_i+1)\theta_{old}}{1+\nu_{old}-\theta_{old}} \\ &\times \frac{P(\mathcal{NB}\,(x_i+2,d) \le x_{i-1}-1) - \theta_{old}\cdot P(\mathcal{NB}\,(x_i+2,d) \le x_{i-1}-2)}{P(\mathcal{NB}\,(x_i+1,d) \le x_{i-1}) - \theta_{old}\cdot P(\mathcal{NB}\,(x_i+1,d) \le x_{i-1}-1)} \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} b_i = a_i &+ \frac{\theta_{old}}{1-\theta_{old}} \\ &\times \frac{P(\mathcal{NB}\,(x_i+1,d) = x_{i-1})}{P(\mathcal{NB}\,(x_i+1,d) \le x_{i-1}) - \theta_{old}\cdot P(\mathcal{NB}\,(x_i+1,d) \le x_{i-1}-1)}, \end{aligned}$$

за $d = \frac{\theta_{old}}{1+\nu_{old}}$.

Сада је све спремно за реализацију М-корака алгоритма ЕМ.

3.2.2 М-корак

У М-кораку максимизирамо функцију $Q(\xi, \xi_{old})$ по параметрима ν и μ. Диференцирањем (3.2.9) посебно по ν и μ, добијамо следеће једначине.

$$\begin{aligned} \frac{\partial Q}{\partial \nu} &= \sum_{i=2}^{n} x_i\Big(\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{1+\alpha}\Big) - \frac{n-1+\sum_{i=2}^{n} a_i}{1+\alpha} \\ &+ \sum_{i=2}^{n} b_i\Big(\frac{-1}{\mu-\alpha}\Big) + (n-1)\frac{1+\mu}{\alpha+\alpha\mu-\mu} \\ &= \frac{\sum\limits_{i=2}^{n} x_i}{\nu(1+\nu)} - \frac{n-1+\sum\limits_{i=2}^{n} a_i}{1+\nu} - \frac{\sum\limits_{i=2}^{n} b_i}{\mu-\nu} + \frac{(n-1)(1+\mu)}{\nu(1+\mu)-\mu} = 0 \end{aligned} \tag{3.2.14}$$

и

$$\begin{aligned}\frac{\partial Q}{\partial \mu} &= \sum_{i=2}^{n} b_i\Big(\frac{1}{\mu-\alpha}+\frac{1}{1+\mu}-\frac{2}{\mu}\Big)+(n-1)\Big(\frac{\alpha-1}{\alpha+\alpha\mu-\mu}-\frac{2}{\mu}\Big)\\ &= (n-1)\frac{\mu-\nu\mu-2\nu}{\mu(\nu+\nu\mu-\mu)}+\frac{\nu\mu-\mu+2\nu}{\mu(1+\mu)(\mu-\nu)}\sum_{i=2}^{n} b_i = 0. \quad (3.2.15)\end{aligned}$$

Из (3.2.15) имамо

$$\frac{\sum\limits_{i=2}^{n} b_i}{\mu-\nu} = (n-1)\frac{1+\mu}{\nu+\nu\mu-\mu}. \quad (3.2.16)$$

Заменом (3.2.16) у (3.2.14) добијамо следеће

$$\nu = \frac{\sum\limits_{i=2}^{n} x_i}{n-1+\sum\limits_{i=2}^{n} a_i}.$$

Сада решавамо (3.2.16) по параметру μ. Имамо да је

$$\alpha\sum_{i=2}^{n} b_i + (\alpha-1)\mu\sum_{i=2}^{n} b_i = (n-1)(\mu-\alpha+\mu^2-\alpha\mu), \quad (3.2.17)$$

одакле следи да је

$$(n-1)\mu^2+(1-\nu)\Big(n-1+\sum_{i=2}^{n} b_i\Big)\mu-\nu\Big(n-1+\sum_{i=2}^{n} b_i\Big)=0. \quad (3.2.18)$$

Нека су μ_1 и μ_2 решења квадратне једначине (3.2.18). Имамо да је $\mu_1\cdot\mu_2 = -\nu\Big(n-1+\sum\limits_{i=2}^{n} b_i\Big) < 0$, то је једно решење негативно, а друго позитивно. Како је $\mu>0$, следи да је решење једначине

$$\begin{aligned}\mu &= \frac{(\nu-1)\Big(n-1+\sum\limits_{i=2}^{n} b_i\Big)}{2(n-1)}\\ &+\frac{\sqrt{(\nu-1)^2\Big(n-1+\sum\limits_{i=2}^{n} b_i\Big)^2+4\nu(n-1)\Big(n-1+\sum\limits_{i=2}^{n} b_i\Big)}}{2(n-1)}.\end{aligned}$$

Из свега наведеног добијамо итеративни поступак за одређивање оцена параметара ν и μ

$$\begin{aligned}
\nu^{(h+1)} &= \frac{\sum_{i=2}^{n} x_i}{n-1+\sum_{i=2}^{n} a_i^{(h)}} \\
\mu^{(h+1)} &= \frac{(\nu^{(h+1)}-1)\Big(n-1+\sum_{i=2}^{n} b_i^{(h)}\Big)}{2(n-1)} \\
&+ \frac{\sqrt{(\nu^{(h+1)}-1)^2\Big(n-1+\sum_{i=2}^{n} b_i^{(h)}\Big)^2+4\nu^{(h+1)}(n-1)\Big(n-1+\sum_{i=2}^{n} b_i^{(h)}\Big)}}{2(n-1)}
\end{aligned}$$

где је

$$\begin{aligned}
a_i^{(h)} = &\quad \frac{(x_i+1)\theta_{old}^{(h)}}{1+\nu_{old}^{(h)}-\theta_{old}^{(h)}} \\
\times &\quad \frac{P\left(\mathcal{NB}\left(x_i+2,d^{(h)}\right)\le x_{i-1}-1\right)-\theta_{old}^{(h)}\cdot P\left(\mathcal{NB}\left(x_i+2,d^{(h)}\right)\le x_{i-1}-2\right)}{P\left(\mathcal{NB}\left(x_i+1,d^{(h)}\right)\le x_{i-1}\right)-\theta_{old}^{(h)}\cdot P\left(\mathcal{NB}\left(x_i+1,d^{(h)}\right)\le x_{i-1}-1\right)},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
b_i^{(h)} = &\quad a_i^{(h)}+\frac{\theta_{old}^{(h)}}{1-\theta_{old}^{(h)}} \\
\times &\quad \frac{P\left(\mathcal{NB}\left(x_i+1,d^{(h)}\right)=x_{i-1}\right)}{P\left(\mathcal{NB}\left(x_i+1,d^{(h)}\right)\le x_{i-1}\right)-\theta_{old}^{(h)}\cdot P\left(\mathcal{NB}\left(x_i+1,d^{(h)}\right)\le x_{i-1}-1\right)},
\end{aligned}$$

за

$$\theta^{(h)}=\frac{(\mu^{(h)}-\nu^{(h)})(1+\mu^{(h)})}{(\mu^{(h)})^2}$$

и $d^{(h)}=\frac{\theta_{old}^{(h)}}{1+\nu_{old}^{(h)}}$.
Поступке понављамо све док не буде

$$\mid \nu^{(h+1)}-\nu^{(h)}\mid<\varepsilon^* \qquad \text{и} \qquad \mid \mu^{(h+1)}-\mu^{(h)}\mid<\varepsilon^*,$$

за дато ε^*. Коначно, имамо оцене за параметре ν и μ које означавамо са $\hat{\nu}$ и $\hat{\mu}$. Оцена за непознати параметар α добија се на основу (3.1.13) и има следећи облик

$$\hat{\alpha} = \frac{\hat{\nu}(1+\hat{\mu}+\hat{\mu}^2)-\hat{\mu}}{(1+\hat{\mu})(\hat{\mu}-\hat{\nu})}.$$

За иницијалне вредности $\alpha^{(0)}$ и $\mu^{(0)}$ могу се узети оцене добијене методом момената.

3.3 Симулације

Сада ћемо размотрити особине оцена добијених методом условне максималне веродостојности преко ЕМ алгоритма и класичним начином који захтева нумеричка решења. За почетне вредности приликом примене оба метода за оцењивање непознатих параметара, користићемо оцене добијене методом момената и даћемо неке нумеричке резултате. Симулираћемо 1000 реализација посматраног модела за тачне вредности параметара а) $\mu = 4$, $\alpha = 3$, б) $\mu = 1$, $\alpha = 0.75$, в) $\mu = 2$, $\alpha = 0.7$. Вредности су одабране тако да се разматрају случајеви са слабом, умереном и јаком аутокорелацијом, чије су вредности 0.25, 0.40 и 0.64, редом. Симулације 1000 реализација се понављају 1000 пута и разматрамо подузорке обима 200, 500 и 1000. За сваки подузорак исте дужине израчунавамо средње вредности узорка и стандардне девијације оцена за α и μ, које уписујемо између заграда. Такође, утврђује се и време потребно за оцену параметара за обе методе. Резултати су представљени у табели 3.1.

На основу табеле 3.1, примећујемо да су оцене веома добре и да се стандардне девијације оцена смањују када се обим узорка повећава. Резултати добијени коришћењем ЕМ алгоритма су бољи или једнако добри као и резултати добијени нумеричким методама приликом оцењивања методом условне максималне веродостојности. Такође, када се користи ЕМ алгоритам, брже добијамо резултате. На крају, можемо закључити да увођењем ЕМ алгоритма за оцењивање методом условне максималне веродостојности, као резултат добијамо аналитичка решења, једноставност, прецизност и мање утрошеног времена, што даје предност у односу на класичан метод условне максималне веродостојности.

Табела 3.1: Оцене параметара μ и α, добијене коришћењем ЕМ алгоритма и класичне методе условне максималне веродостојности, и времена потребна за оцену параметара за оба метода.

а) $\mu = 4$ и $\alpha = 3$						
n	$\widehat{\mu}_{CML}$	$\widehat{\alpha}_{CML}$	$\widehat{\mu}_{EM}$	$\widehat{\alpha}_{EM}$	Време$_{CML}(s)$	Време$_{EM}(s)$
200	4,0062	3,1252	4,0062	3,1233	55,42	43,25
	(0,3999)	(0,7166)	(0,3998)	(0,7138)		
500	4,0039	3,0384	4,0039	3,0375	124,05	94,97
	(0,2582)	(0,3969)	(0,2581)	(0,3955)		
1000	4,0049	3,0087	4,0048	3,0086	232,08	189,06
	(0,1825)	(0,2658)	(0,1825)	(0,2651)		
б) $\mu = 1$ и $\alpha = 0,75$						
n	$\widehat{\mu}_{CML}$	$\widehat{\alpha}_{CML}$	$\widehat{\mu}_{EM}$	$\widehat{\alpha}_{EM}$	Време$_{CML}(s)$	Време$_{EM}(s)$
200	0,9972	0,8151	0,9957	0,8100	47,22	26,42
	(0,1544)	(0,2766)	(0,1541)	(0,2425)		
500	0,9976	0,7813	0,9971	0,7761	99,62	32,54
	(0,0966)	(0,1608)	(0,0959)	(0,1459)		
1000	0,9987	0,7688	0,9987	0,7642	194,35	34,00
	(0,0675)	(0,1046)	(0,0671)	(0,1054)		
в) $\mu = 2$ и $\alpha = 0,7$						
n	$\widehat{\mu}_{CML}$	$\widehat{\alpha}_{CML}$	$\widehat{\mu}_{EM}$	$\widehat{\alpha}_{EM}$	Време$_{CML}(s)$	Време$_{EM}(s)$
200	2,0102	0,7122	1,9820	0,7357	64,41	59,52
	(0,3711)	(0,0710)	(0,3673)	(0,0618)		
500	2,0041	0,7066	1,9807	0,7284	140,36	104,15
	(0,2327)	(0,0476)	(0,2304)	(0,0424)		
1000	2,0015	0,7026	1,9841	0,7183	256,89	137,42
	(0,1676)	(0,0334)	(0,1661)	(0,0326)		

Глава 4

Дводимензионални геометријски минификациони INAR(1) модел

Циљ ове главе је да допринесе развоју дводимензионалних минификационих процеса. Изучаваће се дводимензионални минификациони модел првог реда уведен у Stojanović (2024), чије је увођење мотивисано моделом уведеним у Aleksić и Ristić (2021). Разматраће се временски низови са геометријским маргиналним расподелама, док ће за иновационе низове важити да су међусобно независни. Модел се базира на модификованом негативном биномном оператору о коме је детаљно било речи у поглављу 1.2.

Глава је организована на следећи начин. Најпре се у поглављу 4.1 конструише дводимензионални минификациони модел. Затим се у другом поглављу наводе основне карактеристике модела и показују нека основна својства, као што су вероватноће прелаза, условно очекивање и условна дисперзија. Оцене непознатих параметара дате су у поглављу 4.3, где се разматрају два метода, метод условне максималне веродостојности и метод условних најмањих квадрата. Треће поглавље завршава се тестирањем ефикасности метода за оцену непознатих параметара уведеног модела.

