УНИВЕРЗИТЕТ У НИШУ
ПРИРОДНО-МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ У НИШУ

Мирослав Д. Максимовић

КОНЕКСИЈЕ СА ТОРЗИЈОМ У РИМАНОВИМ МНОГОСТРУКОСТИМА И УОПШТЕЊА

ДОКТОРСКА ДИСЕРТАЦИЈА

Ниш, 2025.

UNIVERSITY OF NIŠ
FACULTY OF SCIENCES AND MATHEMATICS

Miroslav D. Maksimović

CONNECTIONS WITH TORSION ON RIEMANNIAN MANIFOLDS AND GENERALIZATIONS

DOCTORAL DISSERTATION

Niš, 2025.

Подаци о докторској дисертацији

Ментор: Др Милан Златановић, редовни професор,
Универзитет у Нишу, Природно-математички факултет у Нишу

Наслов: Конексије са торзијом у Римановим многострукостима и уопштења

Резиме:

Дисертација се бави конексијама са торзијом на разним многострукостима. Проучавају се полу-симетричне конексије, четрт-симетричне конексије и Ајзенхартова конексија.

Неке полу-симетричне метричке конексије су најпре проучаване у псеудо-Римановим многострукостима, а затим су примењене на Лоренцове многострукости, на GRW простор-време и на теорију релативности.

Четврт-симетрична метричка конексија је проучавана у генералисаним Римановим многострукостима, а затим су у Келеровим и ко-Келеровим многострукостима одређене неке релације за холоморфно пројективни тензор кривине и за Вејлов пројективни тензор кривине. Уведена је и нова четврт-симетрична неметричка конексија.

Проширени су резултати за ЕТ-конформна и ЕТ-конциркуларна пресликавања генералисаних Риманових многострукости, а уведена су и ЕТ-конхармонијска пресликавања, при чему су одређени њихови инваријантни геометријски објекти.

Научна област: Математичке науке

Научна дисциплина: Диференцијална геометрија

Кључне речи: Тензор торзије, полу-симетрична конексија, четврт-симетрична конексија, псеудо-Риманове многострукости, генералисане Риманове многострукости, Келерове многострукости, ко-Келерове многострукости, Ајнштајнове многострукости, квази-Ајнштајнове многострукости, Лоренцове многострукости, идеалан флуид, конформна пресликавања, конциркуларна пресликавања, конхармонијска пресликавања, пројективна пресликавања, инваријантни геометријски објекти, тензори кривине

УДК: 514.763.4/.5 + 514.764.2/.4(043.3)

CERIF класификација: P150 Геометрија, алгебарска топологија

Data on Doctoral Dissertation

Doctoral Supervisor: Milan Zlatanović, PhD, full professor,
University of Niš, Faculty of Sciences and Mathematics

Title: Connections with torsion on Riemannian manifolds and generalizations

Abstract: The thesis deals with connections with torsion on different manifolds. Semi-symmetric connections, quarter-symmetric connections and Eisenhart connection are studied.
Some semi-symmetric metric connections are investigated on pseudo-Riemannian manifolds and then applied to Lorentzian manifolds and to the theory of relativity.
A quarter-symmetric metric connection is studied on generalized Riemannian manifolds, and some relations for the holomorphically projective curvature tensor and the Weyl projective curvature tensor are established in Kähler and co-Kähler manifolds. A new quarter-symmetric non-metric connection is also introduced.
Results for ET-conformal and ET-concircular mappings of generalized Riemannian manifolds with Eisenhart connection are expanded. ET-conharmonic mappings are introduced and their invariant geometric objects are found.

Scientific Field: Mathematics

Scientific Discipline: Differential geometry

Key Words: Torsion tensor, semi-symmetric connection, quarter-symmetric connection, pseudo-Riemannian manifolds, generalized Riemannian manifolds, Kähler manifolds, co-Kähler manifolds, Einstein manifolds, quasi-Einstein manifolds, Lorentzian manifolds, perfect fluid space-time, conformal mappings, concircular mappings, conharmonic mappings, projective mappings, invariant geometric objects, curvature tensors

UDC: 514.763.4/.5 + 514.764.2/.4(043.3)

CERIF Classification: P150 Geometry, algebraic topology

Прилог 4/1

ПРИРОДНО - МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ
НИШ

КЉУЧНА ДОКУМЕНТАЦИЈСКА ИНФОРМАЦИЈА

Редни број, **РБР**:	
Идентификациони број, **ИБР**:	
Тип документације, **ТД**:	монографска
Тип записа, **ТЗ**:	текстуални
Врста рада, **ВР**:	докторска дисертација
Аутор, **АУ**:	Мирослав Д. Максимовић
Ментор, **МН**:	Милан Љ. Златановић
Наслов рада, **НР**:	Конексије са торзијом у Римановим многострукостима и уопштења
Језик публикације, **ЈП**:	српски
Језик извода, **ЈИ**:	енглески
Земља публиковања, **ЗП**:	Србија
Уже географско подручје, **УГП**:	Србија
Година, **ГО**:	2025.
Издавач, **ИЗ**:	ауторски репринт
Место и адреса, **МА**:	Ниш, Вишеградска 33.
Физички опис рада, **ФО**: (поглавља/страна/ цитата/табела/слика/графика/прилога)	4/123/144/1/1/0/0
Научна област, **НО**:	математика
Научна дисциплина, **НД**:	диференцијална геометрија
Предметна одредница/Кључне речи, **ПО**:	Тензор торзије, полу-симетрична конексија, четврт-симетрична конексија, псеудо-Риманове многострукости, генералисане Риманове многострукости, Келерове многострукости, ко-Келерове многострукости, Ајнштајнове многострукости, квази-Ајнштајнове многострукости, Лоренцове многострукости, идеалан флуид, конформна пресликавања, концикуларна пресликавања, конхармонијска пресликавања, пројективна пресликавања, инваријантни геометријски објекти, тензори кривине
УДК	514.763.4/.5 + 514.764.2/.4(043.3)
Чува се, **ЧУ**:	библиотека
Важна напомена, **ВН**:	

Извод, **ИЗ**:

Дисертација се бави конексијама са торзијом на разним многострукостима. Проучавају се полу-симетричне конексије, четрт-симетричне конексије и Ајзенхартова конексија.

Неке полу-симетричне метричке конексије су најпре проучаване у псеудо-Римановим многострукостима, а затим су примењене на Лоренцове многострукости, на GRW простор-време и на теорију релативности.

Четврт-симетрична метричка конексија је проучавана у генералисаним Римановим многострукостима, а затим су у Келеровим и ко-Келеровим многострукостима одређене неке релације за холоморфно пројективни тензор кривине и за Вејлов пројективни тензор кривине. Уведена је и нова четврт-симетрична неметричка конексија.

Проширени су резултати за ЕТ-конформна и ЕТ-конциркуларна пресликавања генералисаних Риманових многострукости, а уведена су и ЕТ-конхармонијска пресликавања, при чему су одређени њихови инваријантни геометријски објекти.

Датум прихватања теме, **ДП**: 27.5.2024.

Датум одбране, **ДО**:

Чланови комисије, **КО**:

	Председник:	
	Члан:	
	Члан, ментор:	
	Члан:	
	Члан:	

ПРИРОДНО - МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ
НИШ

KEY WORDS DOCUMENTATION

Accession number, **ANO**:	
Identification number, **INO**:	
Document type, **DT**:	monograph
Type of record, **TR**:	textual
Contents code, **CC**:	doctoral dissertation
Author, **AU**:	Miroslav D. Maksimović
Mentor, **MN**:	Milan Lj. Zlatanović
Title, **TI**:	Connections with torsion on Riemannian manifolds and generalizations
Language of text, **LT**:	Serbian
Language of abstract, **LA**:	English
Country of publication, **CP**:	Serbia
Locality of publication, **LP**:	Serbia
Publication year, **PY**:	2025.
Publisher, **PB**:	author's reprint
Publication place, **PP**:	Niš, Višegradska 33.
Physical description, **PD**: (chapters/pages/ref./tables/pictures/graphs/appendixes)	4/123/144/1/1/0/0
Scientific field, **SF**:	mathematics
Scientific discipline, **SD**:	differential geometry
Subject/Key words, **S/KW**:	Torsion tensor, semi-symmetric connection, quarter-symmetric connection, pseudo-Riemannian manifolds, generalized Riemannian manifolds, Kähler manifolds, co-Kähler manifolds, Einstein manifolds, quasi-Einstein manifolds, Lorentzian manifolds, perfect fluid space-time, conformal mappings, concircular mappings, conharmonic mappings, projective mappings, invariant geometric objects, curvature tensors
UC	514.763.4/.5 + 514.764.2/.4(043.3)
Holding data, **HD**:	library
Note, **N**:	

Abstract, **AB**:		The thesis deals with connections with torsion on different manifolds. Semi-symmetric connections, quarter-symmetric connections and Eisenhart connection are studied. Some semi-symmetric metric connections are investigated on pseudo-Riemannian manifolds and then applied to Lorentzian manifolds and to the theory of relativity. A quarter-symmetric metric connection is studied on generalized Riemannian manifolds, and some relations for the holomorphically projective curvature tensor and the Weyl projective curvature tensor are established in Kähler and co-Kähler manifolds. A new quarter-symmetric non-metric connection is also introduced. Results for ET-conformal and ET-concircular mappings of generalized Riemannian manifolds with Eisenhart connection are expanded. ET-conharmonic mappings are introduced and their invariant geometric objects are found.
Accepted by the Scientific Board on, **ASB**:		27.5.2024.
Defended on, **DE**:		
Defended Board, **DB**:	President:	
	Member:	
	Member, Mentor:	
	Member:	
	Member:	

Садржај

Увод

Линеарна конексија је један од фундаменталних објеката у диференцијалној геометрији јер служи за диференцирање и паралелизам на многострукостима, као и за дефинисање тензора кривине који мере закривљење многострукости. Постоје разне поделе линеарних конексија, а једна од основних је на симетричне (или конексије без торзије) и на несиметричне (или конексије са торзијом). Тензор торзије описује начин на који се конексија разликује од симетричне конексије, као и понашање вектора при паралелном померању у закривљеним многострукостима. У теорији релативности торзија служи за описивање унутрашњег угаоног момента.

На свакој диференцијабилној многострукости се може дефинисати линеарна конексија, а у радовима [4, 39] су разматрана питања о броју конексија на различитим многострукостима. Међутим, на Римановој многострукости постоји јединствена симетрична конексија компатибилна са метриком, која се назива Леви-Чивита. У проучавању конексија са торзијом и неметричких конексија без торзије, често се полази од Леви-Чивита конексије.

А. Ајнштајн је 1916. год. објавио рад [40] о Општој теорији релативности, који је утицао на уопштавање Риманових многострукости. Наиме, најпре је Х. Вејл 1918. ослабио услов метричности конексије [128], тако што је посматрао линеарну конексију чији коваријантни извод метричког тензора није једнак нули. Затим је Е. Картан увео тензор торзије 1922. год. [9] и проучавао га у теорији релативности [10]. На овај начин је заправо предложио модификацију Ајнштајнове опште теорије релативности, која шездесетих година прошлог века добија име Ајнштајн-Картанова теорија. Ова теорија повезује торзију са унутрашњим угаоним моментом (тј. спином) материје.

Две године након увођења тензора торзије, у раду [104] је одређен општи облик конексије са торзијом, а у раду [43] је дефинисана полу-симетрична конексија преко специјалног облика тензора торзије. Касније је дефинисана и четврт-симетрична конексија [46], као и многе друге конексије.

Са циљем стварања Јединствене теорије поља која би обухватила гравитационо и електромагнетно поље, Ајнштајн је у својим радовима прво почео да користи комплексан основни метрички тензор, чији је реални део симетричан, а имагинарни анти-симетричан, а затим је користио реалан несиметрични основни метрички тензор. Након тога, Л. П. Ајзенхарт је дефинисао генералисане Риманове многострукости преко несиметричног основног тензора и, аналогно Кристофеловим симболима у Римановим многострукостима, увео је генералисане Кристофелове симболе [41]. Овим многострукостима су се бавили многи српски математичари: С. Минчић, М. Станковић, Љ. Велимировић, М. Златановић, М. Најдановић, Н. Весић, М. Петровић, В. Миленковић и А. Велимировић.

С. Иванов и М. Златановић су доказали да је конексија у генералисаној Римановој многострукости у потпуности одређена тензором торзије и коваријантним изводом симетричног дела основног тензора [55]. Посебно су проучавали конексију са тотално анти-симетричним тензором торзије и са Ајнштајновим метричким условом.

У односу на несиметричну линеарну конексију је могуће посматрати четири врсте коваријантног диференцирања, што је омогућило више комбинација за идентитете Ричијевог типа [71, 125], у којима учествују и одговарајући тензори кривине, који се могу представити помоћу шест линеарно независних тензора кривине. У овом раду ћемо користити две групе линеарно независних тензора кривине, и то: у другој и трећој глави ћемо радити са групом коју је одредио С. Минчић у [71], а у четвртој глави са групом коју је одредио М. Златановић у [141].

Од српских математичара, академик М. Првановић је прва почела да се бави конексијама са торзијом у различитим многострукостима и њене идеје из радова [90, 91, 93–95] биле су мотивација за неке резултате у овој дисертацији. Наиме, она је елиминацијом генератора разних конексија формирала тензоре који су једнаки са неким већ познатим тензорима у односу на Леви-Чивита конексију. Следећи ову идеју, овде смо елиминацијом генератора полу-симетричне конексије и генератора четврт-симетричне метричке конексије из једначина за све линеарно независне тензоре кривине одредили интересантне резултате. Овим проблемом се бавима и Н. Пушић у радовима [99–102].

Дисертација је подељена на четири дела. У првој глави смо навели основне појмове диференцијалне геометрије и основну терминологију коју ћемо користити. Осим рада [65] који је споменут у првој глави, оригинални резултати су представљени у оквиру друге, треће и четврте главе, од којих су неки публиковани у радовима [63, 64, 66, 67, 142–144], док је део резултата из друге и четврте главе још необјављен.

У другој глави смо проучавали полу-симетричне конексије. Кренули смо од познате полу-симетричне метричке конексије у псеудо-Римановој многострукости и навели смо једначине линеарно независних тензора кривине. Ако је генератор ове конексије конциркуларан у Јановом смислу, онда се она назива конциркуларна полу-симетрична метричка конексија [111] и показали смо да је она општија од полу-симетричне метричке P-конексије. Вејлов пројективни тензор кривине и конциркуларни тензор кривине се не мењају када са Леви-Чивита конексије прелазимо на конциркуларну полу-симетричну метричку конексију.

Полазећи од псеудо-Риманове многострукости са конциркуларном полу-симетричном метричком конексијом, одредили смо нове услове да ова многострукост буде Ајнштајнова или квази-Ајнштајнова, чиме се отворио пут за даљу примену ових резултата. У последњих неколико година је врло атрактивна примена полу-симетричне конексије на Лоренцове многострукости и на њихове специјалне случајеве, као што су генералисано Робертсон-Вокерово (*GRW*) простор-време и идеалан флуид. Након што је 2014. год. *GRW* простор-време окарактерисано помоћу конциркуларног вектора (у Фиалковом смислу) [21], а затим 2017. помоћу торзо-формирајућег вектора [69], било је природно да на Лоренцове многострукости применимо конциркуларну полу-симетричну метричку конексију, јер је генератор ове конексије специјалан случај торзо-формирајућег вектора. На тај начин смо показали да су Лоренцове многострукости снабдевене конциркуларном полу-симетричном метричком конексијом чији је генератор јединични временски вектор заправо *GRW* простор-време, а поменута конексија постаје полу-симетрична метричка P-конексија. Мотивисани чињеницом да три тензора кривине, као и одговарајући Ричијеви тензори, не могу бити једнаки нули, проучавали смо разне симетрије у *GRW* простор-времену са полу-симетричном метричком P-конексијом. Испитали смо примену ове конексије на теорију релативности и утврдили да је нарушен јак услов енергије и да једначина стања представља фантомску баријеру.

У наставку смо дефинисали специјалну полу-симетричну метричку конексију, чији је генератор паралелан у односу на Леви-Чивита конексију. Показали смо да ова конексија не мења конформни тензор кривине, а конхармонијски тензор кривине се не мења ако и само ако је генератор те конексије изотропни вектор. Посматрали смо Ричијев солитон у односу на ову конексију и утврдили смо да је он стабилан и да представља квази-Ајнштајнову многострукост. У циљу примене претходних резултата на теорију релативности, даље смо проучавали идеалан флуид са претходно поменутом конексијом који задовољава Ајнштајнову једначину без космолошке константе. У четвородимензионалном идеалном флуиду једначина стања је једнака $-\frac{1}{3}$, што представља граничну вредност за нарушавање јаког услова енергије, тј. граничну вредност за тамну енергију.

Бавили смо се и пројективном полу-симетричном конексијом у Римановој многострукости, односно полу-симетричном конексијом која има исте геодезијске линије као и Леви-Чивита конексија. На основу једначина линеарно независних тензора кривине смо конструисали тензоре који не зависе од генератора пројективне полу-симетричне конексије и показали смо да су они у свим случајевима једнаки са Вејловим пројективним тензором кривине.

Трећа глава је посвећена четврт-симетричним конексијама у генералисаној Римановој многострукости и њеним примерима. Прво смо проучавали четврт-симетричну конексију која чува основни тензор те многострукости и чији тензор торзије садржи (1,1)-тензор A који је придружен анти-симетричном делу основног тензора. Одредили смо једначину овакве конексије и показали смо да је тензор A паралелан и у односу на Леви-Чивита конексију, што је врло користан резултат за примену на генералисане Риманове многострукости. Ове резултате смо применили на скоро Хермитске многострукости, које са четврт-симетричном метричком A-конексијом постају Келерове. У овим многострукостима смо посматрали особине линеарно независних тензора кривине у зависности од услова хибридности тензора $\overset{g}{\nabla}\pi$ и $\pi \otimes \pi$, где је π генератор посматране конексије. Са друге стране, помоћу тензора који не зависе од генератора π смо формирали идентитете за Вејлов пројективни тензор кривине и за холоморфно пројективни тензор кривине у Келеровој многострукости.

Применом четврт-симетричне метричке A-конексије на скоро контактне метричке многострукости добили смо ко-Келерове многострукости, где смо проучавали три тензора кривине која су увек различита од нуле, а такви су и њихови одговарајући Ричијеви тензори. Доказали смо да је ко-Келерова многострукост пројективно равна ако и само ако је она равна. Полазећи од претходно поменута три тензора кривине, пронашли смо тензоре који су коинцидентни са Вејловим пројективним тензором, чиме смо одредили нове услове да ко-Келерова многострукост са посматраном конексијом буде пројективно равна.

У оквиру ове главе смо дефинисали нову четврт-симетричну неметричку конексију на генералисаној Римановој многострукости, која има исти тензор торзије као и претходна четврт-симетрична конексија. Ова неметричка конексија има исте геодезијске линије као и Леви-Чивита конексија. Доказали смо егзистенцију ове конексије, одредили смо неке особине њеног генератора и особине линеарно независних тензора кривине.

Последња глава се бави генералисаним Римановим многострукостима са Ајзенхартовом конексијом. Конформна пресликавања ових многострукости су већ била предмет проучавања у многим радовима, а овде смо проучавали конформна пресликавања која чувају тензор торзије. Најпре смо коришћењем ЕТ-конформних тензора кривине, који су инваријантни за ЕТ-конформно пресликавање, одредили декомпозицију линеарно независних тензора кривине. У тој декомпозицији смо добили тензоре кривине Ајнштајновог типа. Испитали смо особине ових тензора и њихову улогу при ЕТ-конформном и ЕТ-конциркуларном пресликавању.

Конформно пресликавање у општем случају не чува хармоничност функције, а исто то важи и за ЕТ-конформно пресликавање генералисаних Риманових многострукости са Ајзенхартовом конексијом. Због тога смо дефинисали ЕТ-конхармонијска пресликавања као ЕТ-конформна пресликавања која чувају хармоничност функције и одредили смо инваријантне геометријске објекте за таква пресликавања.

У закључку смо укратко изложили најзначајније резултате ове дисертације и представили смернице за будућа истраживања.

***

Докторска дисертација која је пред вама није само неколико написаних радова спојених у једну целину. То је део живота. За мене лично, у том делу живота подршка најближих је била од огромног значаја и захвалан сам свима који су ми на било који начин помогли. Захвалност дугујем најпре својој породици на подршци током читавог живота, на стрпљењу и љубави. Хвала свим професорима и асистентима Одсека за математику на Природно-математичком факултету, Универзитета у Приштини са привременим седиштем у Косовској Митровици, који су ми пренели потребно знање за наставак школовања на докторским студијама и тиме допринели стварању моје математичке мисли. Осталим колегама са тог факултета се захваљујем што су ме својим искуством и саветима бодрили током читавих докторских студија.

Ова докторска дисертација је урађена под менторством проф. др Милана Златановића, коме се захваљујем на свим коментарима током писања дисертације, као и на смерницама и идејама које су долазиле у правом тренутку и на основу којих су проистекли радови за ову дисертацију.

Прве речи о научним истраживањима диференцијалне геометрије сам чуо од др Марије Најдановић, којој дугујем неизмерну захвалност за сваки савет и мотивацију током читавих докторских студија. Наши заједнички радови о бесконачно малим савијањима нису део ове дисертације, али су ме они научили посвећеношћу свакој формули и теореми.

Хвала проф. др Љубици Велимировић и проф. др Мићи Станковићу за све корисне савете током докторских студија, који су ми значили при писању радова. Захваљујем се др Милошу Петровићу, др Ненаду Весићу и др Владислави Миленковић, јер су кроз дисертацију уткани и савети које су ми они дали током наших дискусија.

Хвала и свима онима чије су ме речи мотивисале да истражујем, да се бавим науком и да не одустајем.

***

Глава 1

Основни појмови

Ова глава је уводног карактера, где смо навели основне појмове из диференцијалне геометрије, које ћемо користити у раду са задатом темом. Такође, наводимо нотацију и терминологију коју ћемо користити кроз цео рад.

1.1 Диференцијабилне многострукости

Појам диференцијабилне многострукости се уводи са циљем уопштавања кривих, површи и Еуклидског простора. За дефинисање многострукости су потребни одређени алгебарски и тополошки појмови, за које ћемо сматрати да су већ усвојени.

Нека је $\mathcal{M}^n$ произвољан скуп чије елементе ћемо звати *тачкама* и нека за сваку тачку $p \in \mathcal{M}^n$ постоји подскуп $\mathcal{U}_p, p \in \mathcal{U}_p \subset \mathcal{M}^n$, који се по закону φ бијективно и непрекидно пресликава на отворен подскуп Еуклидског простора $\mathbb{E}^n$.

Подскуп $\mathcal{U}_p$ је *околина тачке* $p = p(x^1, \dots, x^n) = p(x)$, а уређен пар $(\mathcal{U}_p, \varphi)$ *локална карта*. x^i, $i = 1, \dots, n$, су координате тачке p. Под извесним условима, за које се претпоставља да су испуњени, скуп $\mathcal{M}^n$ је могуће прекрити околинама. Ако је $(\mathcal{U}'_p, \varphi')$ друга локална карта у околини тачке p, при чему се претпоставља да у $\mathbb{E}^n$ постоји пресликавање

$$\lambda : \varphi(\mathcal{U}_p \cap \mathcal{U}'_p) \to \varphi'(\mathcal{U}_p \cap \mathcal{U}'_p),$$

тада важи

$$\lambda : \varphi(p) \to \varphi'(p) \quad \text{тј.} \quad \lambda : (x^1, \dots, x^n) \to (x^{1'}, \dots, x^{n'}).$$

Претходном пресликавању одговара *трансформација локалних координата*

$$x^{i'} = x^{i'}(x^1, \dots, x^n), \quad i' = 1', \dots, n'. \tag{1.1.1}$$

Под претпоставком да је пресликавање λ бијекција, инверзном пресликавању λ^{-1} одговара закон трансформације координата

$$x^i = x^i(x^{1'}, \dots, x^{n'}), \quad i = 1, \dots, n. \tag{1.1.2}$$

Дефиниција 1.1.1 Скуп $\mathcal{M}^n$, заједно са скупом $\{(\mathcal{U}_p, \varphi)\}$ локалних карата, се зове *диференцијабилна многострукост*, при чему функције (1.1.1) и (1.1.2) за трансформацију локалних координата имају непрекидне парцијалне изводе сваког реда и

$$\mathcal{J} = \frac{\partial(x^1, \dots, x^n)}{\partial(x^{1'}, \dots, x^{n'})} \neq 0. \tag{1.1.3}$$

Број n је димензија многострукости $\mathcal{M}^n$.

Надаље ћемо многострукост обележавати само са $\mathcal{M}$, подразумевајући да је димензије n.

1.2 Тангентни простор и тангентна векторска поља

Нека је $\mathcal{F}(\mathcal{M})$ скуп свих диференцијабилних реалних функција дефинисаних на многострукости $\mathcal{M}$.

Дефиниција 1.2.1 *Тангентни вектор* диференцијабилне многострукости $\mathcal{M}$, у тачки p те многострукости, је свако пресликавање

$$X_p : \mathcal{F}(\mathcal{M}) \to \mathbb{R},$$

које задовољава услове

$$\begin{aligned} X_p(\alpha f + \beta h) &= \alpha X_p(f) + \beta X_p(h), (\text{линеарност}),\\ X_p(fh) &= X_p(f)h(p) + f(p)X_p(h), (\text{диференцирање}), \end{aligned}$$

где је $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $f, h \in \mathcal{F}(\mathcal{M})$. Тачка p је *почетак* вектора X_p.

Дефиниција 1.2.2 Векторски простор чији су елементи сви тангентни вектори са почетком у тачки $p \in \mathcal{M}$ назива се *тангентни простор многострукости* $\mathcal{M}$ и означава се са $\mathcal{T}_p(\mathcal{M})$.

Дефиниција 1.2.3 Пресликавање

$$X : \mathcal{M} \to \mathcal{TM},$$

где је $\mathcal{TM} = \big\{X_p |\ p \in \mathcal{M}, X_p \in \mathcal{T}_p(\mathcal{M})\big\}$, назива се *(тангентно) векторско поље* на многострукости $\mathcal{M}$.

Дефиниција 1.2.4 Векторско поље X многострукости $\mathcal{M}$ је диференцијабилно ако је функција $Xf = h$ диференцијабилна, за свако $f \in \mathcal{F}(\mathcal{M})$.

Скуп свих диференцијабилних векторских поља на многострукости $\mathcal{M}$ ћемо означавати са $\mathfrak{X}(\mathcal{M})$.

База $(\partial_i) = (\partial/\partial x^i)$ простора $\mathcal{T}_p(\mathcal{M})$ је *координатна база.* Произвољан вектор X, у овој бази се може представити једначином $X = X^i\partial_i$, где су X^i компоненте вектора X у односу на базу (∂_i), при чему се у том представљању користи Ајнштајнова конвенција о сумирању.

Диференцијали $(\mathrm{d}x^i)$ координатних функција у тачки p чине базу *дуалног* (*котангентног*) простора $\mathcal{T}^*_p(\mathcal{M})$, при чему важи

$$\frac{\partial}{\partial x^j}(\mathrm{d}x^i) = \delta^i_j = \begin{cases} 1, & i = j,\\ 0, & i \neq j, \end{cases}$$

где је δ^i_j *Кронекеров симбол.*

У наставку наводимо дефиницију специјалног векторског поља које ћемо користити у даљем раду.

Дефиниција 1.2.5 Векторско поље $[X, Y]$ дефинисано једначином

$$[X, Y] = XY - YX,$$

назива се *комутатор* или *Лиова заграда* векторских поља X и Y, а означава се и са $\mathcal{L}_XY$.

Особине комутатора ћемо представити у наредном тврђењу.