4.1 Конструкција модела

У овом поглављу увешћемо дводимензионални минификациони модел $\{(X_t, Y_t) \in \mathbb{Z}\}$ где су временски низови $\{X_t\}$ и $\{Y_t\}$ зависни. Модел је базиран на модификованом негативном биномном оператору " $\diamond$ ", дефинисаном у (1.2.1). Нека је $\alpha \diamond X = \sum_{i=1}^{X+1} G_i$, где су све случајне променљиве бројачког низа $\{G_i\}$ независне и идентички расподељене случајне променљиве са геометријском маргиналном расподелом $Geom\left(\frac{\alpha}{1+\alpha}\right)$, односно расподелом облика $P(G_i = x) = \frac{\alpha^x}{(1+\alpha)^{x+1}}$, $x \in \mathbb{N}_0$. Случајне променљиве $\{G_i\}$ су међусобно независне са случајном променљивом X за свако $i \geq 1$. Слично, можемо посматрати и оператор $\beta\diamond$, који је дефинисан са $\beta \diamond Y = \sum_{i=1}^{Y+1} W_i$, где су $\{W_i\}$ независне и идентички расподељене случајне променљиве са геометријском маргиналном расподелом $Geom\left(\frac{\beta}{1+\beta}\right)$. Применом ова два оператора, уводимо дводимензионални минификациони модел дефинисан једначинама

$$X_t = \begin{cases} \min(\alpha \diamond X_{t-1}, \varepsilon_t) & \text{с.в.} \quad p \\ \min(\alpha \diamond Y_{t-1}\varepsilon_t), & \text{с.в.} \quad 1-p \end{cases} \tag{4.1.1}$$

$$Y_t = \begin{cases} \min(\beta \diamond X_{t-1}, \eta_t) & \text{с.в.} \quad q \\ \min(\beta \diamond Y_{t-1}, \eta_t) & \text{с.в.} \quad 1-q \end{cases} \tag{4.1.2}$$

где је

i) $\alpha, \beta > 0$, $p, q \in [0, 1]$,

ii) $\{\varepsilon_t, t \in \mathbb{Z}\}$ и $\{\eta_t, t \in \mathbb{Z}\}$ су међусобно независни временски низови чији су елементи независне и идентички расподељене случајне променљиве. Случајни вектор (ε_t, η_t) је независан од (X_s, Y_s), за свако $s < t$,

iii) бројачки низови садржани у $\alpha \diamond X_{t-1}$, $\alpha \diamond Y_{t-1}$, $\beta \diamond X_{t-1}$, $\beta \diamond Y_{t-1}$ су међусобно независне случајне променљиве за свако $t \in \mathbb{Z}$,

iv) бројачки низови садржани у $\alpha \diamond X_{t-1}$, $\alpha \diamond Y_{t-1}$, $\beta \diamond X_{t-1}$, $\beta \diamond Y_{t-1}$ су независни од случајних променљивих X_{t-1} и ε_t, Y_{t-1} и ε_t, X_{t-1} и η_t, Y_{t-1} и η_t, редом, за свако $t \in \mathbb{Z}$,

v) за свако $t \neq k$ бројачки низови садржани у $\alpha \diamond X_{t-1}$ и $\alpha \diamond X_{k-1}$ су независни, као и они садржани у $\alpha \diamond Y_{t-1}$ и $\alpha \diamond Y_{k-1}$, $\beta \diamond X_{t-1}$ и

$\beta \diamond X_{s-1}$, $\beta \diamond Y_{t-1}$ и $\beta \diamond Y_{s-1}$,

vi) случајне променљиве X_{t-l} и ε_t, као и Y_{t-l} и η_t су независне случајне променљиве, за свако $l \in \mathbb{N}$ и за свако $t \in \mathbb{Z}$.

Надаље ћемо посматрати модел дефинисан у (4.1.1) и (4.1.2), под претпоставком да случајне променљиве X_t и Y_t имају геометријску маргиналну расподелу $Geom\left(\frac{\mu}{1+\mu}\right)$, $\mu > 0$.

Наредном теоремом представићемо обике расподела иновационих низова $\{\varepsilon_t, t \in \mathbb{Z}\}$ и $\{\eta_t, t \in \mathbb{Z}\}$ и тиме у потпуности одредити модел.

Тврђење 4.1.1 *Нека је $\mu > 0$ и $\{(X_t, Y_t) \in \mathbb{Z}\}$ дводимензионални минификациони модел дефинисан у* (4.1.1) *и* (4.1.2) *са маргиналном геометријском $Geom\left(\frac{\mu}{1+\mu}\right)$ расподелом, $\mu > 0$. Тада, случајне променљиве ε_t и η_t имају геометријске расподеле $Geom\left(\frac{\mu[1+\alpha(1+\mu)]}{\alpha(1+\mu)^2}\right)$ и $Geom\left(\frac{\mu[1+\beta(1+\mu)]}{\beta(1+\mu)^2}\right)$, редом, ако и само ако је $\alpha > \frac{\mu}{1+\mu}$ и $\beta > \frac{\mu}{1+\mu}$.*

Доказ. Нека је $\{(X_t, Y_t) \in \mathbb{Z}\}$ дводимензионалан временски низ са геометријском маргиналном расподелом $Geom\left(\frac{\mu}{1+\mu}\right)$, $\mu > 0$ и нека је x произвољна ненегативна целобројна вредност. Тада, на основу дефиниције модела, дате у (4.1.1) и (4.1.2), имамо да је

$$P(X_t \geq x) = p \cdot P(\min(\alpha \diamond X_{t-1}, \varepsilon_t) \geq x) + (1-p) \cdot P(\min(\alpha \diamond Y_{t-1}, \varepsilon_t) \geq x) \tag{4.1.3}$$

и

$$P(Y_t \geq x) = q \cdot P(\min(\beta \diamond X_{t-1}, \eta_t) \geq x) + (1-q) \cdot P(\min(\beta \diamond Y_{t-1}, \eta_t) \geq x). \tag{4.1.4}$$

Из саме дефиниције модела имамо да су $\alpha \diamond X_{t-1}$ и $\alpha \diamond Y_{t-1}$ независне од ε_t, као и да су $\beta \diamond X_{t-1}$ и $\beta \diamond Y_{t-1}$ независне од η_t, одакле на основу ових чињеница имамо да је

$$P(X_t \geq x) = p \cdot P(\alpha \diamond X_{t-1} \geq x) \cdot P(\varepsilon_t \geq x) + (1-p) \cdot P(\alpha \diamond Y_{t-1}) \geq x) \cdot P(\varepsilon_t \geq x) \tag{4.1.5}$$

и

$$P(Y_t \geq x) = q \cdot P(\beta \diamond X_{t-1} \geq x) \cdot P(\eta_t \geq x) + (1-q) \cdot P(\beta \diamond Y_{t-1}) \geq x) \cdot P(\eta_t \geq x). \tag{4.1.6}$$

У Aleksić и Ristić (2021), показано је да случајна промењлива $\alpha \diamond X_{t-1}$ има геометријску расподелу $Geom\left(\frac{\alpha(1+\mu)}{1+\alpha(1+\mu)}\right)$. Доказ је дат у оквиру доказа тврђења 2.1.1. Аналогно, можемо закључити да и случајна промењива $\alpha \diamond Y_{t-1}$ има геометријску $Geom\left(\frac{\alpha(1+\mu)}{1+\alpha(1+\mu)}\right)$ расподелу, док случајне промењливе $\beta \diamond X_{t-1}$ и $\beta \diamond Y_{t-1}$ имају геометријску $Geom\left(\frac{\beta(1+\mu)}{1+\beta(1+\mu)}\right)$ расподелу. Сада, имамо да је

$$P(X_t \geq x) = \left(\frac{\alpha(1+\mu)}{1+\alpha(1+\mu)}\right)^x \cdot P(\varepsilon_t \geq x) \tag{4.1.7}$$

и

$$P(Y_t \geq x) = \left(\frac{\beta(1+\mu)}{1+\beta(1+\mu)}\right)^x \cdot P(\eta_t \geq x), \tag{4.1.8}$$

одакле, коначно, имамо да је

$$P(\varepsilon_t \geq x) = \frac{P(X_t \geq x)}{\left(\frac{\alpha(1+\mu)}{1+\alpha(1+\mu)}\right)^x} = \frac{\left(\frac{\mu}{1+\mu}\right)^x}{\left(\frac{\alpha(1+\mu)}{1+\alpha(1+\mu)}\right)^x} = \left(\frac{\mu[1+\alpha(1+\mu)]}{\alpha(1+\mu)^2}\right)^x \tag{4.1.9}$$

и

$$P(\eta_t \geq x) = \frac{P(Y_t \geq x)}{\left(\frac{\beta(1+\mu)}{1+\beta(1+\mu)}\right)^x} = \frac{\left(\frac{\mu}{1+\mu}\right)^x}{\left(\frac{\beta(1+\mu)}{1+\beta(1+\mu)}\right)^x} = \left(\frac{\mu[1+\beta(1+\mu)]}{\beta(1+\mu)^2}\right)^x. \tag{4.1.10}$$

Да би расподеле $Geom\left(\frac{\mu[1+\alpha(1+\mu)]}{\alpha(1+\mu)^2}\right)$ и $Geom\left(\frac{\mu[1+\beta(1+\mu)]}{\beta(1+\mu)^2}\right)$ биле дефинисане, услови $0 < \frac{\mu[1+\alpha(1+\mu)]}{\alpha(1+\mu)^2} < 1$ и $0 < \frac{\mu[1+\beta(1+\mu)]}{\beta(1+\mu)^2} < 1$ морају бити испуњени.

Дакле, можемо извести закључак да случајне промењливе ε_t и η_t имају геометријске маргиналне расподеле $Geom\left(\frac{\mu[1+\alpha(1+\mu)]}{\alpha(1+\mu)^2}\right)$ и $Geom\left(\frac{\mu[1+\beta(1+\mu)]}{\beta(1+\mu)^2}\right)$, ако и само ако, редом важи да је $\alpha > \frac{\mu}{1+\mu}$ и $\beta > \frac{\mu}{1+\mu}$. $\square$

Специјалне случајеве посматраног модела добићемо за неке вредности параметара p и q:

- За $p = 1$ и $q = 0$ имамо да је $X_t = \min(\alpha \diamond X_{t-1}, \varepsilon_t)$ и $Y_t = \min(\beta \diamond Y_{t-1}, \eta_t)$, одакле следи да су $\{X_t\}$ и $\{Y_t\}$ два независна мини-фикациона INAR(1) временска низа са геометријским маргиналним расподелама, дефинисана у Aleksić и Ristić (2021).

- За $p = 0$ и $q = 1$ имамо да је $X_t = \min(\alpha \diamond Y_{t-1}, \varepsilon_t)$ и $Y_t = \min(\beta \diamond X_{t-1}, \eta_t)$. У конструкцији променљиве X_t увек учествује Y_{t-1}, док у конструкцији променљиве Y_t увек учествује X_{t-1}, тј. овде имамо два регресиона модела. Код првог модела, зависна променљива је X_t, а независна Y_{t-1}, док је код другог модела зависна променљива Y_t, а независна X_{t-1}.

- За $p = 0$ и $q = 0$ имамо да је $X_t = \min(\alpha \diamond Y_{t-1}, \varepsilon_t)$ и $Y_t = \min(\beta \diamond Y_{t-1}, \eta_t)$. У конструкцији променљивих X_t и Y_t увек учествује Y_{t-1}. Одавде следи да имамо два регресиона модела, од којих је један ауторегресивни модел првог реда, дефинисан у Aleksić и Ristić (2021).

- За $p = 1$ и $q = 1$ имамо да је $X_t = \min(\alpha \diamond X_{t-1}, \varepsilon_t)$ и $Y_t = \min(\beta \diamond X_{t-1}, \eta_t)$. У конструкцији променљивих X_t и Y_t увек учествује X_{t-1}. Можемо приметити да овде, исто као и у претходном случају, имамо два регресиона модела, од којих је један ауторегресивни модел првог реда, дефинисан у Aleksić и Ristić (2021).

4.2 Особине модела

У овом поглављу навешћемо неке од важнијих особина дводимензионалног геометријског минификационог INAR(1) модела, дефинисаног једначинама (4.1.1) и (4.1.2), као што су условна расподела вероватноћа, условно очекивање и условна дисперзија. Даћемо и неке помоћне резултате који су нам потребни за одређивање особина модела. Резултате наведене у овом поглављу, користићемо, касније, за оцењивање непознатих параметара модела.

Наредним тврђењем, представићемо условну расподелу вероватноће за случајне променљиве X_t и Y_t када су познате реализације случајних променљивих X_{t-1} и Y_{t-1}, коју ћемо касније користити за примену метода условне максималне веродостојности, у поглављу (4.3.1), али пре тога докажимо следећу лему.

Лема 4.2.1 *Случајне променљиве X_t и Y_t, дефинисане у (4.1.1) и (4.1.2) редом, су независне за познате реализације случајних променљивих X_{t-1} и Y_{t-1}, $t \in \mathbb{Z}$.*

Доказ. Да бисмо показали ову теорему, довољно је доказати да важи

$$\begin{aligned} &P(X_t = x, Y_t = y \mid X_{t-1} = u, Y_{t-1} = v) = \\ &= P(X_t = x, \mid X_{t-1} = u, Y_{t-1} = v) \cdot P(Y_t = y \mid X_{t-1} = u, Y_{t-1} = v), \end{aligned} \tag{4.2.1}$$

за произвољне целе ненегативне бројеве x, y, u и v. Заправо, имамо да је

$$\begin{aligned} &P(X_t = x, Y_t = y \mid X_{t-1} = u, Y_{t-1} = v) = \\ &= pqP(\min(\alpha \diamond X_{t-1}, \varepsilon_t) = x, \min(\beta \diamond X_{t-1}, \eta_t) = y \mid X_{t-1} = u, Y_{t-1} = v) \\ &+ p(1-q)P(\min(\alpha \diamond X_{t-1}, \varepsilon_t) = x, \min(\beta \diamond Y_{t-1}, \eta_t) = y \mid X_{t-1} = u, Y_{t-1} = v) \\ &+ (1-p)qP(\min(\alpha \diamond Y_{t-1}, \varepsilon_t) = x, \min(\beta \diamond X_{t-1}, \eta_t) = y \mid X_{t-1} = u, Y_{t-1} = v) \\ &+ (1-p)(1-q) \\ &\times P(\min(\alpha \diamond Y_{t-1}, \varepsilon_t) = x, \min(\beta \diamond Y_{t-1}, \eta_t) = y \mid X_{t-1} = u, Y_{t-1} = v). \end{aligned} \tag{4.2.2}$$

Из дефиниције модела, за бројачке низове $\alpha\diamond X_{t-1}$, $\alpha\diamond Y_{t-1}$, $\beta\diamond X_{t-1}$ и $\beta\diamond Y_{t-1}$ имамо да су независни за познате вредности X_{t-1} и Y_{t-1}, док за случајне променљиве ε_t и η_t имамо да су међусобно независне и независне од X_{t-1} и Y_{t-1}. На основу овога важи да је

$$\begin{aligned}
P(X_t = x, Y_t = y \mid X_{t-1} = u, Y_{t-1} = v) = \\
&= pq(P(\min(\alpha \diamond X_{t-1}, \varepsilon_t) = x \mid X_{t-1} = u, Y_{t-1} = v)) \\
&\times P(\ \min(\beta \diamond X_{t-1}, \eta_t) = y \mid X_{t-1} = u, Y_{t-1} = v) \\
&+ p(1-q)(P(\min(\alpha \diamond X_{t-1}, \varepsilon_t) = x, \mid X_{t-1} = u, Y_{t-1} = v) \\
&\times P(\min(\beta \diamond Y_{t-1}, \eta_t) = y \mid X_{t-1} = u, Y_{t-1} = v)) \\
&+ (1-p)q(P(\min(\alpha \diamond Y_{t-1}, \varepsilon_t) = x \mid X_{t-1} = u, Y_{t-1} = v) \\
&\times P(\min(\beta \diamond X_{t-1}, \eta_t) = y \mid X_{t-1} = u, Y_{t-1} = v)) \\
&+ (1-p)(1-q) \\
&\times (P(\min(\alpha \diamond Y_{t-1}, \varepsilon_t) = x \mid X_{t-1} = u, Y_{t-1} = v) \\
&\cdot P(\min(\beta \diamond Y_{t-1}, \eta_t) = y \mid X_{t-1} = u, Y_{t-1} = v)).
\end{aligned} \tag{4.2.3}$$

Сређивањем претходног израза добијамо да је

$$\begin{aligned}
P(X_t = x, Y_t = y \mid X_{t-1} = u, Y_{t-1} = v) = \\
&= [p \cdot P(\min(\alpha \diamond X_{t-1}, \varepsilon_t) = x \mid X_{t-1} = u, Y_{t-1} = v) \\
&+ (1-p) \cdot P(\min(\alpha \diamond Y_{t-1}, \varepsilon_t) = x \mid X_{t-1} = u, Y_{t-1} = v)] \\
&\times [q \cdot P(\min(\beta \diamond X_{t-1}, \eta_t) = y \mid X_{t-1} = u, Y_{t-1} = v) \\
&+ (1-q) \cdot P(\min(\beta \diamond Y_{t-1}, \eta_t) = y \mid X_{t-1} = u, Y_{t-1} = v)],
\end{aligned} \tag{4.2.4}$$

одакле, заправо, следи једнакост (4.2.1), што је и требало показати.
$\square$

Тврђење 4.2.1 *Нека је* $\{(X_t, Y_t), t \in \mathbb{Z}\}$ *дводимензионални минификациони модел дефинисан у* (4.1.1) *и* (4.1.2) *са геометријском маргиналном расподелом* $Geom\left(\frac{\mu}{1+\mu}\right)$, $\mu > 0$. *Заједничка условна расподела вероватноће случајних променљивих* X_t *и* Y_t, *за познато* $X_{t-1} = u$ *и*

$Y_{t-1} = v$, дата је једначином

$$
\begin{aligned}
P(X_t = x, Y_t = y \quad | \quad & X_{t-1} = u, Y_{t-1} = v) = \\
= \quad & [p \cdot (f(\theta_1, x, u, \alpha) + g(\theta_1, x, u, \alpha)) \\
+ \quad & (1-p) \cdot (f(\theta_1, x, v, \alpha) + g(\theta_1, x, v, \alpha))] \\
\times \quad & [q \cdot (f(\theta_2, y, u, \beta) + g(\theta_2, y, u, \beta)) \\
+ \quad & (1-q) \cdot (f(\theta_2, y, v, \beta) + g(\theta_2, y, v, \beta)], \quad (4.2.5)
\end{aligned}
$$

за $x, y, u, v \in \mathbb{N}_0$, где је $\theta_1 = \frac{\mu[1+\alpha(1+\mu)]}{\alpha(1+\mu)^2}$, $\theta_2 = \frac{\mu[1+\beta(1+\mu)]}{\beta(1+\mu)^2}$, $f(\theta, z, t, a) = \theta^z \binom{z+t}{z} \left(\frac{a}{1+a}\right)^z \left(\frac{1}{1+a}\right)^{t+1}$, $g(\theta, z, t, a) = (1-\theta)\theta^z \left[1 - \sum_{i=0}^{z} \binom{i+t}{i} \left(\frac{a}{1+a}\right)^i \left(\frac{1}{1+a}\right)^{t+1}\right]$.

Доказ. Нека су x, y, u, v произвољни ненегативни цели бројеви. Како су, на основу леме 4.2.1, случајне променљиве X_t и Y_t условно независне за познате реализације случајних променљивих X_{t-1} и Y_{t-1}, тада је условна расподела вероватноће дводимензионалне случајне променљиве (X_t, Y_t) дата једначином

$$
\begin{aligned}
P(X_t = x, Y_t = y \mid X_{t-1} = u, Y_{t-1} = v) = P(X_t = x, \mid X_{t-1} = u, Y_{t-1} = v) \\
\times P(Y_t = y \mid X_{t-1} = u, Y_{t-1} = v).
\end{aligned}
\tag{4.2.6}
$$

Даље, из дефиниције модела имамо да је

$$
\begin{aligned}
P(X_t = x, Y_t = y \mid X_{t-1} = u, Y_{t-1} = v) = & \\
& = [p \cdot P(\min(\alpha \diamond X_{t-1}, \varepsilon_t) = x \mid X_{t-1} = u, Y_{t-1} = v) \\
& + (1-p) \cdot P(\min(\alpha \diamond Y_{t-1}, \varepsilon_t) = x \mid X_{t-1} = u, Y_{t-1} = v)] \\
& \times [q \cdot P(\min(\beta \diamond X_{t-1}, \eta_t) = y \mid X_{t-1} = u, Y_{t-1} = v) \\
& + (1-q) \cdot P(\min(\beta \diamond Y_{t-1}, \eta_t) = y \mid X_{t-1} = u, Y_{t-1} = v)].
\end{aligned}
\tag{4.2.7}
$$

Aleksić и Ristić (2021) су показали да за дате вредности $X_{t-1} = u$ и $Y_{t-1} = v$, случајне променљиве $\alpha \diamond X_{t-1}$, $\alpha \diamond Y_{t-1}$, $\beta \diamond X_{t-1}$ и $\beta \diamond Y_{t-1}$ имају негативну биномну расподелу $\mathcal{NB}(u+1, \frac{\alpha}{1+\alpha})$, $\mathcal{NB}(v+1, \frac{\alpha}{1+\alpha})$, $\mathcal{NB}(u+1, \frac{\beta}{1+\beta})$ и $\mathcal{NB}(v+1, \frac{\beta}{1+\beta})$, редом. Доказ је дат у поглављу 2.1.

Сада, за $\theta_1 = \frac{\mu[1+\alpha(1+\mu)]}{\alpha(1+\mu)^2}$, $\theta_2 = \frac{\mu[1+\beta(1+\mu)]}{\beta(1+\mu)^2}$, имамо да је

$$
\begin{aligned}
P(X_t = x, Y_t = y \mid X_{t-1} = u, Y_{t-1} = v) = \\
&= \Bigg\{ p\Bigg[\theta_1^x \binom{x+u}{x} \left(\frac{\alpha}{1+\alpha}\right)^x \left(\frac{1}{1+\alpha}\right)^{u+1} \\
&+ (1-\theta_1)\theta_1^x \Bigg(1 - \sum_{i=0}^{x} \binom{i+u}{i} \left(\frac{\alpha}{1+\alpha}\right)^i \left(\frac{1}{1+\alpha}\right)^{u+1}\Bigg)\Bigg] \\
&+ (1-p)\Bigg[\theta_1^x \binom{x+v}{x} \left(\frac{\alpha}{1+\alpha}\right)^x \left(\frac{1}{1+\alpha}\right)^{v+1} \\
&+ (1-\theta_1)\theta_1^x \Bigg(1 - \sum_{i=0}^{x} \binom{i+v}{i} \left(\frac{\alpha}{1+\alpha}\right)^i \left(\frac{1}{1+\alpha}\right)^{v+1}\Bigg)\Bigg]\Bigg\} \\
&\times \Bigg\{ q\Bigg[\theta_2^y \binom{y+u}{y} \left(\frac{\beta}{1+\beta}\right)^y \left(\frac{1}{1+\beta}\right)^{u+1} \\
&+ (1-\theta_2)\theta_2^y \Bigg(1 - \sum_{i=0}^{y} \binom{i+u}{i} \left(\frac{\beta}{1+\beta}\right)^i \left(\frac{1}{1+\beta}\right)^{u+1}\Bigg)\Bigg] \\
&+ (1-q)\Bigg[\theta_2^y \binom{y+v}{y} \left(\frac{\beta}{1+\beta}\right)^y \left(\frac{1}{1+\beta}\right)^{v+1} \\
&+ (1-\theta_2)\theta_2^y \Bigg(1 - \sum_{i=0}^{y} \binom{i+v}{i} \left(\frac{\beta}{1+\beta}\right)^i \left(\frac{1}{1+\beta}\right)^{v+1}\Bigg)\Bigg]\Bigg\}
\end{aligned}
\tag{4.2.8}
$$

чиме је показано тврђење (4.2.5). □

Напомена 4.2.1 *За случајне промењљиве* X_t *и* Y_t *дефинисане у* (4.1.1) *и* (4.1.2) *са геометријском расподелом* $Geom\left(\frac{\mu}{1+\mu}\right)$, *имамо да су очекивање и дисперзија* $E(X_t) = E(Y_t) = \mu$ *и* $D(X_t) = D(Y_t) = \mu(1+\mu)$. *Затим, случајне промењљиве* ε_t *и* η_t *са геометријском расподелом* $Geom\left(\frac{\mu[1+\alpha(1+\mu)]}{\alpha(1+\mu)^2}\right)$ *и* $Geom\left(\frac{\mu[1+\beta(1+\mu)]}{\beta(1+\mu)^2}\right)$, *редом, имају очекивање и дисперзију облика* $E(\varepsilon_t) = \frac{\mu[1+\alpha(1+\mu)]}{\alpha+\alpha\mu-\mu}$, $E(\eta_t) = \frac{\mu[1+\beta(1+\mu)]}{\beta+\beta\mu-\mu}$, $D(\varepsilon_t) = \frac{\alpha\mu(1+\mu)^2[1+\alpha(1+\mu)]}{(\alpha+\alpha\mu-\mu)^2}$ *и* $D(\eta_t) = \frac{\beta\mu(1+\mu)^2[1+\beta(1+\mu)]}{(\beta+\beta\mu-\mu)^2}$.

Условно очекивање и условна дисперзија случајних променљивих X_t и Y_t у односу на X_{t-1} и Y_{t-1} су од посебног значаја за посматрани модел, те ћемо њихове облике дати у наставку. Фокусирајмо се прво на условно очекивање, које ће нам касније користити приликом одређивања условне дисперзије, а такође нам је потребно за оцењивање непознатих параметара модела методом условних најмањих квадрата.

Тврђење 4.2.2 *Нека је* $\{(X_t, Y_t), t \in \mathbb{Z}\}$ *дводимензионални минификациони модел дефинисан у* (4.1.1) *и* (4.1.2) *са геометријском маргиналном расподелом* $Geom\left(\frac{\mu}{1+\mu}\right)$, $\mu > 0$. *Тада, условно очекивање случајних променљивих* X_t *и* Y_t, *за дато* X_{t-1} *и* Y_{t-1}, *гласи*

$$E(X_t \mid X_{t-1}, Y_{t-1}) = \frac{\theta_1}{1-\theta_1}[1 - pA^{1+X_{t-1}} - (1-p)A^{1+Y_{t-1}}] \tag{4.2.9}$$

и

$$E(Y_t \mid X_{t-1}, Y_{t-1}) = \frac{\theta_2}{1-\theta_2}[1 - qB^{1+X_{t-1}} - (1-q)B^{1+Y_{t-1}}], \tag{4.2.10}$$

за $\theta_1 = \frac{\mu[1+\alpha(1+\mu)]}{\alpha(1+\mu)^2}$, $\theta_2 = \frac{\mu[1+\beta(1+\mu)]}{\beta(1+\mu)^2}$, $A = \frac{1}{1+\alpha-\alpha\theta_1}$ *и* $B = \frac{1}{1+\beta-\beta\theta_2}$.