Теорема 1.2.1 *Ако је $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $f, h \in \mathcal{F}(\mathcal{M})$ и $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})$, тада важи*

1. *Анти-симетричност:*

$$[X, Y] = -[Y, X];$$

2. *$\mathbb{R}$-билинеарност:*

$$[\alpha X + \beta Y, Z] = \alpha[X, Z] + \beta[Y, Z],$$
$$[X, \alpha Y + \beta Z] = \alpha[X, Y] + \beta[X, Z];$$

3. *Јакобијев идентитет:*

$$[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0;$$

4. *Лајбницово правило:*

$$[fX, hY] = fh[X, Y] + f(Xh)Y - h(Yf)X.$$

Такође, видимо да важи и $[X, X] = 0$. Ако за два вектора X и Y важи $[X, Y] = 0$, тада кажемо да они *комутирају*. Приметимо да два базна векторска поља ∂_i и ∂_j комутирају, тј. да важи $[\partial_i, \partial_j] = 0$, за свако $i, j = 1, \ldots, n$.

1.3 Тензори

Тензор типа (r, s) је пресликавање

$$t^r_s : \underbrace{\mathcal{T}^*_p(\mathcal{M}) \times \ldots \times \mathcal{T}^*_p(\mathcal{M})}_{r \text{ пута}} \times \underbrace{\mathcal{T}_p(\mathcal{M}) \times \ldots \times \mathcal{T}_p(\mathcal{M})}_{s \text{ пута}} \to \mathbb{R},$$

које је линеарно по сваком аргументу, где су простори $\mathcal{T}_p(\mathcal{M})$ и $\mathcal{T}^*_p(\mathcal{M})$ генерисани базама (∂_i) и $(\mathrm{d}x^i)$.

Тензори типа $(r, 0)$, за $r > 0$, се називају *контраваријантни*, а типа $(0, s)$, за $s > 0$, *коваријантни*. Специјално, тензори типа $(1, 0)$ су *контраваријантни вектори* (или, кратко, *вектори*), а тензори типа $(0, 1)$ су *коваријантни вектори* (кратко, *ковектори*) или 1-*форме*. Потпуно анти-симетрични тензори типа $(0, s)$ називају се s-*форме*. Скалари су тензори типа $(0, 0)$. За $r, s > 0$, тензори типа (r, s) се називају *мешовити*.

Сабирање или одузимање тензора се врши само између тензора истог типа и то на следећи начин

$$\begin{aligned}&(A \pm B)(X^1, X^2, \ldots, X^r, Y_1, Y_2, \ldots, Y_s) =\\ &A(X^1, X^2, \ldots, X^r, Y_1, Y_2, \ldots, Y_s) \pm B(X^1, X^2, \ldots, X^r, Y_1, Y_2, \ldots, Y_s),\end{aligned}$$

док је множење тензора реалним бројем α представљено следећом једначином

$$(\alpha A)(X^1, X^2, \ldots, X^r, Y_1, Y_2, \ldots, Y_s) = \alpha A(X^1, X^2, \ldots, X^r, Y_1, Y_2, \ldots, Y_s).$$

Са друге стране, могу се множити било која два тензора. Ако је A тензор типа (r, s), а B тензор типа (p, q), тада је *тензорски производ* $A \otimes B$ тензор типа $(r + p, s + q)$ дефинисан једначином

$$\begin{aligned}&(A \otimes B)(X^1, X^2, \ldots, X^{r+p}, Y_1, Y_2, \ldots, Y_{s+q}) =\\ &A(X^1, X^2, \ldots, X^r, Y_1, Y_2, \ldots, Y_s)B(X^{r+1}, X^{r+2}, \ldots, X^{r+p}, Y_{s+1}, Y_{s+2}, \ldots, Y_{s+q}).\end{aligned}$$

Специјално, ако је један од фактора скалар, тј. функција f, тада имамо $f \otimes A = A \otimes f = fA$, а иначе тензорски производ није комутативна операција у општем случају.

1.4 Афина конексија и простори афине конексије

И поред тога што су тангентни простори међусобно изоморфни, не постоји правило којим се повезују вектори тангентних простора различитих и блиских тачака, односно правило којим се упоређују вредности вектора у различитим тачкама многострукости. Овакво правило се додатно дефинише и назива се *конексија* или *повезаност.*

Дефиниција 1.4.1 *Афина* (или *линеарна*) *конексија* на многострукости $\mathcal{M}$ је пресликавање ∇ које пару (X, Y) векторских поља придружује векторско поље $\nabla_X Y$, тј.

$$\nabla : (X, Y) \to \nabla_X Y,$$

тако да важи:

1) $\nabla_X(\alpha Y_1 + \beta Y_2) = \alpha \nabla_X Y_1 + \beta \nabla_X Y_2,$
2) $\nabla_X(fY) = (Xf) \cdot Y + f \nabla_X Y,$
3) $\nabla_{fX_1 + hX_2} Y = f \nabla_{X_1} Y + h \nabla_{X_2} Y,$

где су $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, а $f, h \in \mathcal{F}(\mathcal{M})$.

Векторско поље $\nabla_{\partial_k} \partial_j$, у локалним координатама $(x^1 \dots, x^n)$, по базним векторима ∂_i можемо разложити на следећи начин

$$\nabla_{\partial_k} \partial_j = L^{\alpha}_{jk} \partial_{\alpha},$$

где су L^i_{jk} *коефицијенти афине конексије* ∇, који од тачке до тачке описују начин промене базних вектора. Применом претходне једначине на функције x^i добија се да је

$$(\nabla_{\partial_k} \partial_j)(x^i) = L^{\alpha}_{jk} \frac{\partial x^i}{\partial x^{\alpha}} = L^{\alpha}_{jk} \delta^i_{\alpha} = L^i_{jk}.$$

Свака многострукост допушта линеарну конексију и постоји бесконачно много конексија.

Дефиниција 1.4.2 Диференцијабилна многострукост $\mathcal{M}$ на којој је дефинисана афина конексија ∇ назива се *простор афине конексије.*

Интуитивно, линеарна конексија је диференцирање векторских поља на многострукости, а назива се и *коваријанти извод.*

Дефиниција 1.4.3 Коваријантни извод тензора A, типа (r, s), у правцу вектора Z је дефинисан једначином

$$\begin{aligned}(\nabla_Z A)(X^1, \dots, X^r, Y_1, \dots, Y_s) = &\nabla_Z A(X^1, \dots, X^r, Y_1, \dots, Y_s)\\ &+ \sum_{i=1}^{r} A(X^1, \dots, X^{i-1}, \nabla_Z X^i, X^{i+1}, \dots, X^r, Y_1, \dots, Y_s)\\ &- \sum_{j=1}^{s} A(X^1, \dots, X^r, Y_1, \dots, Y_{j-1}, \nabla_Z Y_j, Y_{j+1}, \dots, Y_s).\end{aligned}$$

У индексном запису, коваријантни извод је дат једначином

$$\nabla_k A^{i_1 \dots i_r}_{j_1 \dots j_s} = \partial_k A^{i_1 \dots i_r}_{j_1 \dots j_s} + \sum_{\alpha=1}^{r} A^{i_1 \dots i_{\alpha-1} p i_{\alpha+1} \dots i_r}_{j_1 \dots j_s} L^{i_\alpha}_{pk} - \sum_{\alpha=1}^{s} A^{i_1 \dots i_r}_{j_1 \dots j_{\alpha-1} p j_{\alpha+1} \dots j_s} L^{p}_{j_\alpha k}.$$

Ако за неки тензор A важи $\nabla A = 0$, тада кажемо да је он *коваријантно константан* или *паралелан*[1] у односу на конексију ∇.

---

[1] Често се каже и да конексија ∇ „чува“ тензор A. Међутим, термин „чува“ се користи и у смислу инваријантности геометријских објеката при неким трансформацијама, што ће бити наглашено на одговарајућем месту.

Помоћу линеарне конексије се може увести појам геодезијских линија, које представљају значајне геометријске објекте на многострукости, јер је најкраћи пут између две тачке геодезијска линија.

Дефиниција 1.4.4 Крива $\gamma : I \to \mathcal{M}$ је *геодезијска* ако је $\nabla_{\dot{\gamma}}\dot{\gamma} = 0$ дуж криве γ, где је $\dot{\gamma}$ њен тангентни вектор и $I \subset \mathbb{R}$.

Поред коваријантног извода, имамо и *Лиов извод* који се за тензор A типа $(0, s)$ у правцу вектора Z дефинише следећом једначином

$$(\mathcal{L}_Z A)(Y_1, \ldots, Y_s) = ZA(Y_1, \ldots, Y_s) - \sum_{j=1}^{s} A(Y_1, \ldots, Y_{j-1}, \mathcal{L}_Z Y_j, Y_{j+1}, , \ldots, Y_s),$$

при чему је $\mathcal{L}_X Y = [X, Y]$.

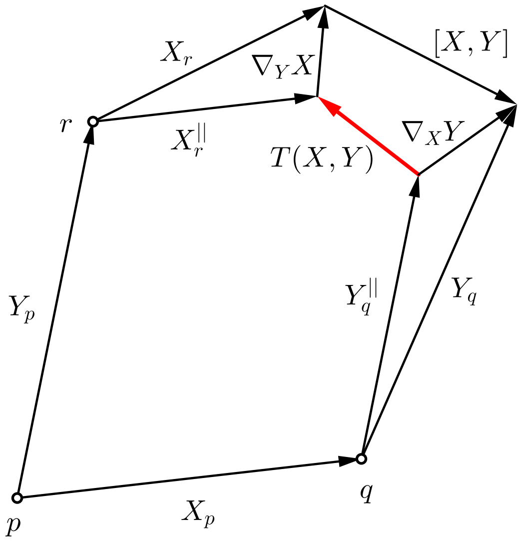
1.5 Тензор торзије

Конексије се могу класификовати према разним особинама, а једна од основних подела је на симетричне и несиметричне. С тим у вези, на основу конексије ∇ дефинише се геометријски објекат

$$T(X, Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y],$$

који се назива *тензор торзије* конексије ∇, где је $[\cdot, \cdot]$ комутатор. Ако је тензор торзије једнак нули, конексија је *симетрична* (или *без торзије*), а ако је $T(X, Y) \neq 0$, конексија је *несиметрична* (или *са торзијом*)[2].

Графички приказ геометријске интерпретације тензора торзије дајемо према раду [52]: Нека су дата два вектора X и Y, са почетком у тачки p (Слика 1.1). Најпре паралелно преносимо вектор X дуж вектора Y до тачке r, а затим паралелно преносимо и вектор Y дуж вектора X, до тачке q. Тако ови вектори постају $X_r^{||}$ и $Y_q^{||}$. Ако они не образују паралелограм, тада се јавља тзв. „*неуспешно затварање*“ паралелограма, односно конексија има торзију (видети и стр. 127. у [105]). Напомињемо да су тачке q и r бесконачно близу тачки p. Дакле, неформално говорећи, помоћу торзије се врши „затварање“ бесконачно малог „паралелограма“.



Слика 1.1: Геометријска интерпретација тензора торзије.

---

[2] У складу са овим и са Дефиницијом 1.4.2, имамо *просторе симетричне* и *просторе несиметричне афине конексије.*

Из практичних разлога, за означавање несиметричне конексије ћемо користити[3] $\overset{1}{\nabla}$, чији се тензор торзије записује у облику

$$\overset{1}{T}(X,Y)=\overset{1}{\nabla}_XY-\overset{1}{\nabla}_YX-[X,Y].$$

Конексију $\overset{2}{\nabla}$ дефинисану једначином [92]

$$\overset{2}{\nabla}_XY=\overset{1}{\nabla}_YX+[X,Y],$$

ћемо звати *дуална конексија*[4] конексије $\overset{1}{\nabla}$. На основу претходне две једначине, релација између конексије $\overset{1}{\nabla}$ и $\overset{2}{\nabla}$ се може изразити преко тензора торзије на следећи начин

$$\overset{2}{\nabla}_XY=\overset{1}{\nabla}_XY-\overset{1}{T}(X,Y). \tag{1.5.1}$$

Јасно је да је дуална конексија конексије $\overset{2}{\nabla}$ заправо полазна конексија $\overset{1}{\nabla}$, као и да важи

$$\begin{aligned}\overset{1}{T}(X,Y)&=\overset{1}{\nabla}_XY-\overset{1}{\nabla}_YX-[X,Y]\\&=-(\overset{2}{\nabla}_XY-\overset{2}{\nabla}_YX-[X,Y])=-\overset{2}{T}(X,Y),\end{aligned}$$

где смо са $\overset{2}{T}$ означили тензор торзије дуалне конексије $\overset{2}{\nabla}$.

Помоћу конексије $\overset{1}{\nabla}$ и њене дуалне конексије $\overset{2}{\nabla}$, може се дефинисати симетрична конексија $\overset{0}{\nabla}$ следећом једначином

$$\overset{0}{\nabla}_XY=\frac{1}{2}(\overset{1}{\nabla}_XY+\overset{2}{\nabla}_XY).$$

У складу са једначином (1.5.1), симетрична конексија $\overset{0}{\nabla}$ се може изразити појединачно преко конексија $\overset{1}{\nabla}$ и $\overset{2}{\nabla}$ и тензора торзије, следећим једначинама

$$\overset{0}{\nabla}_XY=\overset{1}{\nabla}_XY-\frac{1}{2}\overset{1}{T}(X,Y),\quad \overset{0}{\nabla}_XY=\overset{2}{\nabla}_XY+\frac{1}{2}\overset{1}{T}(X,Y). \tag{1.5.2}$$

Напоменимо то да конексији $\overset{1}{\nabla}$ са торзијом $\overset{1}{T}$ одговарају исте геодезијске линије као и њеној симетричној конексији $\overset{0}{\nabla}$, дефинисаном претходном једначином.