Доказ. Нека је X_t случајна променљива дефинисана у (4.1.1). Условно очекивање случајне променљиве X_t за дато X_{t-1} и Y_{t-1} можемо посматрати као

$$\begin{aligned} E(X_t \mid X_{t-1}, Y_{t-1}) = {} & E(\min(\alpha \diamond X_{t-1}, \varepsilon_t) \mid X_{t-1}, Y_{t-1}) \cdot p \\ & + E(\min(\alpha \diamond Y_{t-1}, \varepsilon_t) \mid X_{t-1}, Y_{t-1}) \cdot (1-p). \end{aligned} \tag{4.2.11}$$

Коришћењем резултата до кога су дошли Aleksić и Ristić (2021), а који је дат у (2.3.8), имамо да је

$$E(\min(\alpha \diamond X_{t-1}, \varepsilon_t) \mid X_{t-1}, Y_{t-1}) = \frac{\theta_1}{1-\theta_1}\Big[1 - \Big(\frac{1}{1+\alpha-\alpha\theta_1}\Big)^{1+X_{t-1}}\Big]$$

и

$$E(\min(\alpha \diamond Y_{t-1}, \varepsilon_t) \mid X_{t-1}, Y_{t-1}) = \frac{\theta_1}{1-\theta_1}\Big[1 - \Big(\frac{1}{1+\alpha-\alpha\theta_1}\Big)^{1+Y_{t-1}}\Big].$$

Заменом последње две једначине у једначину (4.2.11), закључујемо да је

$$E(X_t \mid X_{t-1}, Y_{t-1}) = \frac{\theta_1}{1-\theta_1}[1 - p\left(\frac{1}{1+\alpha-\alpha\theta_1}\right)^{1+X_{t-1}} - (1-p)\left(\frac{1}{1+\alpha-\alpha\theta_1}\right)^{1+Y_{t-1}}]. \tag{4.2.12}$$

Сада, коришћењем чињенице да је $A = \frac{1}{1+\alpha-\alpha\theta_1}$, долазимо до израза (4.2.9). Аналогно, можемо донети закључак да важи и (4.2.10). □

На основу претходне теореме, закључујемо да условно очекивање за X_t и Y_t није линеарна функција од X_{t-1} и Y_{t-1}.

Следећом лемом одредићемо моменте другог реда и тиме добити резултате потребне за одређивање условне дисперзије.

Лема 4.2.2 *Нека је $\{(X_t, Y_t), t \in \mathbb{Z}\}$ дводимензионални минификациони модел, дефинисан у (4.1.1) и (4.1.2) са геометријском маргиналном расподелом Geom $\left(\frac{\mu}{1+\mu}\right)$, $\mu > 0$. Тада је условни момент другог реда случајне променљиве X_t и Y_t за дато X_{t-1} и Y_{t-1}*

$$E({X_t}^2 \mid X_{t-1}, Y_{t-1}) = \frac{\theta_1(1+\theta_1)}{(1-\theta_1)^2}\big(1 - pA^{1+X_{t-1}} - (1-p)A^{1+Y_{t-1}}\big) - \frac{2\alpha{\theta_1}^2}{1-\theta_1}\big[p(1+X_{t-1})A^{2+X_{t-1}} + (1-p)(1+Y_{t-1})A^{2+Y_{t-1}}\big] \tag{4.2.13}$$

и

$$E({Y_t}^2 \mid X_{t-1}, Y_{t-1}) = \frac{\theta_2(1+\theta_2)}{(1-\theta_2)^2}\big(1 - qB^{1+X_{t-1}} - (1-q)B^{1+Y_{t-1}}\big) - \frac{2\beta{\theta_2}^2}{1-\theta_2}\big[q(1+X_{t-1})B^{2+X_{t-1}} + (1-q)(1+Y_{t-1})B^{2+Y_{t-1}}\big], \tag{4.2.14}$$

за $\theta_1 = \frac{\mu[1+\alpha(1+\mu)]}{\alpha(1+\mu)^2}$, $\theta_2 = \frac{\mu[1+\beta(1+\mu)]}{\beta(1+\mu)^2}$, $A = \frac{1}{1+\alpha-\alpha\theta_1}$ *и* $B = \frac{1}{1+\beta-\beta\theta_2}$.

Доказ. Најпре, имамо да је

$$E({X_t}^2 \mid X_{t-1}, Y_{t-1}) = pE((\min(\alpha \diamond X_{t-1}, \varepsilon_t))^2) \mid X_{t-1}, Y_{t-1}) + (1-p)E((\min(\alpha \diamond Y_{t-1}, \varepsilon_t))^2) \mid X_{t-1}, Y_{t-1}). \tag{4.2.15}$$

На основу резултата из Aleksić и Ristić (2021), датих у поглављу 2.3.1, имамо да је

$$E((\min(\alpha \diamond X_{t-1}, \varepsilon_t))^2) \mid X_{t-1}) = \frac{\theta_1(1+\theta_1)}{(1-\theta_1)^2}\left(1 - \left(\frac{1}{1+\alpha-\alpha\theta_1}\right)^{1+X_{t-1}}\right) - \frac{2\alpha{\theta_1}^2}{1-\theta_1}(1+X_{t-1})\left(\frac{1}{1+\alpha-\alpha\theta_1}\right)^{2+X_{t-1}} \tag{4.2.16}$$

и

$$E((\min(\alpha \diamond Y_{t-1}, \varepsilon_t))^2) \mid Y_{t-1}) = \frac{\theta_1(1+\theta_1)}{(1-\theta_1)^2}\left(1 - \left(\frac{1}{1+\alpha-\alpha\theta_1}\right)^{1+Y_{t-1}}\right) - \frac{2\alpha{\theta_1}^2}{1-\theta_1}(1+Y_{t-1})\left(\frac{1}{1+\alpha-\alpha\theta_1}\right)^{2+Y_{t-1}}, \tag{4.2.17}$$

за $\theta_1 = \frac{\mu[1+\alpha(1+\mu)]}{\alpha(1+\mu)^2}$, $\theta_2 = \frac{\mu[1+\beta(1+\mu)]}{\beta(1+\mu)^2}$. Заменом (4.2.16) и (4.2.17) у (4.2.15) долазимо до једначине

$$E({X_t}^2 \mid X_{t-1}, Y_{t-1}) = \frac{\theta_1(1+\theta_1)}{(1-\theta_1)^2}\left(1 - pA^{1+X_{t-1}} - (1-p)A^{1+Y_{t-1}}\right) - \frac{2\alpha{\theta_1}^2}{1-\theta_1}\left[p(1+X_{t-1})A^{2+X_{t-1}} + (1-p)(1+Y_{t-1})A^{2+Y_{t-1}}\right], \tag{4.2.18}$$

за $A = \frac{1}{1+\alpha-\alpha\theta_1}$, чиме показујемо једнакост (4.2.13). Аналогно овом доказу, показује се и да важи једнакост (4.2.14). $\square$

Условна дисперзија случајних промењивих X_t и Y_t за дато X_{t-1} и Y_{t-1} дата је следећим тврђењем.

Тврђење 4.2.3 *Нека је* $\{(X_t, Y_t), t \in \mathbb{Z}\}$ *дводимензионални минификациони модел дефинисан у* (4.1.1) *и* (4.1.2) *са геометријском маргиналном расподелом* $Geom\left(\frac{\mu}{1+\mu}\right)$, $\mu > 0$. *Тада је условна дисперзија* *случајних промењивих* X_t *и* Y_t *за дато* X_{t-1} *и* Y_{t-1} *следећег облика*

$$\begin{aligned}D(X_t \mid X_{t-1}, Y_{t-1}) = \frac{\theta_1}{(1-\theta_1)^2} - \frac{\theta_1}{1-\theta_1}\big(pA^{1+X_{t-1}} + (1-p)A^{1+Y_{t-1}}\big)\\ - \frac{2\alpha{\theta_1}^2}{1-\theta_1}\big(pA^{2+X_{t-1}}(1+X_{t-1}) + (1-p)A^{2+Y_{t-1}}(1+Y_{t-1})\big)\\ - \frac{{\theta_1}^2}{(1-\theta_1)^2}\big(p^2A^{2+2X_{t-1}} + 2p(1-p)A^{2+X_{t-1}+Y_{t-1}} + (1-p)^2A^{2+2Y_{t-1}}\big)\end{aligned} \tag{4.2.19}$$

и

$$\begin{aligned}D(Y_t \mid X_{t-1}, Y_{t-1}) = \frac{\theta_2}{(1-\theta_2)^2} - \frac{\theta_2}{1-\theta_2}\big(qB^{1+X_{t-1}} + (1-q)B^{1+Y_{t-1}}\big)\\ - \frac{2\beta{\theta_2}^2}{1-\theta_2}\big(qB^{2+X_{t-1}}(1+X_{t-1}) + (1-q)B^{2+Y_{t-1}}(1+Y_{t-1})\big)\\ - \frac{{\theta_2}^2}{(1-\theta_2)^2}\big(q^2B^{2+2X_{t-1}} + 2q(1-q)B^{2+X_{t-1}+Y_{t-1}} + (1-q)^2B^{2+2Y_{t-1}}\big),\end{aligned} \tag{4.2.20}$$

за $\theta_1 = \frac{\mu[1+\alpha(1+\mu)]}{\alpha(1+\mu)^2}$, $\theta_2 = \frac{\mu[1+\beta(1+\mu)]}{\beta(1+\mu)^2}$, $A = \frac{1}{1+\alpha-\alpha\theta_1}$ *и* $B = \frac{1}{1+\beta-\beta\theta_2}$.

Доказ. Нека је X_t случајна промењива дефинисана у (4.1.1). Условна дисперзија случајне променљиве X_t за дато X_{t-1} и Y_{t-1} је

$$D(X_t \mid X_{t-1}, Y_{t-1}) = E({X_t}^2 \mid X_{t-1}, Y_{t-1}) - (E(X_t \mid X_{t-1}, Y_{t-1}))^2. \tag{4.2.21}$$

Заменом (4.2.13) и (4.2.9) у (4.2.21), претходна једнакост добија облик

$$\begin{aligned}D(X_t \mid X_{t-1}, Y_{t-1}) = \frac{\theta_1(1+\theta_1)}{(1-\theta_1)^2}\big(1 - pA^{1+X_{t-1}} - (1-p)A^{1+Y_{t-1}}\big)\\ - \frac{2\alpha{\theta_1}^2}{1-\theta_1}\big[p(1+X_{t-1})\frac{2\alpha{\theta_1}^2}{1-\theta_1} + (1-p)(1+Y_{t-1})A^{2+Y_{t-1}}\big]\\ - \frac{{\theta_1}^2}{1-\theta_1}\Big[1 - 2pA^{1+X_{t-1}} - 2(1-p)A^{1+Y_{t-1}}\\ + 2p(1-p)A^{2+X_{t-1}Y_{t-1}} + p^2A^{2+2X_{t-1}} + (1-p)^2A^{2+2Y_{t-1}}\Big].\end{aligned} \tag{4.2.22}$$

Сређивањем претходне једначине, добијамо израз (4.2.19), што је и требало показати. Доказ једнакости (4.2.20) је аналоган наведеном доказу. □

Претходним тврђењем долазимо до исте карактеристике за условну дисперзију као што смо имали и за условно очекивање. Наиме, условна дисперзија случајних променљивих X_t и Y_t, за дато X_{t-1} и Y_{t-1} је, такође, нелинеарна функција од X_{t-1} и Y_{t-1}.

4.3 Оцењивање непознатих параметара

У овом поглављу, разматраћемо оцене непознатих параметара дводимензионалног минификационог модела са геометријском маргиналном расподелом задатог у (4.1.1) и (4.1.2). Овај модел има пет непознатих параметара и то су μ, α, β, p и q. Посматраћемо два метода за оцењивање непознатих параметара и то метод условне максималне веродостојности и метод условних најмањих квадрата.

4.3.1 Метод условне максималне веродостојности

Нека је дат дводимензионални случајни узорак, обима n, (X_1, Y_1), (X_2, Y_2), ..., (X_n, Y_n). Како се ради о процесу Маркова, реда један, користићемо условну вероватноћу дату у (4.2.5). Оцене параметара добијамо као вредности које максимизирају условну логаритамску функцију веродостојности, где ако уведемо смене

$$\begin{aligned} A = \theta_1^{x_i} \binom{x_i + x_{i-1}}{x_i} \left(\frac{\alpha}{1+\alpha}\right)^{x_i} \left(\frac{1}{1+\alpha}\right)^{x_{i-1}+1} \\ + (1-\theta_1)\theta_1^{x_i} \left(1 - \sum_{i=0}^{x_i} \binom{i + x_{i-1}}{i} \left(\frac{\alpha}{1+\alpha}\right)^{i} \left(\frac{1}{1+\alpha}\right)^{x_{i-1}+1}\right), \end{aligned} \tag{4.3.1}$$

$$\begin{aligned} B = \theta_1^{x_i} \binom{x_i + y_{i-1}}{x_i} \left(\frac{\alpha}{1+\alpha}\right)^{x_i} \left(\frac{1}{1+\alpha}\right)^{y_{i-1}+1} \\ + (1-\theta_1)\theta_1^{x_i} \left(1 - \sum_{i=0}^{x_i} \binom{i + y_{i-1}}{i} \left(\frac{\alpha}{1+\alpha}\right)^{i} \left(\frac{1}{1+\alpha}\right)^{y_{i-1}+1}\right), \end{aligned} \tag{4.3.2}$$

$$\begin{aligned} C = \theta_2^{y_i} \binom{y_i + x_{i-1}}{y_i} \left(\frac{\beta}{1+\beta}\right)^{y_i} \left(\frac{1}{1+\beta}\right)^{x_{i-1}+1} \\ + (1-\theta_2)\theta_2^{y_i} \left(1 - \sum_{i=0}^{y_i} \binom{i + x_{i-1}}{i} \left(\frac{\beta}{1+\beta}\right)^{i} \left(\frac{1}{1+\beta}\right)^{x_{i-1}+1}\right) \end{aligned} \tag{4.3.3}$$

и

$$\begin{aligned} D &= \theta_2^{y_i}\binom{y_i+y_{i-1}}{y_i}\left(\frac{\beta}{1+\beta}\right)^{y_i}\left(\frac{1}{1+\beta}\right)^{y_{i-1}+1} \\ &+ (1-\theta_2)\theta_2^{y_i}\left(1-\sum_{i=0}^{y_i}\binom{i+y_{i-1}}{i}\left(\frac{\beta}{1+\beta}\right)^{i}\left(\frac{1}{1+\beta}\right)^{y_{i-1}+1}\right) \end{aligned} \tag{4.3.4}$$

имамо да је логаритамска функција веродостојности следећег облика

$$\begin{aligned} logL(\mu,\alpha,\beta,p,q) &= \sum_{i=2}^{n} logP(X_i=x_i, Y_i=y_i \mid X_{i-1}=x_{i-1}, Y_{i-1}=y_{i-1}) \\ &= \sum_{i=2}^{n} log\big[(p\cdot A+(1-p)B)(q\cdot C+(1-q)D)\big]. \end{aligned} \tag{4.3.5}$$

Као што смо и могли да претпоставимо, због комплексности функције веродостојности, оцене непознатих параметара не можемо добити аналитичким путем, већ ћемо их одредити нумерички, користећи статистички софтвер R и функцију optim.

4.3.2 Метод условних најмањих квадрата

Претпоставимо да је дат дводимензионални случајни узорак, обима n, (X_1,Y_1), (X_2,Y_2), ..., (X_n,Y_n) и нека је $Z_t=(X_t,Y_t)$. Оцене непознатих параметара одређујемо минимизирањем суме квадрата

$$\begin{aligned} S(\mu,\alpha,\beta,p,q) &= \sum_{t=2}^{n}(Z_t-E(Z_t\mid Z_{t-1}))'(Z_t-E(Z_t\mid Z_{t-1})) \\ &= \sum_{t=2}^{n}\left(\begin{bmatrix}X_t\\Y_t\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}E(X_t\mid X_{t-1},Y_{t-1})\\E(Y_t\mid X_{t-1},Y_{t-1})\end{bmatrix}\right)' \\ &\times \left(\begin{bmatrix}X_t\\Y_t\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}E(X_t\mid X_{t-1},Y_{t-1})\\E(Y_t\mid X_{t-1},Y_{t-1})\end{bmatrix}\right), \end{aligned} \tag{4.3.6}$$

која је даље једнака

$$
\begin{aligned}
S(\mu,\alpha,\beta,p,q) = &\sum_{t=2}^{n} \begin{bmatrix} X_t - E(X_t \mid X_{t-1}, Y_{t-1}) & Y_t - E(Y_t \mid X_{t-1}, Y_{t-1}) \end{bmatrix} \\
&\times \begin{bmatrix} X_t - E(X_t \mid X_{t-1}, Y_{t-1}) \\ Y_t - E(Y_t \mid X_{t-1}, Y_{t-1}) \end{bmatrix} \\
&= \sum_{t=2}^{n} (X_t - E(X_t \mid X_{t-1}, Y_{t-1}))^2 \\
&+ \sum_{t=2}^{n} (Y_t - E(Y_t \mid X_{t-1}, Y_{t-1}))^2.
\end{aligned} \tag{4.3.7}
$$

Заменом (4.2.9) и (4.2.10) у (4.3.7), функција S добија облик

$$
\begin{aligned}
S(\mu,\alpha,\beta,p,q) = &\sum_{t=2}^{n} \left(X_t - \frac{\theta_1}{1-\theta_1}[1 - pA^{1+X_{t-1}} - (1-p)A^{1+Y_{t-1}}] \right)^2 \\
&+ \sum_{t=2}^{n} \left(Y_t - \frac{\theta_2}{1-\theta_2}[1 - qB^{1+X_{t-1}} - (1-q)B^{1+Y_{t-1}}] \right)^2,
\end{aligned} \tag{4.3.8}
$$

за $\theta_1 = \frac{\mu[1+\alpha(1+\mu)]}{\alpha(1+\mu)^2}$, $\theta_2 = \frac{\mu[1+\beta(1+\mu)]}{\beta(1+\mu)^2}$, $A = \frac{1}{1+\alpha-\alpha\theta_1}$ и $B = \frac{1}{1+\beta-\beta\theta_2}$.

Одређивање вредности параметара μ, α, β, p и q, који минимизирају функцију (4.3.8), није могуће одредити аналитичким путем, већ ћемо и за овај метод, као и за претходни, вредности параметара наћи нумерички, користећи статистички софтвер R.

4.3.3 Симулације

Сада ћемо размотрити ефикасност метода за оцењивање непознатих параметара дводимензионалног минификационог модела дефинисаног у (4.1.1) и (4.1.2), које смо навели у овом поглављу. Симулираћемо 100 узорака обима 1000 базираних на једначинама (4.1.1) и (4.1.2) и посматрати подузорке обима 100, 200, 500 и 1000. Посматраћемо узорке генерисане на основу параметара:
Табела 4.1: а) $\mu = 4,5$; $\alpha = 0,88$; $\beta = 0,9$; $p = 0,5$; $q = 0,45$; б) $\mu = 4,5$; $\alpha = 0,88$; $\beta = 0,9$; $p = 0,8$; $q = 0,8$; в) $\mu = 4,5$; $\alpha = 0,88$; $\beta = 0,9$; $p = 0,2$; $q = 0,2$; г) $\mu = 4,5$; $\alpha = 0,88$; $\beta = 0,9$; $p = 0,2$; $q = 0,8$;
Табела 4.2: а) $\mu = 4,5$; $\alpha = 2,1$; $\beta = 1,8$; $p = 0,5$; $q = 0,45$; б) $\mu = 4,5$; $\alpha = 2,1$; $\beta = 1,8$; $p = 0,8$; $q = 0,8$; в) $\mu = 4,5$; $\alpha = 2,1$; $\beta = 1,8$; $p = 0,2$; $q = 0,2$; г) $\mu = 4,5$; $\alpha = 2,1$; $\beta = 1,8$; $p = 0,2$; $q = 0,8$;
Табела 4.3: а) $\mu = 2$; $\alpha = 0,7$; $\beta = 0,68$; $p = 0,5$; $q = 0,45$; б) $\mu = 2$; $\alpha = 0,7$; $\beta = 0,68$; $p = 0,8$; $q = 0,8$; в) $\mu = 2$; $\alpha = 0,7$; $\beta = 0,68$; $p = 0,2$; $q = 0,2$; г) $\mu = 2$; $\alpha = 0,7$; $\beta = 0,68$; $p = 0,2$; $q = 0,8$;
Табела 4.4: а) $\mu = 2$; $\alpha = 1,55$; $\beta = 1,45$; $p = 0,5$; $q = 0,45$; б) $\mu = 2$; $\alpha = 1,55$; $\beta = 1,45$; $p = 0,8$; $q = 0,8$; в) $\mu = 2$; $\alpha = 1,55$; $\beta = 1,45$; $p = 0,2$; $q = 0,2$; г) $\mu = 2$; $\alpha = 1,55$; $\beta = 1,45$; $p = 0,2$; $q = 0,8$.

У табелама су дате оцењене вредности параметара, заједно са стандардним девијацијама, које су дате унутар заграда.

Параметре не бирамо насумично, већ за циљ имамо што већи број различитих случајева уз одговарајући избор параметара. Параметре за проверу понашања метода бирамо тако да имамо и низове са релативно великим и низове са релативно малим вредностима. Базирано на овој дискусији, за вредност параметара μ, односно за средњу вредност узорка, бирамо $\mu = 4,5$ и $\mu = 2$. Табела 4.1 и табела 4.2 нам дају резултате када је $\mu = 4,5$, док нам табела 4.3 и табела 4.4 дају резултате за $\mu = 2$. Вредности параметара α и β су из интервала $(\frac{\mu}{1+\mu}, \infty)$ и стога бирамо вредности које су близу доње границе, као и вредности које нису близу доње границе. За вредности блиске граници користимо $\alpha = 0,88$; $\beta = 0,9$ (табела 4.1) и $\alpha = 0,7$; $\beta = 0,68$ (табела 4.3), док за вредности које нису блиске граници посматрамо $\alpha = 2,1$; $\beta = 1,8$ (табела 4.2) и $\alpha = 1,55$; $\beta = 1,45$ (табела 4.4). Вредности за параметре p и q бирамо тако да покријемо четири различита случаја. Прво разматрамо случај када је $p = 0,5$ и $q = 0,45$. Тада и X_{t-1} и Y_{t-1} подједнако често учествују у конструкцији низова X_t и Y_t. Други сценарио је када је X_{t-1} доминантнија грана у конструисању X_t и Y_t. Ово се дешава када су вредности за p и q велике и тада посматрамо случај $p = q = 0,8$. За разлику од другог, имамо трећи случај где је $p = q = 0,2$ и тада Y_{t-1} много чешће учествује у формирању низова X_t и Y_t. Коначно, разматрамо случај када је p мало, а q велико. Тада се чешће X_t формира на основу Y_{t-1}, а Y_t на основу X_{t-1}. За вредности параметара p и q овде ћемо узети $p = 0,2$ и $q = 0,8$. На овај начин смо покрили све интересантне случајеве конструкције процеса у смислу унакрсне корелације.

На основу података из табела 4.1, 4.2, 4.3 и 4.4, можемо закључити да обе методе дају солидне оцене са малим стандардним девијацијама, осим у неким случајевима где је величина узорка мала, што се и може десити за такву величину узорка. За дужине узорака 100 и 200 не можемо се одлучити који је метод прикладнији. Када су дужине узорака 500 и 1000 примећујемо разлику у стандардној девијацији оцена параметара α, β, p и q, у корист CML метода. Коначно, можемо закључити да како се величина узорка повећава, процењене вредности конвергирају ка реалним вредностима за оба метода.

Табела 4.1: Оцене добијене применом метода условне максималне веродостојности и метода условних најмањих квадрата, за различите стварне вредности параметара μ, α, β, p и q.