Напомена 1.5.1 *У многобројној литератури за назив дуална (или коњугована) конексија се користи другачија дефиниција, као што је нпр. у раду* [6]*, где се каже да су две конексије* ∇ *и* ∇^* *дуалне ако задовољавају једначину*

$$Xg(Y,Z)=g(\nabla_XY,Z)+g(Y,\nabla^*_XZ).$$

1.6 Тензори кривине

Линеарна конексија има веома важну улогу, јер се на основу ње конструишу фундаментални геометријски објекти. Један од њих је тензор кривине. Тензори кривине линеарних конексија $\overset{\theta}{\nabla}$, $\theta=0,1,2$, су дефинисани следећим једначинама

$$\overset{\theta}{R}(X,Y)Z=\overset{\theta}{\nabla}_X\overset{\theta}{\nabla}_YZ-\overset{\theta}{\nabla}_Y\overset{\theta}{\nabla}_XZ-\overset{\theta}{\nabla}_{[X,Y]}Z,\ \theta=0,1,2. \tag{1.6.1}$$

---

[3] Једино у последњој глави ћемо користити ∇, јер тамо не радимо са њеном дуалном конексијом.

[4] У литератури се за конексије $\overset{1}{\nabla}$ и $\overset{2}{\nabla}$ користе и ознаке ∇^+ и ∇^- [54].

У односу на несиметричну конексију се могу посматрати четири врсте коваријантног диференцирања [71], које су за (1,1)-тензор A^i_j дефинисане следећим једначинама

$$\begin{aligned}
\overset{1}{\nabla}_k A^i_j &= A^i_{j\underset{1}{|}k} = \partial_k A^i_j + A^p_j L^i_{pk} - A^i_p L^p_{jk},\\
\overset{2}{\nabla}_k A^i_j &= A^i_{j\underset{2}{|}k} = \partial_k A^i_j + A^p_j L^i_{kp} - A^i_p L^p_{kj},\\
\overset{3}{\nabla}_k A^i_j &= A^i_{j\underset{3}{|}k} = \partial_k A^i_j + A^p_j L^i_{pk} - A^i_p L^p_{kj},\\
\overset{4}{\nabla}_k A^i_j &= A^i_{j\underset{4}{|}k} = \partial_k A^i_j + A^p_j L^i_{kp} - A^i_p L^p_{jk}.
\end{aligned}$$

На основу претходних једначина, за (0,2)-тензор A_{ij} и за (2,0)-тензор A^{ij} важи

$$\begin{aligned}
\overset{1}{\nabla}_k A_{ij} &= \overset{4}{\nabla}_k A_{ij}, \quad \overset{2}{\nabla}_k A_{ij} = \overset{3}{\nabla}_k A_{ij},\\
\overset{1}{\nabla}_k A^{ij} &= \overset{3}{\nabla}_k A^{ij}, \quad \overset{2}{\nabla}_k A^{ij} = \overset{4}{\nabla}_k A^{ij}.
\end{aligned}$$

Специјално, Кронекеров симбол δ^i_j је коваријантно константан у односу на прву и другу врсту коваријантног диференцирања, а трећа и четврта врста коваријантног извода Кронекеровог симбола су једнаке тензору торзије [74]. Комбинацијом коваријантних диференцирања од прве до четврте врсте, могу се дефинисати одговарајући Ричијеви индентитети, а на основу њих се добијају нови тензори кривине, који се могу представити помоћу одговарајуће базе линеарно независних тензора кривине [71]. Наиме, претходна три тензора кривине $\overset{0}{R}$, $\overset{1}{R}$ и $\overset{2}{R}$, заједно са тензорима $\overset{3}{R}$, $\overset{4}{R}$ и $\overset{5}{R}$ формирају базу[5] линеарно независних тензора кривине [72], где је

$$\begin{aligned}
\overset{3}{R}(X,Y)Z &= \overset{2}{\nabla}_X \overset{1}{\nabla}_Y Z - \overset{1}{\nabla}_Y \overset{2}{\nabla}_X Z + \overset{2}{\nabla}_{\overset{1}{\nabla}_Y X} Z - \overset{1}{\nabla}_{\overset{2}{\nabla}_X Y} Z,\\
\overset{4}{R}(X,Y)Z &= \overset{2}{\nabla}_X \overset{1}{\nabla}_Y Z - \overset{1}{\nabla}_Y \overset{2}{\nabla}_X Z + \overset{2}{\nabla}_{\overset{2}{\nabla}_Y X} Z - \overset{1}{\nabla}_{\overset{1}{\nabla}_X Y} Z,\\
\overset{5}{R}(X,Y)Z &= \frac{1}{2}(\overset{1}{\nabla}_X \overset{1}{\nabla}_Y Z - \overset{2}{\nabla}_Y \overset{1}{\nabla}_X Z + \overset{2}{\nabla}_X \overset{2}{\nabla}_Y Z - \overset{1}{\nabla}_Y \overset{2}{\nabla}_X Z - \overset{1}{\nabla}_{[X,Y]} Z - \overset{2}{\nabla}_{[X,Y]} Z).
\end{aligned}$$

Пошто ћемо при проучавању конексија са торзијом, најпре одредити тензор кривине $\overset{1}{R}$, за одређивање осталих линеарно независних тензора кривине, лакше је користити релације између тензора $\overset{1}{R}$, $\overset{\theta}{R}$, $\theta = 0,2,3,4,5$, и тензора торзије $\overset{1}{T}$, које су одређење у раду [87]

$$\overset{0}{R}(X,Y)Z = \overset{1}{R}(X,Y)Z - \frac{1}{2}(\overset{1}{\nabla}_X \overset{1}{T})(Y,Z) + \frac{1}{2}(\overset{1}{\nabla}_Y \overset{1}{T})(X,Z) - \frac{1}{4}\underset{XYZ}{\mathfrak{S}} \overset{1}{T}(\overset{1}{T}(X,Y),Z) - \frac{1}{4}\overset{1}{T}(\overset{1}{T}(X,Y),Z), \tag{1.6.2}$$

$$\overset{2}{R}(X,Y)Z = \overset{1}{R}(X,Y)Z - (\overset{1}{\nabla}_X \overset{1}{T})(Y,Z) + (\overset{1}{\nabla}_Y \overset{1}{T})(X,Z) - \underset{XYZ}{\mathfrak{S}} \overset{1}{T}(\overset{1}{T}(X,Y),Z), \tag{1.6.3}$$

$$\overset{3}{R}(X,Y)Z = \overset{1}{R}(X,Y)Z + (\overset{1}{\nabla}_Y \overset{1}{T})(X,Z), \tag{1.6.4}$$

$$\overset{4}{R}(X,Y)Z = \overset{1}{R}(X,Y)Z + (\overset{1}{\nabla}_Y \overset{1}{T})(X,Z) - \overset{1}{T}(\overset{1}{T}(X,Y),Z), \tag{1.6.5}$$

$$\overset{5}{R}(X,Y)Z = \overset{1}{R}(X,Y)Z - \frac{1}{2}(\overset{1}{\nabla}_X \overset{1}{T})(Y,Z) + \frac{1}{2}(\overset{1}{\nabla}_Y \overset{1}{T})(X,Z) - \frac{1}{2}\underset{XYZ}{\mathfrak{S}} \overset{1}{T}(\overset{1}{T}(X,Y),Z) + \frac{1}{2}\overset{1}{T}(\overset{1}{T}(Z,X),Y), \tag{1.6.6}$$

где је $\underset{XYZ}{\mathfrak{S}}$ ознака за циклично сумирање по векторима X, Y и Z, односно

$$\underset{XYZ}{\mathfrak{S}} \overset{1}{T}(\overset{1}{T}(X,Y),Z) = \overset{1}{T}(\overset{1}{T}(X,Y),Z) + \overset{1}{T}(\overset{1}{T}(Y,Z),X) + \overset{1}{T}(\overset{1}{T}(Z,X),Y).$$

---

[5] У другој и трећој глави се користи ова база, а у последњој глави ће бити коришћена база линеарно независних тензора кривине из рада [141].

Особине анти-симетричности и цикличне симетричности ових тензора су представљене наредним једначинама

$$\begin{aligned}
&\overset{0}{R}(X,Y)Z = -\overset{0}{R}(Y,X)Z, && \underset{XYZ}{\mathfrak{S}}\overset{0}{R}(X,Y)Z = 0,\\
&\overset{1}{R}(X,Y)Z = -\overset{1}{R}(Y,X)Z, && \underset{XYZ}{\mathfrak{S}}\overset{1}{R}(X,Y)Z = \underset{XYZ}{\mathfrak{S}}((\overset{1}{\nabla}_X\overset{1}{T})(Y,Z) + \overset{1}{T}(\overset{1}{T}(X,Y),Z)),\\
&\overset{2}{R}(X,Y)Z = -\overset{2}{R}(Y,X)Z, && \underset{XYZ}{\mathfrak{S}}\overset{2}{R}(X,Y)Z = -\underset{XYZ}{\mathfrak{S}}((\overset{1}{\nabla}_X\overset{1}{T})(Y,Z) + 2\overset{1}{T}(\overset{1}{T}(X,Y),Z)),\\
&\overset{3}{R}(X,Y)Z \neq -\overset{3}{R}(Y,X)Z, && \underset{XYZ}{\mathfrak{S}}\overset{3}{R}(X,Y)Z = \underset{XYZ}{\mathfrak{S}}\overset{1}{T}(\overset{1}{T}(X,Y),Z),\\
&\overset{4}{R}(X,Y)Z \neq -\overset{4}{R}(Y,X)Z, && \underset{XYZ}{\mathfrak{S}}\overset{4}{R}(X,Y)Z = 0,\\
&\overset{5}{R}(X,Y)Z \neq -\overset{5}{R}(Y,X)Z, && \underset{XYZ}{\mathfrak{S}}\overset{5}{R}(X,Y)Z = 0.
\end{aligned}$$

1.7 Псеудо-Риманова многострукост

Да бисмо увели појам псеудо-Риманове многострукости, најпре ћемо дати преглед дефинитости симетричне билинеарне форме. Нека је $\mathcal{V}$ векторски простор коначне димензије. *Симетрична билинеарна форма* B је $\mathbb{R}$-билинеарна функција $B : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \to \mathbb{R}$, таква да је $B(U,V) = B(V,U)$, за $U,V \in \mathcal{V}$.

Дефиниција 1.7.1 Симетрична билинеарна форма B је:

1. *позитивно* (*негативно*) *дефинитна* ако је $B(U,U) > 0$ ($B(U,U) < 0$), за свако $U \neq 0$;
2. *позитивно* (*негативно*) *семи-дефинитна* ако је $B(U,U) \geq 0$ ($B(U,U) \leq 0$), за свако $U \in \mathcal{V}$;
3. *недегенерисана* ако из $B(U,V) = 0$ за свако $U \in \mathcal{V}$ следи $V = 0$;
4. *дегенерисана* ако постоји $V \neq 0$ тако да је $B(U,V) = 0$ за свако $U \in \mathcal{V}$.

Индекс k симетричне билинеарне форме B на $\mathcal{V}$ је највећи број који означава димензију потпростора $\mathcal{W} \subset \mathcal{V}$ на коме је $B_{|\mathcal{W}}$ негативно дефинитна.

Дефиниција 1.7.2 *Метрички тензор* (или *псеудо-Риманова метрика*) g на диференцијабилној многострукости $\mathcal{M}$ је симетрично недегенерисано тензорско поље типа (0,2) константног индекса. *Псеудо-Риманова* (или *семи-Риманова*) *многострукост* је многострукост $\mathcal{M}$ на којој је дефинисана псеудо-Риманова метрика g.

Ово значи да је псеудо-Риманова многострукост уређен пар $(\mathcal{M}, g)$. У свакој тачки p псеудо-Риманове многострукости, тангентни простор $\mathcal{T}_p(\mathcal{M})$ је снабдевен *скаларним производом* g_p константног индекса. Скаларним производом је одређена норма вектора, као и угао између два вектора. *Сигнатура* метрике g је уређен пар $(k, n-k)$, где k представља број негативних $g(e_i, e_i)$ и $n-k$ број позитивних $g(e_i, e_i)$, при чему је $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ (псеудо-)ортонормирана база, тј. база за коју важи $g(e_i, e_j) = 0$ и $g(e_i, e_i) = \epsilon_i \in \{-1, 1\}$, за $1 \leq i \neq j \leq n$. Ако је $k = 0$, тада је g *Риманова метрика* (која је позитивно дефинитна), а $(\mathcal{M}, g)$ је *Риманова многострукост.* У случају за $k = 1$ и $n \geq 2$, пар $(\mathcal{M}, g)$ представља *Лоренцову многострукост*, а g је *Лоренцова метрика.*

Ако је метрички тензор g паралелан у односу на линеарну конексију ∇, тј. ако важи

$$(\nabla_X g)(Y,Z) = Xg(Y,Z) - g(\nabla_X Y, Z) - g(Y, \nabla_X Z) = 0,$$

тада кажемо да је конексија ∇ *метричка* (или *компатибилна са метриком*), у супротном је *неметричка.*

Теорема 1.7.1 *У псеудо-Римановој многострукости постоји јединствена симетрична конексија компатибилна са псеудо-Римановом метриком.*

Конексија из претходне теореме се зове *Леви-Чивита* и у наставку ћемо је означавати са $\overset{g}{\nabla}$, па се њене особине симетричност и компатибилност са метриком записују у облику:

1. $\overset{g}{\nabla}_X Y - \overset{g}{\nabla}_Y X = [X, Y]$,
2. $Xg(Y, Z) = g(\overset{g}{\nabla}_X Y, Z) + g(Y, \overset{g}{\nabla}_X Z)$.