n	$\widehat{\mu}_{CML}$	$\widehat{\alpha}_{CML}$	$\widehat{\beta}_{CML}$	$\widehat{p}_{CML}$	$\widehat{q}_{CML}$	$\widehat{\mu}_{CLS}$	$\widehat{\alpha}_{CLS}$	$\widehat{\beta}_{CLS}$	$\widehat{p}_{CLS}$	$\widehat{q}_{CLS}$
а) $\mu = 4,5$; $\alpha = 0,88$; $\beta = 0,9$; $p = 0,5$ и $q = 0,45$										
100	3,7809	0,8814	0,9039	0,4821	0,4430	4,1550	1,0333	1,0938	0,4710	0,4349
	(0,9975)	(0,1321)	(0,1549)	(0,1087)	(0,1314)	(1,0247)	(0,3466)	(0,4325)	(0,1589)	(0,1590)
200	4,0412	0,8666	0,8919	0,4885	0,4471	4,2186	0,9463	0,9583	0,4896	0,4434
	(0,9441)	(0,0791)	(0,0956)	(0,0743)	(0,0838)	(0,8467)	(0,1870)	(0,2097)	(0,1080)	(0,1128)
500	4,3115	0,8761	0,8993	0,4952	0,4445	4,2480	0,9169	0,9272	0,4856	0,4436
	(0,5929)	(0,0482)	(0,0514)	(0,0390)	(0,0480)	(0,6444)	(0,1397)	(0,1318)	(0,0638)	(0,0726)
1000	4,3135	0,8733	0,8951	0,4981	0,4472	4,2072	0,9003	0,9015	0,4875	0,4492
	(0,4647)	(0,0401)	(0,0423)	(0,0335)	(0,0387)	(0,6171)	(0,1160)	(0,1050)	(0,0531)	(0,0569)
б) $\mu = 4,5$, $\alpha = 0,88$, $\beta = 0,9$, $p = 0,8$ и $q = 0,8$										
n	$\widehat{\mu}_{CML}$	$\widehat{\alpha}_{CML}$	$\widehat{\beta}_{CML}$	$\widehat{p}_{CML}$	$\widehat{q}_{CML}$	$\widehat{\mu}_{CLS}$	$\widehat{\alpha}_{CLS}$	$\widehat{\beta}_{CLS}$	$\widehat{p}_{CLS}$	$\widehat{q}_{CLS}$
100	3,9356	0,8760	0,8938	0,8184	0,8065	4,2052	1,0452	0,9236	0,8237	0,8426
	(1,0537)	(0,1143)	(0,1161)	(0,1457)	(0,1221)	(1,1576)	(0,3042)	(0,2728)	(0,1555)	(0,1412)
200	4,2686	0,8827	0,8944	0,8090	0,8007	4,2413	0,9877	0,8952	0,8221	0,8234
	(0,8247)	(0,0759)	(0,0838)	(0,0741)	(0,0812)	(0,7977)	(0,1917)	(0,1902)	(0,1086)	(0,1053)
500	4,4634	0,8863	0,8981	0,8071	0,8069	4,2671	0,9245	0,8770	0,8140	0,8209
	(0,4787)	(0,0421)	(0,0442)	(0,0522)	(0,0530)	(0,5601)	(0,1207)	(0,1305)	(0,0706)	(0,0709)
1000	4,4548	0,8811	0,8992	0,8025	0,8053	4,3143	0,8979	0,8967	0,8082	0,8180
	(0,3404)	(0,0296)	(0,0357)	(0,0324)	(0,0362)	(0,5046)	(0,0830)	(0,0966)	(0,0507)	(0,0546)
в) $\mu = 4,5$, $\alpha = 0,88$, $\beta = 0,9$, $p = 0,2$ и $q = 0,2$										
n	$\widehat{\mu}_{CML}$	$\widehat{\alpha}_{CML}$	$\widehat{\beta}_{CML}$	$\widehat{p}_{CML}$	$\widehat{q}_{CML}$	$\widehat{\mu}_{CLS}$	$\widehat{\alpha}_{CLS}$	$\widehat{\beta}_{CLS}$	$\widehat{p}_{CLS}$	$\widehat{q}_{CLS}$
100	4,0634	0,8862	0,9255	0,1962	0,1575	4,2082	0,9243	1,0512	0,1729	0,1548
	(1,0517)	(0,1045)	(0,2140)	(0,1091)	(0,1488)	(1,0502)	(0,2716)	(0,3129)	(0,1316)	(0,1511)
200	4,2460	0,8832	0,9041	0,1963	0,1844	4,1779	0,9110	0,9962	0,1757	0,1660
	(0,7874)	(0,0807)	(0,0794)	(0,0811)	(0,0819)	(0,7628)	(0,1929)	(0,2063)	(0,1047)	(0,1032)
500	4,4344	0,8823	0,9020	0,2024	0,1913	4,3325	0,8951	0,9362	0,1843	0,1765
	(0,5642)	(0,0434)	(0,0458)	(0,0440)	(0,0447)	(0,6352)	(0,1249)	(0,1254)	(0,0668)	(0,0599)
1000	4,4994	0,8817	0,9069	0,2019	0,1979	4,3798	0,8848	0,9277	0,1908	0,1917
	(0,3489)	(0,0291)	(0,0311)	(0,0321)	(0,0283)	(0,5585)	(0,0927)	(0,1006)	(0,0502)	(0,0475)
г) $\mu = 4.5$, $\alpha = 0.88$, $\beta = 0.9$, $p = 0.2$ и $q = 0.8$										
n	$\widehat{\mu}_{CML}$	$\widehat{\alpha}_{CML}$	$\widehat{\beta}_{CML}$	$\widehat{p}_{CML}$	$\widehat{q}_{CML}$	$\widehat{\mu}_{CLS}$	$\widehat{\alpha}_{CLS}$	$\widehat{\beta}_{CLS}$	$\widehat{p}_{CLS}$	$\widehat{q}_{CLS}$
100	3,9249	0,8815	0,9352	0,1851	0,8086	4,2388	0,9869	1,0349	0,1753	0,8372
	(0,9969)	(0,1083)	(0,1596)	(0,1141)	(0,1211)	(0,9653)	(0,2738)	(0,3151)	(0,1240)	(0,1228)
200	4,0320	0,8638	0,8998	0,2033	0,7934	4,4661	0,9641	0,9831	0,1813	0,8209
	(0,9223)	(0,0899)	(0,1193)	(0,0710)	(0,0842)	(0,8358)	(0,1913)	(0,2439)	(0,1029)	(0,0952)
500	4,2366	0,8715	0,8936	0,2001	0,7978	4,3338	0,9219	0,9401	0,1871	0,8168
	(0,6533)	(0,0565)	(0,0607)	(0,0443)	(0,0436)	(0,5744)	(0,1259)	(0,1286)	(0,0673)	(0,0527)
1000	4,3357	0,8738	0,9035	0,2014	0,7987	4,2598	0,8871	0,9042	0,1912	0,8091
	(0,5063)	(0,0430)	(0,0461)	(0,0353)	(0,0363)	(0,4964)	(0,0988)	(0,0998)	(0,0542)	(0,0453)

Табела 4.2: Оцене добијене применом метода условне максималне веродостојности и метода условних најмањих квадрата, за различите стварне вредности параметара μ, α, β, p и q.

а) $\mu = 4,5$; $\alpha = 2,1$; $\beta = 1,8$; $p = 0,5$ и $q = 0,45$

n	$\widehat{\mu}_{CML}$	$\widehat{\alpha}_{CML}$	$\widehat{\beta}_{CML}$	$\widehat{p}_{CML}$	$\widehat{q}_{CML}$	$\widehat{\mu}_{CLS}$	$\widehat{\alpha}_{CLS}$	$\widehat{\beta}_{CLS}$	$\widehat{p}_{CLS}$	$\widehat{q}_{CLS}$
100	4,4996	2,4761	1,7742	0,4667	0,4402	4,4442	2,4941	1,9936	0,4791	0,4310
	(0,5684)	(2,4616)	(0,4203)	(0,2960)	(0,1658)	(0,5647)	(1,5727)	(0,8908)	(0,2267)	(0,1863)
200	4,4571	2,1553	1,8040	0,4815	0,4539	4,4169	2,2747	1,8755	0,4829	0,4580
	(0,3941)	(0,4239)	(0,2784)	(0,1116)	(0,1113)	(0,4201)	(0,8261)	(0,5075)	(0,1400)	(0,1405)
500	4,4652	2,1688	1,7931	0,4932	0,4447	4,4591	2,2495	1,8693	0,4890	0,4413
	(0,2628)	(0,2531)	(0,1870)	(0,0770)	(0,0606)	(0,2718)	(0,4731)	(0,4049)	(0,1007)	(0,0789)
1000	4,4897	2,1181	1,7821	0,4985	0,4447	4,4812	2,1665	1,8481	0,5009	0,4468
	(0,1896)	(0,1716)	(0,1214)	(0,0518)	(0,0427)	(0,1933)	(0,4572)	(0,2955)	(0,0637)	(0,0544)

б) $\mu = 4,5$, $\alpha = 2,1$, $\beta = 1,8$, $p = 0,8$ и $q = 0,8$

n	$\widehat{\mu}_{CML}$	$\widehat{\alpha}_{CML}$	$\widehat{\beta}_{CML}$	$\widehat{p}_{CML}$	$\widehat{q}_{CML}$	$\widehat{\mu}_{CLS}$	$\widehat{\alpha}_{CLS}$	$\widehat{\beta}_{CLS}$	$\widehat{p}_{CLS}$	$\widehat{q}_{CLS}$
100	4,5029	2,4827	1,9255	0,8315	0,8263	4,4384	2,5995	1,9798	0,7932	0,8302
	(0,5730)	(1,5224)	(0,5522)	(0,3626)	(0,1724)	(0,6241)	(1,3790)	(0,8661)	(0,2682)	(0,1716)
200	4,5446	2,1574	1,8366	0,8000	0,8092	4,5187	2,2823	1,8568	0,7951	0,8054
	(0,3942)	(0,4297)	(0,3281)	(0,1210)	(0,1198)	(0,4174)	(0,9266)	(0,5257)	(0,1528)	(0,1309)
500	4,5190	2,1191	1,8161	0,8001	0,7940	4,5052	2,1812	1,7950	0,8042	0,7944
	(0,2191)	(0,2317)	(0,1847)	(0,0718)	(0,0731)	(0,2316)	(0,4667)	(0,3361)	(0,0961)	(0,0849)
1000	4,4831	2,1257	1,7998	0,8017	0,7964	4,4845	2,1687	1,7742	0,7981	0,7977
	(0,1868)	(0,2001)	(0,1101)	(0,0575)	(0,0472)	(0,1910)	(0,2785)	(0,2298)	(0,0683)	(0,0584)

в) $\mu = 4,5$, $\alpha = 2,1$, $\beta = 1,8$, $p = 0,2$ и $q = 0,2$

n	$\widehat{\mu}_{CML}$	$\widehat{\alpha}_{CML}$	$\widehat{\beta}_{CML}$	$\widehat{p}_{CML}$	$\widehat{q}_{CML}$	$\widehat{\mu}_{CLS}$	$\widehat{\alpha}_{CLS}$	$\widehat{\beta}_{CLS}$	$\widehat{p}_{CLS}$	$\widehat{q}_{CLS}$
100	4,4162	2,3442	1,9733	0,1165	0,1348	4,3782	4,0544	2,2307	0,0887	0,1541
	(0,5817)	(0,7397)	(0,7115)	(0,3145)	(0,2240)	(0,6160)	(13,0328)	(1,1650)	(0,4058)	(0,2280)
200	4,4541	2,1571	1,8844	0,1839	0,1704	4,4241	2,2944	1,9559	0,1830	0,1826
	(0,3818)	(0,3699)	(0,359)	(0,1369)	(0,1192)	(0,3992)	(0,8274)	(0,5578)	(0,1443)	(0,1327)
500	4,4650	2,1251	1,8528	0,1926	0,1832	4,4511	2,1930	1,8898	0,1925	0,1786
	(0,2509)	(0,2433)	(0,1996)	(0,0744)	(0,0683)	(0,2512)	(0,6626)	(0,3519)	(0,1028)	(0,0892)
1000	4,4661	2,1104	1,8073	0,1985	0,1919	4,4520	2,1099	1,8114	0,2014	0,1909
	(0,1734)	(0,1675)	(0,1364)	(0,0510)	(0,0446)	(0,1815)	(0,3015)	(0,2443)	(0,0642)	(0,0601)

г) $\mu = 4,5$, $\alpha = 2,1$, $\beta = 1,8$, $p = 0,2$ и $q = 0,8$

n	$\widehat{\mu}_{CML}$	$\widehat{\alpha}_{CML}$	$\widehat{\beta}_{CML}$	$\widehat{p}_{CML}$	$\widehat{q}_{CML}$	$\widehat{\mu}_{CLS}$	$\widehat{\alpha}_{CLS}$	$\widehat{\beta}_{CLS}$	$\widehat{p}_{CLS}$	$\widehat{q}_{CLS}$
100	4,5110	2,3653	2,1221	0,1300	0,8724	4,4855	2,6287	2,1809	0,1526	0,8535
	(0,5351)	(1,2689)	(2,3449)	(0,3245)	(0,3543)	(0,5443)	(2,2505)	(1,3486)	(0,3311)	(0,1757)
200	4,4930	2,1528	1,8693	0,1771	0,8235	4,4814	2,3608	1,9918	0,1624	0,8249
	(0,3597)	(0,4400)	(0,3150)	(0,1179)	(0,0929)	(0,3653)	(0,8732)	(0,6896)	(0,1517)	(0,1220)
500	4,5338	2,1111	1,8377	0,2065	0,8051	4,5189	2,1825	1,8799	0,1974	0,8151
	(0,2429)	(0,2868)	(0,1798)	(0,0697)	(0,0509)	(0,2498)	(0,6240)	(0,3055)	(0,1056)	(0,0651)
1000	4,5038	2,0928	1,8090	0,2030	0,7995	4,4915	2,1375	1,7957	0,2030	0,8010
	(0,1714)	(0,1456)	(0,1221)	(0,0424)	(0,0395)	(0,1758)	(0,3465)	(0,2418)	(0,0595)	(0,0484)

Табела 4.3: Оцене добијене применом метода условне максималне веродостојности и метода условних најмањих квадрата, за различите стварне вредности параметара μ, α, β, p и q.