Леви-Чивита конексија је одређена Козуловом формулом

$$\begin{aligned} g(\overset{g}{\nabla}_X Y, Z) =& Xg(Y, Z) + Yg(X, Z) - Zg(X, Y) \\ &- g(Y, [X, Z]) - g(X, [Y, Z]) - g(Z, [Y, X]). \end{aligned}$$

Уколико узмемо у обзир да за базна векторска поља важи $[\partial_i, \partial_j] = 0$, на основу Козулове формуле следи да су коефицијенти Леви-Чивита конексије Кристофелови симболи (друге врсте), који су помоћу метричког тензора $g_{ij} = g(\partial_i, \partial_j)$ и њему инверзног тензора $g^{ij} = (g_{ij})^{-1}$ одређени једначином

$$\Gamma^i_{jl} = \frac{1}{2} g^{ip} \left(g_{pj,l} - g_{jl,p} + g_{lp,j} \right). \tag{1.7.1}$$

Риманов тензор кривине $\overset{g}{R}$ у односу на Леви-Чивита конексију $\overset{g}{\nabla}$ је дефинисан једначином

$$\overset{g}{R}(X, Y)Z = \overset{g}{\nabla}_X \overset{g}{\nabla}_Y Z - \overset{g}{\nabla}_Y \overset{g}{\nabla}_X Z - \overset{g}{\nabla}_{[X,Y]} Z$$

и има следеће особине:

1. $\overset{g}{\mathcal{R}}(X, Y, Z, W) = -\overset{g}{\mathcal{R}}(Y, X, Z, W) = -\overset{g}{\mathcal{R}}(X, Y, W, Z)$, (анти-симетричност)
2. $\overset{g}{\mathcal{R}}(X, Y, Z, W) = \overset{g}{\mathcal{R}}(Z, W, X, Y)$, (симетричност по паровима вектора)
3. $\underset{XYZ}{\mathfrak{S}} \overset{g}{R}(X, Y)Z = 0$, ($I$ Бјанкијев идентитет, циклична симетричност)
4. $\underset{XYZ}{\mathfrak{S}} (\overset{g}{\nabla}_X \overset{g}{R})(Y, Z)V = 0$, ($II$ Бјанкијев идентитет)
5. $\underset{XYZ}{\mathfrak{S}} ((\overset{g}{\nabla}_X \overset{g}{\nabla}_Y \overset{g}{R})(Z, U)V - (\overset{g}{\nabla}_Y \overset{g}{\nabla}_X \overset{g}{R})(Z, U)V + (\overset{g}{\nabla}_X \overset{g}{\nabla}_U \overset{g}{R})(Y, Z)V) = 0$,

где је $\overset{g}{\mathcal{R}}(X, Y, Z, W) = g(\overset{g}{R}(X, Y)Z, W)$. Особина 5. је резултат аутора из рада [65], где су одређени још неки идентитети Римановог тензора кривине за двоструко коваријантно диференцирање.

За (0,4)-тензор који има особине анти-симетричности, симетричност по паровима вектора и цикличну симетричност, тј. особине 1, 2. и 3. кажемо да је *алгебарски тензор кривине*, при чему се може показати да особина 2. следи из 1. и 3. Ово значи да је $\overset{g}{R}$ алгебарски тензор кривине.

Контракцијом Римановог тензора кривине дефинисан је Ричијев тензор $\overset{g}{Ric}$ једначином

$$\overset{g}{Ric}(Y, Z) = \mathrm{trace}\{X \to \overset{g}{R}(X, Y)Z\} = \sum_{i=1}^{n} \epsilon_i g(\overset{g}{R}(e_i, Y)Z, e_i),$$

и он је симетричан, док је Ричијев оператор $\overset{g}{Q}$ дефинисан једначином $\overset{g}{Ric}(Y,Z) = g(\overset{g}{Q}Y,Z)$. Скалар кривине $\overset{g}{r}$ је траг претходних тензора, тј.

$$\overset{g}{r} = \sum_{j=1}^{n} \epsilon_j \overset{g}{Ric}(e_j, e_j).$$

Аналогно се дефинишу и одговарајући тензори кривине $\overset{\theta}{\mathcal{R}}$ типа (0,4), Ричијеви тензори $\overset{\theta}{Ric}$, Ричијеви оператори $\overset{\theta}{Q}$ и скалари кривине $\overset{\theta}{r}$ за тензоре кривине $\overset{\theta}{R}$, $\theta = 0, 1, \dots, 5$. Напомињемо да је контракција Римановог тензора кривине $\overset{g}{R}(X,Y)Z$ по векторском пољу Z једнака нули.

У локалним координатама, Риманов тензор кривине има облик

$$\overset{g}{R}{}^i_{jlm} = \Gamma^i_{jl,m} - \Gamma^i_{jm,l} + \Gamma^p_{jl}\Gamma^i_{pm} - \Gamma^p_{jm}\Gamma^i_{pl},$$

где је зарезом означено парцијално диференцирање. Ричијев тензор је дефинисан једначином $\overset{g}{R}_{jl} = \overset{g}{R}{}^p_{jlp}$, а скалар кривине $\overset{g}{R} = g^{pq}\overset{g}{R}_{pq}$.

Спољашни извод (или *спољашни диференцијал*) s-форме A је $(s+1)$-форма дефинисана једначином

$$\begin{aligned} \mathrm{d}A(Y_1,\dots,Y_{s+1}) =& \sum_{i=1}^{s+1}(-1)^{i+1}Y_i(A(Y_1,\dots,\widehat{Y_i}\dots,Y_{s+1})) \\ &+ \sum_{1\le i<j\le s+1}(-1)^{i+j}A([Y_i,Y_j],Y_1,\dots,\widehat{Y_i}\dots,\widehat{Y_j}\dots,Y_{s+1}), \end{aligned}$$

где је симболом $\widehat{Y_i}$ означено да недостаје вектор Y_i, односно

$$A(Y_1,\dots,\widehat{Y_i}\dots,Y_{s+1}) = A(Y_1,\dots,Y_{i-1},Y_{i+1}\dots,Y_{s+1}).$$

Специјално, за диференцијабилну функцију f важи $(\mathrm{d}f)(X) = Xf$, док за 1-форму π важи

$$\mathrm{d}\pi(X,Y) = X(\pi(Y)) - Y(\pi(X)) - \pi([X,Y]).$$

У односу на Леви-Чивита конексију, спољашни извод 1-форме π се може записати у облику

$$\mathrm{d}\pi(X,Y) = (\overset{g}{\nabla}_X\pi)(Y) - (\overset{g}{\nabla}_Y\pi)(X),$$

а 2-форме F у облику

$$\mathrm{d}F(X,Y,Z) = \underset{XYZ}{\mathfrak{S}}(\overset{g}{\nabla}_X F)(Y,Z).$$

За s-форму A кажемо да је *затворена* ако важи $\mathrm{d}A = 0$.

Дивергенција векторског поља X на псеудо-Римановој многострукоси се дефинише релацијом

$$\mathrm{div}X = \sum_{i=1}^{n}\epsilon_i g(\overset{g}{\nabla}_{e_i}X, e_i),$$

односно у индексном запису

$$\mathrm{div}X = \overset{g}{\nabla}_p X^p,$$

док је дивергенција $(1,s)$-тензора B тензор типа $(0,s)$ који је дат једначином

$$(\mathrm{div}B)(X_1,X_2,\dots,X_s) = \sum_{i=1}^{n}\epsilon_i g((\overset{g}{\nabla}_{e_i}B)(X_1,X_2,\dots,X_s),e_i).$$

Почетни допринос теорији конексија су дали Х. Вејл и Е. Картан. Х. Вејл је у раду [128] ослабио услов метричности конексије, док је Е. Картан [9] ослабио услов симетричности, односно увео је тензор торзије. Након тога, у раду [43] се појављује први специјалан случај тензора торзије, док је општа формула конексије у односу на тензор торзије и коваријантни извод метричког тензора g представљена у раду [104].

С обзиром на то да је Е. Картан увео метричку конексију $\overset{1}{\nabla}$ са торзијом, псеудо-Риманова многострукост $(\mathcal{M}, g)$ са метричком конексијом $\overset{1}{\nabla}$, односно уређена тројка $(\mathcal{M}, g, \overset{1}{\nabla})$ се назива *Риман-Картанова многострукост* [118], која има примену у теоријама гравитације, као што је *Ајнштајн-Картанова* (нпр. видети [88]).

Ако конексија $\overset{1}{\nabla}$ има облик

$$\overset{1}{\nabla}_X Y = \overset{g}{\nabla}_X Y + \frac{1}{2}\overset{1}{T}(X, Y),$$

тада је симетрични део ове конексије Леви-Чивита конексија $\overset{g}{\nabla}$, што значи да се тензор кривине $\overset{0}{R}$ поклапа са Римановим тензором кривине $\overset{g}{R}$. Штавише, оваква конексија има исте геодезијске линије као и Леви-Чивита конексија.

Поред претходно наведених тензора кривине, у овој дисертацији ћемо се бавити и *конформним*, *конхармонијским*, *конциркуларним* и *Вејловим пројективним* тензором кривине, који су редом инваријантни при конформном, конхармонијском, конциркуларном и геодезијском (пројективном) пресликавању псеудо-Риманових многострукости. Ако их, редом, означимо са $\overset{g}{C}$, $\overset{g}{H}$, $\overset{g}{Z}$ и $\overset{g}{W}$, тада су они дати једначинама

$$\begin{aligned}\overset{g}{C}(X,Y)Z =&\overset{g}{R}(X,Y)Z - \frac{1}{n-2}(\overset{g}{Ric}(Y,Z)X - \overset{g}{Ric}(X,Z)Y + g(Y,Z)\overset{g}{Q}X - g(X,Z)\overset{g}{Q}Y)\\ &+ \frac{\overset{g}{r}}{(n-1)(n-2)}(g(Y,Z)X - g(X,Z)Y),\end{aligned} \tag{1.7.2}$$

$$\overset{g}{H}(X,Y)Z =\overset{g}{R}(X,Y)Z - \frac{1}{n-2}(\overset{g}{Ric}(Y,Z)X - \overset{g}{Ric}(X,Z)Y + g(Y,Z)\overset{g}{Q}X - g(X,Z)\overset{g}{Q}Y), \tag{1.7.3}$$

$$\overset{g}{Z}(X,Y)Z =\overset{g}{R}(X,Y)Z + \frac{\overset{g}{r}}{n(n-1)}(g(X,Z)Y - g(Y,Z)X), \tag{1.7.4}$$

$$\overset{g}{W}(X,Y)Z =\overset{g}{R}(X,Y)Z + \frac{1}{n-1}(\overset{g}{Ric}(X,Z)Y - \overset{g}{Ric}(Y,Z)X). \tag{1.7.5}$$

Ако су ови тензори једнаки нули, тада је многострукост *конформно*, *конциркуларно*, *конхармонијски* и *пројективно равна*, редом.

Слично претходно дефинисаним тензорима, могу се дефинисати и одговарајући тензори за несиметричну конексију $\overset{1}{\nabla}$. На пример, тензори дефинисани једначинама

$$\overset{1}{W}(X,Y)Z = \overset{1}{R}(X,Y)Z + \frac{1}{n-1}(\overset{1}{Ric}(X,Z)Y - \overset{1}{Ric}(Y,Z)X) \tag{1.7.6}$$

и

$$\overset{1}{Z}(X,Y)Z = \overset{1}{R}(X,Y)Z + \frac{\overset{1}{r}}{n(n-1)}\big(g(X,Z)Y - g(Y,Z)X\big), \tag{1.7.7}$$

у теорији конексија у псеудо-Римановим многострукостима се називају *пројективни тензор кривине* конексије $\overset{1}{\nabla}$ и *конциркуларни тензор кривине* конексије $\overset{1}{\nabla}$.

1.8 Симетрије псеудо-Риманове многострукости

Риманов тензор кривине мери закривљеност многострукости и ако је он једнак нули, тада је многострукост *равна*, а ако је Ричијев тензор једнак нули, многострукост је *Ричи равна*.

Слабљењем ових услова, дефинисане су разне класе псеудо-Риманове многострукости. Најпре, ако Ричијев тензор има облик

$$\overset{g}{Ric} = ag,$$

многострукост је *Ајнштајнова*, где је a константа, за димензију $n > 2$. Ако је многострукост $(\mathcal{M}, g)$ *константне кривине* c, тада њен тензор кривине има облик

$$\overset{g}{R}(X,Y)Z = c(g(Y,Z)X - g(X,Z)Y).$$

Ако је $\overset{g}{\nabla}\overset{g}{R} = 0$, тада се за многострукост каже да је *локално симетрична.* Даље, на основу двоструког коваријантног извода су дефинисане многе тзв. *симетрије* многострукости, али ћемо, због тих симетрија, прво увести нека специјална тензорска поља.

За $(0,k)$-тензор B, $k \geq 1$, на псеудо-Римановој многострукости ћемо дефинисати $(0, k+2)$-тензоре $\overset{g}{\mathcal{R}} \cdot B$ и $Q(g,B)$ следећим једначинама (на пример, видети [31])

$$\begin{aligned}(\overset{g}{\mathcal{R}} \cdot B)(X_1, X_2, \ldots, X_k; X, Y) =& (\overset{g}{R}(X,Y) \cdot B)(X_1, X_2, \ldots, X_k)\\ =& - B(\overset{g}{R}(X,Y)X_1, X_2, \ldots, X_k)\\ & - \cdots - B(X_1, X_2, \ldots, \overset{g}{R}(X,Y)X_k)\end{aligned} \tag{1.8.1}$$

и

$$\begin{aligned}Q(g,B)(X_1, X_2, \ldots, X_k; X, Y) =& ((X \wedge_g Y) \cdot B)(X_1, X_2, \ldots, X_k)\\ =& - B((X \wedge_g Y)X_1, X_2, \ldots, X_k)\\ & - \cdots - B(X_1, X_2, \ldots, (X \wedge_g Y)X_k)\end{aligned} \tag{1.8.2}$$

где је $(X \wedge_g Y)$ ендоморфизам дефинисан са

$$(X \wedge_g Y)Z = g(Y,Z)X - g(X,Z)Y.$$

Тензор Q се назива *Тачибана тензор.*

Ако уместо $(0,k)$-тензора B узмемо Риманов тензор кривине типа (0,4), тада се многострукост за коју важи $\overset{g}{\mathcal{R}} \cdot \overset{g}{\mathcal{R}} = 0$ (што је еквивалентно са $\overset{g}{\nabla}_X \overset{g}{\nabla}_Y \overset{g}{\mathcal{R}} - \overset{g}{\nabla}_Y \overset{g}{\nabla}_X \overset{g}{\mathcal{R}} = 0$) назива *полу-симетрична*, а ако важи $\overset{g}{\mathcal{R}} \cdot \overset{g}{\mathcal{R}} = f_1 Q(g, \overset{g}{\mathcal{R}})$ онда се назива *псеудо-симетрична многострукост* [32], где је f_1 нека функција на скупу $\mathcal{U}_1 = \{p \in \mathcal{M} \mid Q(g, \overset{g}{\mathcal{R}})(p) \neq 0\}$. Приметимо да је $Q(g, \overset{g}{\mathcal{R}}) = 0$ ако и само ако је многострукост константне кривине. Са друге стране, напомињемо да се у раду [11] термин псеудо-симетрична многострукост користи за многострукост која задовољава једначину

$$\begin{aligned}\overset{g}{\nabla}_X \overset{g}{\mathcal{R}}(X_1, X_2, X_3, X_4) =& 2\pi(X)\overset{g}{\mathcal{R}}(X_1, X_2, X_3, X_4) + \pi(X_1)\overset{g}{\mathcal{R}}(X, X_2, X_3, X_4)\\ & + \pi(X_2)\overset{g}{\mathcal{R}}(X_1, X, X_3, X_4) + \pi(X_3)\overset{g}{\mathcal{R}}(X_1, X_2, X, X_4)\\ & + \pi(X_4)\overset{g}{\mathcal{R}}(X_1, X_2, X_3, X),\end{aligned}$$

где је π произвољан ковектор, што није еквивалентно са претходно уведеном дефиницијом, а о међусобном односу ова два типа многострукости може се прочитати [107]. Ми ћемо у овом раду користити појам псеудо-симетричности према раду [32].