n	$\widehat{\mu}_{CML}$	$\widehat{\alpha}_{CML}$	$\widehat{\beta}_{CML}$	$\widehat{p}_{CML}$	$\widehat{q}_{CML}$	$\widehat{\mu}_{CLS}$	$\widehat{\alpha}_{CLS}$	$\widehat{\beta}_{CLS}$	$\widehat{p}_{CLS}$	$\widehat{q}_{CLS}$
а) $\mu = 2$; $\alpha = 0,7$; $\beta = 0,68$; $p = 0,5$ и $q = 0,45$										
100	2,0003	0,7934	0,7884	0,4964	0,4663	2,0198	0,8539	0,8451	0,4652	0,4576
	(0,3877)	(0,2322)	(0,2165)	(0,1455)	(0,1401)	(0,6067)	(0,4222)	(0,4065)	(0,1692)	(0,1862)
200	2,0485	0,7342	0,7318	0,4937	0,4538	1,9755	0,7897	0,7677	0,4616	0,4450
	(0,3016)	(0,0888)	(0,0973)	(0,0860)	(0,1047)	(0,2942)	(0,2471)	(0,2155)	(0,1110)	(0,1330)
500	2,0262	0,7138	0,7092	0,4945	0,4463	1,9735	0,7521	0,7295	0,4792	0,4407
	(0,2005)	(0,0502)	(0,0523)	(0,0661)	(0,0612)	(0,1770)	(0,1390)	(0,1363)	(0,0770)	(0,0809)
1000	2,0472	0,7141	0,6918	0,4921	0,4475	2,002	0,7381	0,7077	0,4834	0,4428
	(0,1826)	(0,0421)	(0,0286)	(0,0425)	(0,0450)	(0,1241)	(0,1028)	(0,0958)	(0,0572)	(0,0580)
б) $\mu = 2$, $\alpha = 0,7$, $\beta = 0,68$, $p = 0,8$ и $q = 0,8$										
n	$\widehat{\mu}_{CML}$	$\widehat{\alpha}_{CML}$	$\widehat{\beta}_{CML}$	$\widehat{p}_{CML}$	$\widehat{q}_{CML}$	$\widehat{\mu}_{CLS}$	$\widehat{\alpha}_{CLS}$	$\widehat{\beta}_{CLS}$	$\widehat{p}_{CLS}$	$\widehat{q}_{CLS}$
100	1,9332	0,8231	0,7881	0,8666	0,8620	1,9916	0,9406	0,8139	0,8473	0,8630
	(0,4046)	(0,4771)	(0,2216)	(0,3173)	(0,1756)	(0,6364)	(0,6750)	(0,4729)	(0,1980)	(0,1843)
200	1,9369	0,7190	0,7185	0,8131	0,8260	1,8888	0,8152	0,6758	0,8201	0,8270
	(0,3182)	(0,1039)	(0,0879)	(0,0983)	(0,1028)	(0,3395)	(0,2687)	(0,2154)	(0,1264)	(0,1081)
500	1,9766	0,7112	0,6939	0,8051	0,8195	1,9691	0,7611	0,6740	0,8063	0,8171
	(0,1682)	(0,0514)	(0,0475)	(0,0650)	(0,0530)	(0,1928)	(0,1317)	(0,1237)	(0,0791)	(0,0685)
1000	2,0000	0,7077	0,6913	0,8006	0,8133	1,9861	0,7277	0,6897	0,8055	0,8113
	(0,1457)	(0,0407)	(0,0310)	(0,0448)	(0,0435)	(0,1310)	(0,0858)	(0,0808)	(0,0541)	(0,0518)
в) $\mu = 2$, $\alpha = 0,7$, $\beta = 0,68$, $p = 0,2$ и $q = 0,2$										
n	$\widehat{\mu}_{CML}$	$\widehat{\alpha}_{CML}$	$\widehat{\beta}_{CML}$	$\widehat{p}_{CML}$	$\widehat{q}_{CML}$	$\widehat{\mu}_{CLS}$	$\widehat{\alpha}_{CLS}$	$\widehat{\beta}_{CLS}$	$\widehat{p}_{CLS}$	$\widehat{q}_{CLS}$
00	2,1466	0,8217	0,7746	0,1609	0,1480	2,0915	0,8062	0,8448	0,1509	0,1410
	(0,4583)	(0,2288)	(0,1953)	(0,2245)	(0,1497)	(1,1920)	(0,3865)	(0,4333)	(0,1818)	(0,1754)
200	2,1729	0,7687	0,7307	0,2036	0,1863	1,9843	0,7778	0,7651	0,1788	0,1823
	(0,3858)	(0,1316)	(0,0678)	(0,1176)	(0,0899)	(0,3156)	(0,2454)	(0,1964)	(0,1308)	(0,1232)
500	2,1510	0,7323	0,7151	0,2060	0,1925	2,0001	0,7318	0,7249	0,1904	0,1929
	(0,2747)	(0,0630)	(0,0484)	(0,0617)	(0,0550)	(0,1798)	(0,1334)	(0,1223)	(0,0661)	(0,0746)
1000	2,1130	0,7206	0,7017	0,2012	0,1946	2,0057	0,7296	0,7056	0,1908	0,1962
	(0,2218)	(0,0374)	(0,0360)	(0,0435)	(0,0406)	(0,1364)	(0,1021)	(0,0930)	(0,0474)	(0,0550)
г) $\mu = 2$, $\alpha = 0,7$, $\beta = 0,68$, $p = 0,2$ и $q = 0,8$										
n	$\widehat{\mu}_{CML}$	$\widehat{\alpha}_{CML}$	$\widehat{\beta}_{CML}$	$\widehat{p}_{CML}$	$\widehat{q}_{CML}$	$\widehat{\mu}_{CLS}$	$\widehat{\alpha}_{CLS}$	$\widehat{\beta}_{CLS}$	$\widehat{p}_{CLS}$	$\widehat{q}_{CLS}$
100	1,9683	0,8303	0,7661	0,1515	0,8177	1,9604	0,9286	0,8789	0,1361	0,8069
	(0,3906)	(0,2367)	(0,1806)	(0,1456)	(0,1395)	(0,5372)	(0,4762)	(0,4113)	(0,1295)	(0,1613)
200	1,9990	0,7731	0,7326	0,1770	0,8091	1,9322	0,8108	0,7813	0,1685	0,8067
	(0,3115)	(0,1256)	(0,1011)	(0,0792)	(0,0820)	(0,3424)	(0,2530)	(0,2477)	(0,0969)	(0,1006)
500	2,0299	0,7262	0,7040	0,1941	0,8036	1,9691	0,7389	0,7170	0,1885	0,8062
	(0,2123)	(0,0726)	(0,0479)	(0,0490)	(0,0468)	(0,1887)	(0,1400)	(0,1198)	(0,0679)	(0,0684)
1000	2,0742	0,7150	0,7003	0,2005	0,8035	1,9966	0,7293	0,7110	0,1963	0,8069
	(0,1886)	(0,0423)	(0,0298)	(0,0383)	(0,0323)	(0,1437)	(0,0948)	(0,0902)	(0,0487)	(0,0441)

Табела 4.4: Оцене добијене применом метода условне максималне веродостојности и метода условних најмањих квадрата, за различите стварне вредности параметара μ, α, β, p и q.

а) $\mu = 2; \alpha = 1,55; \beta = 1,45; p = 0,5$ и $q = 0,45$										
n	$\widehat{\mu}_{CML}$	$\widehat{\alpha}_{CML}$	$\widehat{\beta}_{CML}$	$\widehat{p}_{CML}$	$\widehat{q}_{CML}$	$\widehat{\mu}_{CLS}$	$\widehat{\alpha}_{CLS}$	$\widehat{\beta}_{CLS}$	$\widehat{p}_{CLS}$	$\widehat{q}_{CLS}$
100	2,0036	1,8048	2,1343	0,4593	0,4925	1,9798	2,1395	2,4074	0,4349	0,4901
	(0,2329)	(0,9395)	(3,9253)	(0,2604)	(0,2665)	(0,2295)	(1,7311)	(3,6484)	(0,2695)	(0,3036)
200	1,9794	1,6669	1,7035	0,5046	0,4516	1,9624	1,6913	1,9148	0,4819	0,4545
	(0,1669)	(0,6425)	(0,8250)	(0,1662)	(0,1325)	(0,1679)	(0,8421)	(1,1688)	(0,1799)	(0,1705)
500	1,9965	1,5562	1,5432	0,5106	0,4543	1,9894	1,5701	1,5562	0,5008	0,4508
	(0,0947)	(0,2843)	(0,2633)	(0,0847)	(0,0782)	(0,0980)	(0,4263)	(0,3763)	(0,0933)	(0,0891)
1000	2,0008	1,5512	1,5086	0,5094	0,4496	1,9968	1,5778	1,5216	0,5008	0,4487
	(0,0707)	(0,2074)	(0,1738)	(0,0569)	(0,0566)	(0,0735)	(0,3220)	(0,2701)	(0,0678)	(0,0695)
б) $\mu = 2, \alpha = 1,55, \beta = 1,45, p = 0,8$ и $q = 0,8$										
n	$\widehat{\mu}_{CML}$	$\widehat{\alpha}_{CML}$	$\widehat{\beta}_{CML}$	$\widehat{p}_{CML}$	$\widehat{q}_{CML}$	$\widehat{\mu}_{CLS}$	$\widehat{\alpha}_{CLS}$	$\widehat{\beta}_{CLS}$	$\widehat{p}_{CLS}$	$\widehat{q}_{CLS}$
100	2,0137	1,8566	2,0294	0,8529	0,8343	1,9769	2,2310	1,8214	0,8688	0,8242
	(0,2803)	(0,8454)	(2,8367)	(0,2927)	(0,3542)	(0,2943)	(1,5556)	(1,4830)	(0,3441)	(0,2721)
200	2,0080	1,6468	1,5407	0,8263	0,7963	1,9897	1,8065	1,5569	0,8370	0,7971
	(0,1837)	(0,5127)	(0,4542)	(0,1689)	(0,1457)	(0,1823)	(0,7773)	(0,5996)	(0,1900)	(0,1402)
500	2,0208	1,5577	1,5183	0,7988	0,8000	2,0081	1,6342	1,5256	0,8047	0,8055
	(0,1101)	(0,2547)	(0,2695)	(0,0754)	(0,0745)	(0,1137)	(0,4160)	(0,4202)	(0,0946)	(0,0914)
1000	2,0137	1,5402	1,4729	0,7921	0,7990	2,0071	1,5826	1,4885	0,7925	0,8026
	(0,0729)	(0,1729)	(0,1732)	(0,0585)	(0,0591)	(0,0731)	(0,3057)	(0,2912)	(0,0789)	(0,0726)
в) $\mu = 2, \alpha = 1,55, \beta = 1,45, p = 0,2$ и $q = 0,2$										
n	$\widehat{\mu}_{CML}$	$\widehat{\alpha}_{CML}$	$\widehat{\beta}_{CML}$	$\widehat{p}_{CML}$	$\widehat{q}_{CML}$	$\widehat{\mu}_{CLS}$	$\widehat{\alpha}_{CLS}$	$\widehat{\beta}_{CLS}$	$\widehat{p}_{CLS}$	$\widehat{q}_{CLS}$
100	1,9537	1,8928	1,8643	0,1663	0,1556	1,9436	2,6808	2,105	0,0971	0,1601
	(0,2893)	(1,1360)	(1,0949)	(0,2924)	(0,3006)	(0,3099)	(6,4100)	(1,4172)	(0,8390)	(0,2459)
200	1,9699	1,7271	1,5233	0,1635	0,2049	1,9577	1,7824	1,7669	0,1634	0,1922
	(0,2084)	(0,7133)	(0,4296)	(0,2354)	(0,1379)	(0,2136)	(0,9255)	(0,8487)	(0,1882)	(0,1511)
500	1,9811	1,5331	1,4719	0,2036	0,1955	1,9780	1,5514	1,5566	0,2023	0,1892
	(0,1210)	(0,2627)	(0,2542)	(0,0836)	(0,0779)	(0,1259)	(0,3705)	(0,4238)	(0,0891)	(0,0912)
1000	1,9903	1,5402	1,4679	0,1994	0,1918	1,9886	1,5582	1,5060	0,2007	0,1856
	(0,0776)	(0,1808)	(0,1896)	(0,0653)	(0,0645)	(0,0790)	(0,2708)	(0,2491)	(0,0694)	(0,0755)
г) $\mu = 2, \alpha = 1,55, \beta = 1,45, p = 0,2$ и $q = 0,8$										
n	$\widehat{\mu}_{CML}$	$\widehat{\alpha}_{CML}$	$\widehat{\beta}_{CML}$	$\widehat{p}_{CML}$	$\widehat{q}_{CML}$	$\widehat{\mu}_{CLS}$	$\widehat{\alpha}_{CLS}$	$\widehat{\beta}_{CLS}$	$\widehat{p}_{CLS}$	$\widehat{q}_{CLS}$
100	1,9981	9,9492	2,0570	0,6249	0,9482	1,9803	5,9522	1,9492	0,2329	0,8626
	(0,2321)	(70,9957)	(3,1647)	(8,6664)	(0,7300)	(0,2415)	(35,1240)	(1,9149)	(1,6462)	(0,3405)
200	1,9929	1,7254	1,5742	0,1635	0,8183	1,9875	1,7345	1,6515	0,1696	0,8233
	(0,1749)	(0,4795)	(0,4969)	(0,1589)	(0,1439)	(0,1861)	(0,6525)	(0,6447)	(0,1626)	(0,1557)
500	2,0003	1,6013	1,4826	0,1919	0,8048	1,9983	1,6562	1,4878	0,1858	0,7991
	(0,1123)	(0,2485)	(0,2557)	(0,0734)	(0,0885)	(0,1163)	(0,3998)	(0,3898)	(0,1093)	(0,1038)
1000	2,0057	1,5788	1,465	0,1951	0,8006	2,0045	1,6070	1,4653	0,1929	0,7985
	(0,0754)	(0,1975)	(0,1686)	(0,0557)	(0,0592)	(0,0797)	(0,2868)	(0,2652)	(0,0709)	(0,0676)

Глава 5

Закључак

У овој дисертацији су анализирани минификациони ауторегресивни временски низови са ненегативним целобројним вредностима. Конструисани модели базирани су на модификованом негативном биномном оператору, који је детаљно описан у првој и другој глави дисертације. Најпре је дат кратак развој биномног тининг оператора и негативног биномног тининг оператора, а затим су хронолошки дати најзначајнији резултати из области минификационих процеса. Прво су представљени једнодимензионални а потом и дводимензионални минификациони модели.

У другој глави је конструисан једнодимензионални минификациони целобројни ауторегресивни модел са геометријском маргиналном расподелом, који је скраћено назван min-INAR(1) модел. Мотивација за увођење овог модела био је проблем који може настати коришћењем биномног тининг оператора или негативног биномног тининг оператора, тј. могућности да се достигне константна вредност нула током времена. Приликом конструкције модела коришћен је модификовани негативни биномни оператор. Објашњена је карактеристика података који се могу представити овим моделом и дате су главне особине модела, као што су расподела иновационог низа, условне вероватноће, условно очекивање, условна дисперзија и корелациона структура. Оцене параметара модела су изведене методом условне максималне веродостојноти, методом момената и методом условних најмањих квадрата. Особине посматраних оцена и особине предвиђања за један корак унапред код конкурентних модела проверене су симулацијама.

На крају је дат илустративан пример и дискутовано је о примењивости и адекватности модела примењеног на реалним подацима. Резултати су упоређени са резултатима већ познатих, конкурентних модела.

Како се, у другој глави, за одређивање оцена непознатих параметара методом условне максималне веродостојности min-INAR(1) модела користио нумерички метод, у трећој глави је конструисан EM алгоритам и решен наведени проблем. Због сложености самог модела, најпре је конструисан еквивалентни облик min-INAR(1) модела и показано је да тај модел можемо користити приликом конструисања EM алгоритма. Затим су изведене оцене у аналитичком облику и њихове особине су проверене симулацијама.

По узору на min-INAR(1) модел, у четвртој глави је анализиран дводимензионални минификациони целобројни ауторегресивни модел првог реда са геометријском маргиналном расподелом. Модел је, такође, базиран на модификованом негативном биномном оператору. Дате су најбитније особине модела и непознати параметри су оцењени методом условне максималне веродостојности и методом условних најмањих квадрата. На крају су извршене симулације, на основу чијих резултата су испитане карактеристике оцена.

Показано је да је модел са геометријском маргиналном расподелом, анализиран у првој глави, дефинисан ако и само ако је $\alpha > \frac{\mu}{1+\mu}$. Са друге стране, NGINAR(1) модел је добро дефинисан за $\alpha \leq \frac{\mu}{1+\mu}$, те се ова два модела употпуњују. Стога би било занимљиво истражити могућу дуалност између ова два модела. Такође, било би интересантно и истражити модел коришћењем операције максимум и модификованог негативног биномног оператора.

Литература

Al-Osh,M.A., Alzaid, A.A. (1987), First-order integer-valued autoregressive (INAR(1)) process, *J. Time Ser. Anal.* **8**(3), 261–275.

Al-Osh, M.A., Aly, E.E. (1992), First order autoregressive time series with negative binomial and geometric marginals, *Commun. Statist. - Theory Meth.* **21**(9), 2483–2492.

Aleksić MS, Ristić MM. (2021), A geometric minification integer-valued autoregressive model, *Applied Mathematical Modelling.* **90**, 265-280.

Alzaid, A.A., Al-Osh, M.A., (1988), First–order integer–valued autoregressive (INAR (1)) process: distributional and regression properties, *Stat. Neerl.* **42**(1), 53–61.

Balakrishna, N., Jayakumar, K. (1997), Bivariate semi-Pareto distributions and processes, *Statistical Papers* **38**, 149–165.

Best, D.J., Rayner, J.C.W. (2003), Tests of Fit for the Geometric Distribution, *Commun. Stat. – Simul. Comput.* **32**:4, 1065–1078.

Brijs T, Karlis D, Wets G. (2007), Studying the effect oF weather conditions on daily crash counts, *Proceedings the 14th International Conference on Road Safety on Four Continents*, Bangkok, Thailand 14-16 November, 12 p.

Brijs T, Karlis D, Wets G. (2008), Studying the effect of weather conditions on daily crash counts using a discrete time-series model, *Accident Analysis & Prevention.* **40**(3), 1180-1190.

Dempster AP, Laird NM, Rubin DB. (1977), Maximum likelihood from incomplete data via the EM algorithm, *Journal of the Royal Statistical Society: Series B (Methodological).* **39**(1), 1-22.

Zeger, S.L. (1988), A regression model for time series of counts, *Biometrika.* **75**(4), pp.621-629.

Zhang, Q., Wang, D., Fan, X. (2020), A negative binomial thinning-based bivariate INAR(1) process, *Stat. Neerl.*, **74**(4), 517-537.

Kalamkar, V.A. (1995), Minification processes with discrete marginals, *J. Appl. Probab.* **32**(3), 692–706.

Karlis D, Xekalaki E. (2001), Maximum likelihood estimation for integer valued time series models, *Proceedings of the 5th Hellenic-European Conference on Computer Mathematics and its Applications*, Athens, Greece, EA Lypitakis (ed.), 778-783.

Khoo WC, Ong SH, Biswas A. (2017), Modeling time series of counts with a new class of INAR (1) model, *Statistical Papers.* **58**(2), 393-416.

Lewis, P.A., McKenzie, E.D. (1991), Minification processes and their transformations, *J. Appl. Probab.* **28**(1) , 45–57.

Littlejohn, R.P. (1992), Discrete minification processes and reversibility, *J. Appl. Probab.* **29**(1), 82–91.

Maiti, R. and Biswas, A. (2015), Coherent forecasting for over-dispersed time series of count data, *Brazilian Journal of Probability and Statistics.* **29**(4) pp.747-766.

McKenzie,E. (1985), Some simple models for discrete variate time series, *Water Resources Bull.* **21**(4), 645–650.

Ristić, M.M. (2006), Stationary bivariate minification processes, *Statistics & Probability Letters***76**, 439-445.

Ristić, M.M., Bakouch, H.S., Nastić, A.N. (2009), A new geometric first-order integer-valued autoregressive (NGINAR(1)) process, *J. Stat. Plan. Infer.* **139**(7), 2218–2226.

Ristić, M.M., Popović, B.V. (2019), A New Bivariate Binomial Time Series Model, Markov Process. *Relat.* **25**, 301–328.

Ristić, M.M., Nastić, A.S. (2012), A mixed INAR(p) model, *J. Time Ser. Anal.* **33.6**, 903–915.

Ristić, M.M., Popović, B.Č., Nastić, A.S., Đorđević, M. (2008), A bivariate Marshall and Olkin exponential minification process, *Filomat*, **22**(1), 69–77.

Scotto, M.G., Weiß, C.H., Möller, T.A., Gouveia, S. (2018), The max-INAR(1) model for count processes, *TEST* **27**(4), 850–870.

Sim, C.H. (1986), Simulation of Weibull and Gamma autoregressive stationary process, *Commun. Stat. – Simul. Comput.* **15**(4), 1141–1146.

Shiryaev, A.N. (1995), *Probability, Springer-Verlag*, New-York.

Steutel, F.W., van Harn, K. (1979), Discrete analogues of self-decomposability and stability, *Ann. Probab.* **7**(5), 893–899.

Stojanović, M.S. (2022) An EM algorithm for estimation of the parameters of the geometric minification INAR model, *Journal of Statistical Computation and Simulation* **92**(1), 1-15.

Stojanović, M.S. (2024) A bivariate geometric minification integer-valued autoregressive model, *Filomat*, прихваћен за објављивање

Tavares, L.V. (1980a), An exponential Markovian stationary process, *J. Appl. Probab.* **17**(4), 1117–1120.

Tavares, L.V. (1980b), A non-Gaussian Markovian model to simulate hydrologic processes, *J. Hydrol.* **46**(3–4), 281–287.

Thomas, A., Jose, K. K. (2004), Bivariate semi-Pareto minification processes, *Metrika* **59**, 305-313.

Thomas, A., Jose, K. K. (2002), Multivariate minification processes, *STARS Int J* **3**, 1–9.

Биографија

Милена С. Стојановић, рођена Алексић, рођена је 14. фебруара 1993. године у Нишу. Основну школу "Бубањски хероји" завршила је 2008. године у Нишу, као носилац "Вукове дипломе". Интересовање за математику показала је уписом у одељење "Обдарени ученици у математичкој гимназији", у Гимназији "Светозар Марковић" у Нишу, коју је завршила 2012. године са одличним успехом. Током школовања такмичила се из математике, физике и хемије.

Основне академске студије Математике уписала је 2012. године на Природно-математичком факултету у Нишу, које је завршила у року, 08.10.2015. године, са просечном оценом 9,88. Исте године уписала је мастер академске студије Математике, смер Вероватноћа, статистика и финансијска математика, и завршила их такође у року, 22.09.2017. године са просечном оценом 9,88. Мастер рад под називом "Бајесова коњугована анализа", одбранила је оценом 10, под менторством проф. др Мирослава Ристића и стекла звање мастер математичар. Докторске академске студије Математике уписала је 2017. године на Природно-математичком факултету у Нишу. Положила је све испите предвиђене планом и програмом студија, са просечном оценом 10,00.

Током школовања била је корисник неколико стипендија: Стипендије града Ниша (2008/2009), Стипендије за изузетно надарене ученике и студенте (2010/2011, 2011/2012, 2012/2013, 2013/2014, 2015/2016) и стипендије "Доситеја", (2014/2015, 2016/2017).

Бави се истраживањима у области математичке статистике и примене, са посебним интересовањем за анализу временских низова и моделе временских низова са целобројним вредностима.

Од априла 2018. године ангажована је на научно-истраживачком пројекту МПНТР ”Развој метода израчунавања и процесирања информација: теорија и примене” (ОИ 174013). Као асистент на Департману за математику, Природно-математичког факултета у Нишу запошљена је од октобра 2021. године .

На Природно-математичком факултету у Нишу изводи вежбе од школске 2016/2017. године. До сада је била ангажована на предметима: Математичка статистика, Статистички софтвер, Анализа временских низова, Теорија узорака и планирање експеримената, Статистичко моделирање, Регресиона анализа, Статистичка контрола квалитета (Департман за математику), Математичка статистика, Математика 1 (Департман за рачунарске науке) и Пословна статистика (Департман за географију).

Од школске 2019/20. године ангажована је у Гимназији ”Светозар Марковић” за извођење наставе из предмета Математика у IV разреду, у одељењу за ученике са посебним способностима за физику. Од школске 2019/2020. године изводи вежбе из предмета Теорија одлучивања на Мастер академским студијама Мастер 4.0, програма Универзитета у Нишу.

У току свог досадашњег научноистраживачког рада учествовала је на међународној конференцији и похађала је математичке курсеве DAAD пројекта. Аутор је или коаутор три научна рада у међународним часописима са импакт фактором.

Библиографија

Радови у међународним часописима изузетних вредности [M21a]:

1. **Aleksić M.S**, Ristić M.M. (2021), A geometric minification integer-valued autoregressive model, Applied Mathematical Modelling. **90**, 265-280. DOI: 10.1016/j.apm.2020.08.047

Радови у истакнутим међународним часописима [M22]:

1. **Stojanović, M.S.** (2022), An EM algorithm for estimation of the parameters of the geometric minification INAR model, Journal of Statistical Computation and Simulation **92**(1), 1-15.
DOI: 10.1080/00949655.2022.2053125

2. **Stojanović, M.S.** (2024), A bivariate geometric minification integer-valued autoregressive model, Filomat, прихваћен за објављивање

Радови у истакнутим националним часописима [M52]:

1. Popović, P.M., Ristić, M.M., **Stojanović, M.S.** (2024), A mixture integer-valued autoregressive model with a structural break, Facta Universitatis, Series: Mathematics and Informatics, Vol. **39**(1), 99-122.
DOI: 10.22190/FUMI230203007P

Саопштења са међународних скупова штампана у изводу [M34]:

1. Ristić, M.M., **Aleksić, M.S.**, An integer-valued autoregressive model with different states and a structural break, International conference "Algebra and Analysis with Application", Ohrid, Republic of Macedonia, July 1-4, 2018.

ИЗЈАВА О АУТОРСТВУ

Изјављујем да је докторска дисертација, под насловом

Геометријски минификациони временски низови генерисани модификованим негативним биномним оператором

која је одбрањена на Природно-математичком факултету Универзитета у Нишу:

- резултат сопственог истраживачког рада;
- да ову дисертацију, ни у целини, нити у деловима, нисам пријављивао/ла на другим факултетима, нити универзитетима;
- да нисам повредио/ла ауторска права, нити злоупотребио/ла интелектуалну својину других лица.

Дозвољавам да се објаве моји лични подаци, који су у вези са ауторством и добијањем академског звања доктора наука, као што су име и презиме, година и место рођења и датум одбране рада, и то у каталогу Библиотеке, Дигиталном репозиторијуму Универзитета у Нишу, као и у публикацијама Универзитета у Нишу.

У Нишу, 15.04.2024.

Потпис аутора дисертације:

Милена Стојановић

Милена С. Стојановић

ИЗЈАВА О ИСТОВЕТНОСТИ ЕЛЕКТРОНСКОГ И ШТАМПАНОГ ОБЛИКА ДОКТОРСКЕ ДИСЕРТАЦИЈЕ

Наслов дисертације:

Геометријски минификациони временски низови генерисани модификованим негативним биномним оператором

Изјављујем да је електронски облик моје докторске дисертације, коју сам предао/ла за уношење у **Дигитални репозиторијум Универзитета у Нишу,** истоветан штампаном облику.

У Нишу, 15.04.2024.

Потпис аутора дисертације:

Милена Стојановић

Милена С. Стојановић

ИЗЈАВА О КОРИШЋЕЊУ

Овлашћујем Универзитетску библиотеку „Никола Тесла“ да у Дигитални репозиторијум Универзитета у Нишу унесе моју докторску дисертацију, под насловом:

Геометријски минификациони временски низови генерисани модификованим негативним биномним оператором

Дисертацију са свим прилозима предао/ла сам у електронском облику, погодном за трајно архивирање.

Моју докторску дисертацију, унету у Дигитални репозиторијум Универзитета у Нишу, могу користити сви који поштују одредбе садржане у одабраном типу лиценце Креативне заједнице (Creative Commons), за коју сам се одлучио/ла.

1. Ауторство **(CC BY)**
2. Ауторство – некомерцијално **(CC BY-NC)**
3. **Ауторство – некомерцијално – без прераде (CC BY-NC-ND)**
4. Ауторство – некомерцијално – делити под истим условима **(CC BY-NC-SA)**
5. Ауторство – без прераде **(CC BY-ND)**
6. Ауторство – делити под истим условима **(CC BY-SA)**

У Нишу, 15.04.2024.

Потпис аутора дисертације:

Милена Стојановић

Милена С. Стојановић