Многострукост за коју важи $\overset{g}{\mathcal{R}} \cdot \overset{g}{Ric} = 0$ (или, еквивалентно, $\overset{g}{\nabla}_X \overset{g}{\nabla}_Y \overset{g}{Ric} - \overset{g}{\nabla}_Y \overset{g}{\nabla}_X \overset{g}{Ric} = 0$) се назива *Ричи полу-симетрична*, а ако важи $\overset{g}{\mathcal{R}} \cdot \overset{g}{Ric} = f_2 Q(g, \overset{g}{Ric})$ онда се назива *Ричи псеудо-симетрична многострукост*, где је f_2 нека функција на скупу $\mathcal{U}_2 = \{p \in \mathcal{M} \mid Q(g, \overset{g}{Ric})(p) \neq 0\}$.

Лако се може видети да је $Q(g,\overset{g}{Ric})=0$ ако и само ако је многострукост Ајнштајнова. Ако је $f_2=const.$ тада имамо *Ричи псеудо-симетричну многострукост константног типа.*

Свака псеудо-симетрична многострукост је и Ричи псеудо-симетрична, али обрнуто не важи, што је доказано у [32]. Свака Ричи полу-симетрична многострукост је и Ричи псеудо-симетрична [32], а на Дијаграму 1 је представљен однос разних класа многострукости димензије $n\geq 4$, што се може видети у раду [33].

Дијаграм 1: Однос разних класа многострукости

$$\begin{array}{ccccc}
\boxed{\overset{g}{\mathcal{R}}\cdot\overset{g}{Ric}=f_2Q(g,\overset{g}{Ric})} & \supset & \boxed{\overset{g}{\mathcal{R}}\cdot\overset{g}{\mathcal{R}}=f_1Q(g,\overset{g}{\mathcal{R}})} & \subset & \boxed{\overset{g}{\mathcal{R}}\cdot\overset{g}{\mathcal{C}}=f_3Q(g,\overset{g}{\mathcal{C}})} \\
\cup & & \cup & & \cup \\
\boxed{\overset{g}{\mathcal{R}}\cdot\overset{g}{Ric}=0} & \supset & \boxed{\overset{g}{\mathcal{R}}\cdot\overset{g}{\mathcal{R}}=0} & \subset & \boxed{\overset{g}{\mathcal{R}}\cdot\overset{g}{\mathcal{C}}=0} \\
\cup & & \cup & & \cup \\
\boxed{\overset{g}{\nabla}\overset{g}{Ric}=0} & \supset & \boxed{\overset{g}{\nabla}\overset{g}{\mathcal{R}}=0} & \subset & \boxed{\overset{g}{\nabla}\overset{g}{\mathcal{C}}=0} \\
\cup & & \cup & & \cup \\
\boxed{\overset{g}{Ric}=\frac{\overset{g}{r}}{n}g} & \supset & \boxed{\overset{g}{\mathcal{R}}=\frac{\overset{g}{r}}{2n(n-1)}g\wedge g} & \subset & \boxed{\overset{g}{\mathcal{C}}=0}
\end{array}$$

У претходном дијаграму је коришћен симбол $\wedge$ који представља *Кулкарни-Номизу производ.* За симетричан (0,2)-тензор E и $(0,k)$-тензор B, $k\geq 2$, *Кулкарни-Номизу тензор* $E\wedge B$ се дефинише једначином

$$\begin{aligned}(E\wedge B)(X_1,X_2,X_3,X_4;Y_3,\ldots,Y_k)=&E(X_1,X_4)B(X_2,X_3,Y_3,\ldots,Y_k)\\&+E(X_2,X_3)B(X_1,X_4,Y_3,\ldots,Y_k)\\&-E(X_1,X_3)B(X_2,X_4,Y_3,\ldots,Y_k)\\&-E(X_2,X_4)B(X_1,X_3,Y_3,\ldots,Y_k).\end{aligned}$$

Функција f_3 из релације $\overset{g}{\mathcal{R}}\cdot\overset{g}{\mathcal{C}}=f_3Q(g,\overset{g}{\mathcal{C}})$ је дефинисана на скупу $\mathcal{U}_3=\{p\in\mathcal{M}\mid\overset{g}{\mathcal{C}}(p)\neq 0\}$, где је $\overset{g}{\mathcal{C}}$ конформни тензор кривине типа (0,4), тј. $g(\overset{g}{\mathcal{C}}(X,Y)Z,W)=\overset{g}{\mathcal{C}}(X,Y,Z,W)$. Притом, важи $\mathcal{U}_1=\mathcal{U}_2\cup\mathcal{U}_3$.

О неким геометријским интерпретацијама претходно описаних многострукости може се погледати [106].

1.9 Генералисана Риманова многострукост

Генералисана Риманова многострукост је n-димензионална многострукост $\mathcal{M}$ снабдевена несиметричним *основним тензором* G. Овај тензор G се може представити преко свог симетричног дела g (који је псеудо-Риманова метрика) и анти-симетричног дела F, следећом једначином

$$G(X,Y)=g(X,Y)+F(X,Y),$$

где је

$$g(X,Y)=\frac{1}{2}(G(X,Y)+G(Y,X)),\quad F(X,Y)=\frac{1}{2}(G(X,Y)-G(Y,X)).$$

Дакле, генералисана Риманова многострукост представља уређени пар $(\mathcal{M},G)$, а користићемо и ознаку $(\mathcal{M},G=g+F)$. Везу између симетричног дела g и анти-симетричног дела F представљамо једначином

$$F(X,Y)=g(AX,Y),\tag{1.9.1}$$

где је A тензор типа (1,1) (и за њега кажемо да је *придружен* тензору F). У зависности од особина тензора A, можемо посматрати разне многострукости као примере генералисане

Риманове многострукости, као што су скоро Хермитске, скоро пара-Хермитске, скоро контактне метричке, скоро пара-контактне метричке и друге (видети [55, 96]). Због тога ћемо тензор A називати *структурни тензор*. На пример, ако је $A^2 = -I$ тада се A назива *скоро комплексна структура*, а ако је $A^2 = I$ назива се *скоро продукт* или *скоро пара-комплексна структура*, где је I идентичко пресликавање.

Ајзенхарт је у раду [41] дефинисао конексију генералисане Риманове многострукости преко генералисаних Кристофелових симбола и та конексија спада у групу конексија са тотално анти-симетричним тензором торзије. У раду [55], С. Иванов и М. Златановић су проучавали конексије на генералисаним Римановим многострукостима и доказали су да је било која конексија у потпуности одређена тензором торзије и коваријантним изводом у односу на симетрични део g. Овај резултат наводимо у наредној теореми, где ћемо користити и (0,3)-тензор торзије, који је дефинисан једначином $\overset{1}{T}(X,Y,Z) = g(\overset{1}{T}(X,Y),Z)$.

Теорема 1.9.1 [55] *Нека је $(\mathcal{M}, G = g + F)$ генералисана Риманова многострукост и $\overset{g}{\nabla}$ Леви-Чивита конексија. Линеарна конексија $\overset{1}{\nabla}$ са тензором торзије $\overset{1}{T}$ је јединствено одређена следећом једначином*

$$\begin{aligned} g(\overset{1}{\nabla}_X Y, Z) =& g(\overset{g}{\nabla}_X Y, Z) + \frac{1}{2}(\overset{1}{T}(X,Y,Z) + \overset{1}{T}(Z,X,Y) - \overset{1}{T}(Y,Z,X)) \\ & - \frac{1}{2}((\overset{1}{\nabla}_X g)(Y,Z) + (\overset{1}{\nabla}_Y g)(Z,X) - (\overset{1}{\nabla}_Z g)(Y,X)). \end{aligned} \tag{1.9.2}$$

Коваријантни извод $\overset{1}{\nabla} F$ анти-симетричног дела F је дат једначином

$$\begin{aligned} (\overset{1}{\nabla}_X F)(Y,Z) =& (\overset{g}{\nabla}_X F)(Y,Z) + \frac{1}{2}(\overset{1}{T}(X,Y,AZ) + \overset{1}{T}(Z,X,AY)) \\ & + \frac{1}{2}(\overset{1}{T}(AZ,X,Y) + \overset{1}{T}(AZ,Y,X) + \overset{1}{T}(X,AY,Z) + \overset{1}{T}(Z,AY,X)) \\ & + \frac{1}{2}((\overset{1}{\nabla}_X g)(AY,Z) - (\overset{1}{\nabla}_X g)(Y,AZ) - (\overset{1}{\nabla}_Y g)(AZ,X)) \\ & + \frac{1}{2}((\overset{1}{\nabla}_Z g)(AY,X) + (\overset{1}{\nabla}_{AZ} g)(Y,X) - (\overset{1}{\nabla}_{AY} g)(Z,X)). \end{aligned} \tag{1.9.3}$$

Спољашни диференцијал $\mathrm{d}F$ анти-симетричног дела F задовољава једначину

$$\begin{aligned} \mathrm{d}F(X,Y,Z) =& -\overset{1}{T}(X,Y,AZ) - \overset{1}{T}(Y,Z,AX) - \overset{1}{T}(Z,X,AY) \\ & + (\overset{1}{\nabla}_X F)(Y,Z) + (\overset{1}{\nabla}_Y F)(Z,X) + (\overset{1}{\nabla}_Z F)(X,Y). \end{aligned} \tag{1.9.4}$$

Обрнуто, било која три тензора $\overset{1}{T}$, $\overset{1}{\nabla} g$ и $\overset{1}{\nabla} F$ који задовољава (1.9.3) јединствено одређују конексију (1.9.2).

За конексију $\overset{1}{\nabla}$ кажемо да *чува* тензор G ако важи $\overset{1}{\nabla} G = 0$ и за такву конексију наводимо следећу теорему.

Теорема 1.9.2 [55] *Нека је $(\mathcal{M}, G = g + F)$ генералисана Риманова многострукост и $\overset{g}{\nabla}$ Леви-Чивита конексија.*

(1) Линеарна конексија $\overset{1}{\nabla}$ чува основни тензор G ако и само ако чува његов симетрични део g и анти-симетрични део F, тј. $\overset{1}{\nabla} G = 0 \Leftrightarrow \overset{1}{\nabla} g = \overset{1}{\nabla} F = 0 \Leftrightarrow \overset{1}{\nabla} g = \overset{1}{\nabla} A = 0$.

(2) За линеарну конексију $\overset{1}{\nabla}$ која чува основни тензор G и која има тензор торзије $\overset{1}{T}$, важи наредна релација

$$\begin{aligned}(\overset{g}{\nabla}_X F)(Y,Z) = &-\frac{1}{2}(\overset{1}{T}(X,Y,AZ)+\overset{1}{T}(Z,X,AY))\\ &-\frac{1}{2}(\overset{1}{T}(AZ,X,Y)+\overset{1}{T}(AZ,Y,X)+\overset{1}{T}(X,AY,Z)+\overset{1}{T}(Z,AY,X)).\end{aligned}\tag{1.9.5}$$

У ствари, спољашни диференцијал $\mathrm{d}F$ *анти-симетричног дела* F *задовољава*

$$\begin{aligned}&\mathrm{d}F(X,Y,Z) = F(\overset{1}{T}(X,Y),Z)+F(\overset{1}{T}(Y,Z),X)+F(\overset{1}{T}(Z,X),Y), \quad \textit{или}\\ &\mathrm{d}F(X,Y,Z) = -\overset{1}{T}(X,Y,AZ)-\overset{1}{T}(Y,Z,AX)-\overset{1}{T}(Z,X,AY).\end{aligned}\tag{1.9.6}$$

Обрнуто, ако важи услов (1.9.5) тада постоји јединствена линеарна конексија $\overset{1}{\nabla}$, са тензором торзије $\overset{1}{T}$, која чува основни тензор G и она је одређена тензором торзије $\overset{1}{T}$ следећом формулом

$$g(\overset{1}{\nabla}_X Y,Z) = g(\overset{g}{\nabla}_X Y,Z)+\frac{1}{2}(\overset{1}{T}(X,Y,Z)+\overset{1}{T}(Z,X,Y)-\overset{1}{T}(Y,Z,X))$$

Напомена 1.9.1 *Растојање, норма и углови у генералисаној Римановој многострукости се одређују само помоћу симетричног дела g, тј. помоћу псеудо-Риманове метрике g. Наиме, прва фундаментална форма је одређена само помоћу g* [77], *а и скаларни производ се дефинише као и у псеудо-Римановој многострукости (стр. 14 у* [71]*), тј. угао φ између тангентних вектора X и Y се дефинише релацијом*

$$\cos\varphi = \frac{g(X,Y)}{\sqrt{|g(X,X)||g(Y,Y)|}}.$$

1.10 Неке врсте вектора

Овде ћемо навести дефиниције неких специјалних вектора које ћемо користити кроз рад.

Дефиниција 1.10.1 Вектор P је *јединични* ако важи $g(P,P)=\pm 1$.

Дефиниција 1.10.2 Вектори P и V су *ортогонални* ако важи $g(P,V)=0$.

Дефиниција 1.10.3 У псеудо-Римановој многострукости, произвољни вектор $P\neq 0$ је *временски*, *просторни* или *изотропни*[6], ако је, редом, $g(P,P)<0$, $g(P,P)>0$ или $g(P,P)=0$. Вектор $P=0$ је просторни.

Дефиниција 1.10.4 *Торзо-формирајући* (енг. torse-forming) вектор P је вектор који задовољава следећу релацију

$$\overset{g}{\nabla}_X P = \omega X + \eta(X)P,\tag{1.10.1}$$

где је η произвољна 1-форма и ω је скалар.

У зависности од η и ω имамо специјалне случајеве торзо-формирајућег вектора P (за детаљну класификацију може се видети [18]). На пример, ако је $\eta=0$ тада је вектор P *конциркуларни у Фиалковом смислу* (или *Ченов вектор*), а ако је η затворена форма, тада се за вектор P каже да је *конциркуларни у Јановом смислу*. За $\eta=0$ и $\omega=0$ вектор P је *паралелан* у односу на конексију $\overset{g}{\nabla}$.

---

[6] Користе се и називи *нул* или *светлосни вектор*.

Ако је P јединични вектор, тј. $g(P,P) = \pm 1$, и π њему придружен ковектор, тј. $\pi(\cdot) = g(\cdot, P)$, тада се торзо-формирајући вектор (1.10.1) записује у облику (видети [130])

$$(\overset{g}{\nabla}_X \pi)(Y) = \omega(g(X,Y) \mp \pi(X)\pi(Y)). \tag{1.10.2}$$

Дефиниција 1.10.5 Вектор P се назива *конформни* (или *конформно-Килингов*) ако је

$$\mathcal{L}_P g = 2\omega g,$$

где је $\mathcal{L}$ Лиов извод, а ω скаларна функција. Ако је $\omega = 0$ тада се вектор P назива *Килингов*.

Дефиниција 1.10.6 За вектор P кажемо да је *уопштено геодезијски* ако задовољава једначину

$$\overset{g}{\nabla}_P P = \omega P,$$

где је ω скаларна функција, а ако је $\omega = 0$ кажемо да је P *геодезијски вектор*.

Дефиниција 1.10.7 *Градијент* је векторско поље којем одговара ковектор чије су компоненте парцијални изводи неке функције.

На пример, ако је дата функција f тада се градијентни вектор означава са $\mathrm{grad} f$, а $\mathrm{d}f$ је његов одговарајући ковектор, тј. диференцијал те функције, што се може изразити на следећи начин

$$g(\mathrm{grad} f, X) = (\mathrm{d}f)(X) = Xf.$$

Услов затворености ковектора је еквивалентан услову градијентности, па се често за затворени ковектор користи и термин градијент.

Лаплас-Белтрамијев оператор (или само *Лапласијан*) неке функције представља дивергенцију градијентна и означава се са $\triangle = \mathrm{div}\,\mathrm{grad}$, али ћемо овде користити ознаку $\overset{g}{\triangle}$ како бисмо указали да се односи на Леви-Чивита конексију.

Глава 2

Полу-симетричне конексије

Након што је Е. Картан увео појам тензора торзије, полу-симетрична конексија је дефинисана 1924. год. у раду А. Фридмана и Ј. А. Схаутена [43]. Експлицитну једначину полу-симетричне метричке конексије, у зависности од Леви-Чивита конексије, је представио Е. Пак 1969. год. [82]. Недуго затим, ову конексију је проучавао К. Јано [132] и М. Првановић [89], након чега су почели да је проучавају многи аутори у разним многострукостима. У овој глави ћемо кренути од основних информација о овој конексији, а онда ћемо посматрати њене специјалне случајеве. Најпре ћемо проучавати конциркуларну полу-симетричну метричку конексију, која се дефинише преко услова да је генератор те конексије конциркуларан (у Јановом смислу). Ову конексију ћемо применити на Лоренцове многострукости, где се своди на полу-симетричну метричку P-конексију. Посматраћемо и полу-симетричну метричку конексију са генератором који је паралелан у односу на Леви-Чивита конексију. Затим ћемо се бавити пројективном полу-симетричном конексијом, која се дефинише као полу-симетрична конексија која има исте геодезијске линије као и Леви-Чивита конексија. Неки од представљених резултата у овој глави су публиковани у радовима [64, 144].

2.1 Полу-симетрична метричка конексија

Конексија $\overset{1}{\nabla}$ која има тензор торзије облика

$$\overset{1}{T}(X,Y) = \pi(Y)X - \pi(X)Y, \tag{2.1.1}$$

назива се *полу-симетрична конексија* [43], где је π произвољна 1-форма, која се назива *генератор* ове конексије. Овде ћемо проучавати *полу-симетричну метричку конексију* у псеудо-Римановој многострукости $(\mathcal{M}, g)$ димензије $n > 2$, тј. полу-симетричну конексију $\overset{1}{\nabla}$ за коју важи $\overset{1}{\nabla} g = 0$. Ако је P вектор придружен 1-форми π, тј. вектор за који важи $\pi(X) = g(X,P)$, полу-симетрична метричка конексија је дата једначином

$$\overset{1}{\nabla}_X Y = \overset{g}{\nabla}_X Y + \pi(Y)X - g(X,Y)P, \tag{2.1.2}$$

где је са $\overset{g}{\nabla}$ означена Леви-Чивита конексија [82]. Одговарајућа симетрична конексија $\overset{0}{\nabla}$ и дуална конексија $\overset{2}{\nabla}$ су дефинисане следећим једначинама [87]

$$\overset{0}{\nabla}_X Y = \overset{g}{\nabla}_X Y + \frac{1}{2}\pi(Y)X + \frac{1}{2}\pi(X)Y - g(X,Y)P, \tag{2.1.3}$$

$$\overset{2}{\nabla}_X Y = \overset{g}{\nabla}_X Y + \pi(X)Y - g(X,Y)P. \tag{2.1.4}$$

Коваријантни извод 1-форме π у односу на полу-симетричну метричку конексију $\overset{1}{\nabla}$ задовољава једначину

$$(\overset{1}{\nabla}_X\pi)(Y) = (\overset{g}{\nabla}_X\pi)(Y) - \pi(X)\pi(Y) + \pi(P)g(X,Y). \tag{2.1.5}$$

Тензор кривине $\overset{1}{R}$ конексије $\overset{1}{\nabla}$ се може одредити преко једначине (1.6.1) следећим поступком [132]

$$\begin{aligned}
\overset{1}{R}(X,Y)Z &= \overset{1}{\nabla}_X\overset{1}{\nabla}_Y Z - \overset{1}{\nabla}_Y\overset{1}{\nabla}_X Z - \overset{1}{\nabla}_{[X,Y]}Z\\
&= \overset{1}{\nabla}_X(\overset{g}{\nabla}_Y Z + \pi(Z)Y - g(Y,Z)P) - \overset{1}{\nabla}_Y(\overset{g}{\nabla}_X Z + \pi(Z)X - g(X,Z)P)\\
&- (\overset{g}{\nabla}_{[X,Y]}Z + \pi(Z)[X,Y] - g([X,Y],Z)P)\\
&= \overset{g}{\nabla}_X(\overset{g}{\nabla}_Y Z + \pi(Z)Y - g(Y,Z)P) + \pi(\overset{g}{\nabla}_Y Z + \pi(Z)Y - g(Y,Z)P)X\\
&- g(X,\overset{g}{\nabla}_Y Z + \pi(Z)Y - g(Y,Z)P)P - \overset{g}{\nabla}_Y(\overset{g}{\nabla}_X Z + \pi(Z)X - g(X,Z)P)\\
&- \pi(\overset{g}{\nabla}_X Z + \pi(Z)X - g(X,Z)P)Y + g(Y,\overset{g}{\nabla}_X Z + \pi(Z)X - g(X,Z)P)\\
&- (\overset{g}{\nabla}_{[X,Y]}Z + \pi(Z)[X,Y] - g([X,Y],Z)P),
\end{aligned}$$

одакле се, након сређивања, добија релација између тензора кривине $\overset{1}{R}$ полу-симетричне метричке конексије $\overset{1}{\nabla}$ и Римановог тензора кривине $\overset{g}{R}$ Леви-Чивита конексије $\overset{g}{\nabla}$, која гласи

$$\overset{1}{R}(X,Y)Z = \overset{g}{R}(X,Y)Z - \alpha(Y,Z)X + \alpha(X,Z)Y - g(Y,Z)\mathcal{A}X + g(X,Z)\mathcal{A}Y, \tag{2.1.6}$$

где је $\mathcal{A}$ тензор типа (1,1) придружен (0,2)-тензору α, који је дат једначином

$$\alpha(X,Y) = g(\mathcal{A}X,Y) = (\overset{g}{\nabla}_X\pi)(Y) - \pi(X)\pi(Y) + \frac{1}{2}\pi(P)g(X,Y). \tag{2.1.7}$$

Контракцијом једначине (2.1.6) по векторском пољу X добијамо одговарајући Ричијев тензор

$$\overset{1}{Ric}(Y,Z) = \overset{g}{Ric}(Y,Z) - (n-2)\alpha(Y,Z) - \bar{a}g(Y,Z),$$

где је $\bar{a}$ траг тензора α. Контракцијом претходне једначине, долазимо до релације између скарала кривине $\overset{1}{r}$ и $\overset{g}{r}$

$$\overset{1}{r} = \overset{g}{r} - 2\bar{a}(n-1).$$

Остали тензори кривине $\overset{\theta}{R}$, $\theta = 0,2,3,4,5$, који са $\overset{1}{R}$ чине линеарно независну базу, се могу одредити коришћењем једначина (1.6.2) - (1.6.6), (2.1.1), (2.1.2) и (2.1.6).

Теорема 2.1.1 [87] *Нека је* $(\mathcal{M},g,\overset{1}{\nabla})$ *псеудо-Риманова многострукост са полу-симетричном метричком конексијом (2.1.2). Тензори кривине* $\overset{\theta}{R}$, $\theta = 0,2,\dots,5$, *и Риманов тензор кривине* $\overset{g}{R}$ *су повезани следећим једначинама*

$$\begin{aligned}
\overset{0}{R}(X,Y)Z =&\overset{g}{R}(X,Y)Z - \frac{1}{2}\alpha(Y,Z)X + \frac{1}{2}\alpha(X,Z)Y + \frac{1}{2}(\alpha(X,Y) - \alpha(Y,X))Z - g(Y,Z)\mathcal{A}X\\
&+ g(X,Z)\mathcal{A}Y + \frac{1}{4}\pi(P)(g(Y,Z)X - g(X,Z)Y) - \frac{1}{4}\pi(Z)(\pi(Y)X - \pi(X)Y),
\end{aligned} \tag{2.1.8}$$

$$\overset{2}{R}(X,Y)Z =\overset{g}{R}(X,Y)Z + (\beta(X,Y) - \beta(Y,X))Z - g(Y,Z)\mathcal{B}X + g(X,Z)\mathcal{B}Y, \tag{2.1.9}$$

$$\begin{aligned}
\overset{3}{R}(X,Y)Z =&\overset{g}{R}(X,Y)Z + \beta(X,Z)Y - \beta(Y,X)Z - g(Y,Z)\mathcal{B}X + g(X,Z)\mathcal{B}Y\\
&+ \pi(P)(g(X,Z)Y - g(X,Y)Z),
\end{aligned} \tag{2.1.10}$$

$$\begin{aligned}
\overset{4}{R}(X,Y)Z =&\overset{g}{R}(X,Y)Z + \beta(X,Z)Y - \beta(Y,X)Z - g(Y,Z)\mathcal{B}X + g(X,Z)\mathcal{B}Y\\
&+ \pi(P)(g(X,Z)Y - g(X,Y)Z) - \pi(Z)(\pi(Y)X - \pi(X)Y),
\end{aligned} \tag{2.1.11}$$

$$\begin{aligned}\overset{5}{R}(X,Y)Z =&\overset{g}{R}(X,Y)Z + \frac{1}{2}\beta(X,Z)Y - \frac{1}{2}\beta(Y,Z)X + \frac{1}{2}(\beta(X,Y) - \beta(Y,X))Z - g(Y,Z)\mathcal{B}X \\ &+ g(X,Z)\mathcal{B}Y + \frac{1}{2}\pi(P)(g(X,Z)Y - g(Y,Z)X) - \frac{1}{2}\pi(Y)(\pi(Z)X - \pi(X)Z),\end{aligned} \tag{2.1.12}$$

где је α тензор дат једначином (2.1.7), а $\mathcal{B}$ је (1,1)-тензор придружен (0,2)-тензору β који има облик

$$\beta(X,Y) = g(\mathcal{B}X,Y) = (\overset{g}{\nabla}_X\pi)(Y) - \pi(X)\pi(Y). \tag{2.1.13}$$

У раду [132] је доказано да је (псеудо-)Риманова многострукост са полу-симетричном метричком конексијом конформно равна ако и само ако је тензор кривине $\overset{1}{R}$ једнак нули, док је у [87] доказано да је многострукост конформно равна ако ишчезава тензор кривине $\overset{0}{R}$ и Ричијев тензор $\overset{1}{Ric}$. Такође, у претходно наведеном раду је доказано да је посматрана многострукост пројективно равна ако и само ако нестаје тензор кривине $\overset{4}{R}$.

Конексија $\overset{2}{\nabla}$, дата једначином (2.1.4), је проучавана у раду [90], где су одређени услови да многострукост са том конексијом буде конциркуларно равна и пројективно равна.

Постоји многобројна литература која се бави разним проблемима у многострукостима са полу-симетричном метричком конексијом, а ми ћемо у наставку проучавати конексије које су настале на основу ње.

2.2 Конциркуларна полу-симетрична метричка конексија

Конциркуларна полу-симетрична метричка конексија је специјалан случај полу-симетричне метричке конексије чији је генератор конциркуларан у Јановом смислу, односно чији генератор задовољава услов којим конформно пресликавање постаје конциркуларно и при таквом пресликавању се чувају геодезијски кругови. Ову конексију формално уводимо следећом дефиницијом.

Дефиниција 2.2.1 [111] Ако генератор π полу-симетричне метричке конексије (2.1.2) задовољава једначину

$$(\overset{g}{\nabla}_X\pi)(Y) - \pi(X)\pi(Y) = \omega g(X,Y), \tag{2.2.1}$$

где је ω произвољни скалар, тада се таква конексија зове *конциркуларна полу-симетрична метричка конексија.*

На основу претходне једначине се јасно види да је ковектор π затворен, као и то да се ова једначина може добити из (1.10.1) за $\eta = \pi$, што значи да је вектор који задовољава услов (2.2.1) заиста конциркуларни вектор у Јановом смислу. У наставку ћемо испитати још неке његове особине. Заменом једначине (2.2.1) у (2.1.5) имамо

$$(\overset{1}{\nabla}_X\pi)(Y) = (\omega + \pi(P))g(X,Y),$$

односно

$$\overset{1}{\nabla}_X P = (\omega + \pi(P))X, \tag{2.2.2}$$

одакле имамо наредно тврђење.

Теорема 2.2.1 *Векторско поље P је конциркуларно у Фиалковом смислу у односу на конциркуларну полу-симетричну метричку конексију.*

Ако је вектор P паралелан у односу на конексију $\overset{1}{\nabla}$, тј. ако важи $\overset{1}{\nabla}P = 0$, тада се таква конексија назива *полу-симетрична метричка P-конексија* [17]. На основу једначине (2.2.2) видимо да је $\overset{1}{\nabla}P = 0$ ако и само ако $\omega + \pi(P) = 0$, што значи да је полу-симетрична метричка P-конексија специјалан случај конциркуларне полу-симетричне метричке конексије.

Теорема 2.2.2 *Конциркуларна полу-симетрична метричка конексија је полу-симетрична метричка* P*-конексија ако и само ако је* $g(P,P)=-\omega$*.*

На основу једначина (2.1.2) и (2.2.1) добијамо наредне релације

$$\overset{1}{\nabla}_P Y=\overset{g}{\nabla}_P Y, \tag{2.2.3}$$

$$(\overset{g}{\nabla}_X\pi)(P)=(\overset{g}{\nabla}_P\pi)(X)=\pi(\overset{g}{\nabla}_P X)=(\omega+\pi(P))\pi(X), \tag{2.2.4}$$

$$(\mathcal{L}_P\pi)(X)=2(\omega+\pi(P))\pi(X), \tag{2.2.5}$$

$$(\mathcal{L}_P g)(X,Y)=2(\overset{g}{\nabla}_X\pi)(Y). \tag{2.2.6}$$

За Лиов извод метричког тензора g у односу на конциркуларну полу-симетричну метричку конексију имамо

$$\begin{aligned}(\overset{1}{\mathcal{L}}_P g)(X,Y)&=Pg(X,Y)-g(\overset{1}{\nabla}_P X-\overset{1}{\nabla}_X P,Y)-g(X,\overset{1}{\nabla}_P Y-\overset{1}{\nabla}_Y P)\\&=(\overset{1}{\nabla}_P g)(X,Y)+g(\overset{1}{\nabla}_X P,Y)+g(X,\overset{1}{\nabla}_Y P)\\&=0+g((\omega+\pi(P))X,Y)+g(X,(\omega+\pi(P))Y),\end{aligned}$$

при чему смо користили и једначину (2.2.2). Даље добијамо

$$\overset{1}{\mathcal{L}}_P g=2(\omega+\pi(P))g,$$

чиме смо доказали наредну теорему и њену последицу.

Теорема 2.2.3 *Вектор* P *је конформни у односу на конциркуларну полу-симетричну метричку конексију.*

Последица 2.2.1 *Вектор* P *је Килингов у односу на конциркуларну полу-симетричну метричку конексију ако и само ако је* $g(P,P)=-\omega$*.*

Напомена 2.2.1 *Килингов вектор у односу на несиметричну метричку конексију је заправо псеудо-Килингов вектор који је проучаван у радовима* [118, 134].

Напомена 2.2.2 *К. Јано је у раду* [129] *конциркуларна пресликавања дефинисао преко услова*

$$(\overset{g}{\nabla}_X\pi)(Y)-\pi(X)\pi(Y)+\frac{1}{2}\pi(P)g(X,Y)=\mu g(X,Y), \tag{2.2.7}$$

што је еквивалентно са (2.2.1), при чему је $\mu=\omega+\frac{1}{2}\pi(P)$*. Полу-симетрична метричка конексија са условом (2.2.7) је проучавана у раду* [117] *и названа је* S*-конциркуларна.*

Напомена 2.2.3 *У објављеним радовима* [64, 144] *резултати су дати за Риманове многострукости, али су они важећи и за псеудо-Риманове многострукости, па ћемо резултате из рада* [64]*, због примене на Лоренцове многострукости, овде наводити за псеудо-Риманове многострукости.*

2.2.1 Особине тензора кривине

С обзиром на то да је ковектор π затворен, коришћењем Теореме 3.7. и 3.8. из рада [87], закључујемо да су сви тензори кривине $\overset{\theta}{R}$ ове конексије циклично-симетрични и да су одговарајући Ричијеви тензори $\overset{\theta}{Ric}$ симетрични, $\theta=0,1,\ldots,5$.

Ако у једначини (2.1.7) искористимо (2.2.1), тада добијамо

$$\alpha(X,Y) = (\omega + \frac{1}{2}\pi(P))g(X,Y). \tag{2.2.8}$$

Коришћењем претходне једначине и (2.1.6), налазимо да тензор кривине конциркуларне полу-симетричне метричке конексије има облик [111]

$$\overset{1}{R}(X,Y)Z = \overset{g}{R}(X,Y)Z + 2(\omega + \frac{1}{2}\pi(P))(g(X,Z)Y - g(Y,Z)X), \tag{2.2.9}$$

одакле се добија Ричијев тензор

$$\overset{1}{Ric}(Y,Z) = \overset{g}{Ric}(Y,Z) - 2(n-1)(\omega + \frac{1}{2}\pi(P))g(Y,Z) \tag{2.2.10}$$

и скаларна кривина

$$\overset{1}{r} = \overset{g}{r} - 2n(n-1)(\omega + \frac{1}{2}\pi(P)). \tag{2.2.11}$$

Следеће две теореме се могу доказати елиминацијом скалара ω и $\pi(P)$ у претходним једначинама.

Теорема 2.2.4 [111] *Ако Риманова многострукост (димензије $n > 2$) допушта конциркуларну полу-симетричну метричку конексију тада је пројективни тензор кривине ове конексије једнак Вејловом пројективном тензору кривине Леви-Чивита конексије, тј. важи*

$$\overset{1}{W}(X,Y)Z = \overset{1}{R}(X,Y)Z + \frac{1}{n-1}\big(\overset{1}{Ric}(X,Z)Y - \overset{1}{Ric}(Y,Z)X\big) = \overset{g}{W}(X,Y)Z. \tag{2.2.12}$$

Теорема 2.2.5 [111] *Ако Риманова многострукост (димензије $n > 2$) допушта конциркуларну полу-симетричну метричку конексију тада је конциркуларни тензор кривине ове конексије једнак конциркуларном тензору кривине Леви-Чивита конексије, тј. важи*

$$\overset{1}{Z}(X,Y)Z = \overset{1}{R}(X,Y)Z + \frac{\overset{1}{r}}{n(n-1)}\big(g(X,Z)Y - g(Y,Z)X\big) = \overset{g}{Z}(X,Y)Z. \tag{2.2.13}$$

Коришћењем једначине (2.2.1), (2.2.8) и Теореме 2.1.1 лако добијамо остале тензоре кривине конциркуларне полу-симетричне метричке конексије.

Теорема 2.2.6 *Нека је $(\mathcal{M}, g, \overset{1}{\nabla})$ псеудо-Риманова многострукост са конциркуларном полу-симетричном метричком конексијом. Тензори кривине $\overset{\theta}{R}$, $\theta = 0,2,3,4,5$, и Риманов тензор кривине $\overset{g}{R}$ задовољавају следеће једначине*

$$\overset{0}{R}(X,Y)Z = \overset{g}{R}(X,Y)Z + \frac{1}{2}(3\omega + \pi(P))(g(X,Z)Y - g(Y,Z)X) - \frac{1}{4}\pi(Z)(\pi(Y)X - \pi(X)Y), \tag{2.2.14}$$

$$\overset{2}{R}(X,Y)Z = \overset{g}{R}(X,Y)Z + \omega(g(X,Z)Y - g(Y,Z)X), \tag{2.2.15}$$

$$\overset{3}{R}(X,Y)Z = \overset{g}{R}(X,Y)Z + \omega(2g(X,Z)Y - g(Y,X)Z - g(Y,Z)X) + \pi(P)(g(X,Z)Y - g(X,Y)Z), \tag{2.2.16}$$

$$\begin{aligned}\overset{4}{R}(X,Y)Z = &\overset{g}{R}(X,Y)Z + \omega(2g(X,Z)Y - g(Y,X)Z - g(Y,Z)X) + \pi(P)(g(X,Z)Y - g(X,Y)Z)\\ &- \pi(Z)(\pi(Y)X - \pi(X)Y),\end{aligned} \tag{2.2.17}$$

$$\overset{5}{R}(X,Y)Z = \overset{g}{R}(X,Y)Z + \frac{1}{2}(3\omega + \pi(P))(g(X,Z)Y - g(Y,Z)X) - \frac{1}{2}\pi(Y)(\pi(Z)X - \pi(X)Z). \tag{2.2.18}$$

Поступком елиминације генератора конциркуларне полу-симетричне метричке конексије из једначина тензора кривине, сада можемо доказати наредну теорему.

Теорема 2.2.7 *Нека је* $(\mathcal{M}, g, \overset{1}{\nabla})$ *псеудо-Риманова многострукост са конциркуларном полу-симетричном метричком конексијом. Тензори* $\overset{\theta}{W}$, $\theta = 0, 2, 3, 4, 5$, *дати једначинама*

$$\overset{0}{W}(X,Y)Z = \overset{0}{R}(X,Y)Z + \frac{1}{n-1}(\overset{0}{Ric}(X,Z)Y - \overset{0}{Ric}(Y,Z)X), \tag{2.2.19}$$

$$\overset{2}{W}(X,Y)Z = \overset{2}{R}(X,Y)Z + \frac{1}{n-1}(\overset{2}{Ric}(X,Z)Y - \overset{2}{Ric}(Y,Z)X), \tag{2.2.20}$$

$$\overset{3}{W}(X,Y)Z = \overset{3}{R}(X,Y)Z + \frac{1}{n-1}(\overset{3}{Ric}(X,Z)Y - \overset{3}{Ric}(Y,Z)X) + \frac{1}{n-1}('\overset{3}{R}(X,Z)Y - '\overset{3}{R}(X,Y)Z), \tag{2.2.21}$$

$$\overset{4}{W}(X,Y)Z = \overset{4}{R}(X,Y)Z + \frac{1}{n-1}(\overset{4}{Ric}(X,Z)Y - \overset{4}{Ric}(Y,Z)X) - \frac{'\overset{4}{r}}{n(n-1)}(g(X,Z)Y - g(X,Y)Z), \tag{2.2.22}$$

$$\overset{5}{W}(X,Y)Z = \overset{5}{R}(X,Y)Z + \frac{1}{n-1}(\overset{5}{Ric}(X,Z)Y - \overset{5}{Ric}(Y,Z)X) + \frac{1}{n-1}('\overset{5}{R}(Y,Z)Y - '\overset{5}{R}(X,Y)Z), \tag{2.2.23}$$

су независни од π *и једнаки су Вејловом пројективном тензору кривине* $\overset{g}{W}$, *где су* $'\overset{\nu}{R}$, $\nu = 3, 4, 5$, *(0,2)-тензори дефинисани једначином* $'\overset{\nu}{R}(X,Y) = \mathrm{trace}\{Z \to \overset{\nu}{R}(X,Y)Z\}$, *а* $'\overset{4}{r}$ *је траг тензора* $'\overset{4}{R}$.

Доказ: Доказ ћемо извести за тензор $\overset{3}{W}$. Контракцијом по вектору X у једначини (2.2.16), добијамо одговарајући Ричијев тензор

$$\overset{3}{Ric}(Y,Z) = \overset{g}{Ric}(Y,Z) - (n-1)\omega g(Y,Z), \tag{2.2.24}$$

одакле следи

$$\omega g(Y,Z) = \frac{1}{n-1}(\overset{g}{Ric}(Y,Z) - \overset{3}{Ric}(Y,Z)). \tag{2.2.25}$$

Са друге стране, једначину (2.2.16) ћемо контраковати по Z и увести ознаку $'\overset{3}{R}(X,Y) = \mathrm{trace}\{Z \to \overset{3}{R}(X,Y)Z\}$. Тада имамо

$$'\overset{3}{R}(X,Y) = -(n-1)(\omega + \pi(P))g(X,Y), \tag{2.2.26}$$

при чему смо користили чињеницу да је $\mathrm{trace}\{Z \to \overset{g}{R}(X,Y)Z\} = 0$. На основу једначина (2.2.25) и (2.2.26), добијамо

$$\pi(P)g(X,Y) = \frac{1}{n-1}(\overset{3}{Ric}(X,Y) - '\overset{3}{R}(X,Y) - \overset{g}{Ric}(X,Y)). \tag{2.2.27}$$

Ако једначине (2.2.25) и (2.2.27) заменимо у (2.2.16), после сређивања, добијамо

$$\overset{3}{W}(X,Y)Z = \overset{g}{W}(X,Y)Z,$$

где је тензор $\overset{3}{W}$ дат (2.2.21), а $\overset{g}{W}$ је Вејлов пројективни тензор дат једначином (1.7.5).

Поступак доказивања је сличан и за остале тензоре $\overset{\theta}{W}$, при чему напомињемо да се за одређивање тензора $\overset{0}{W}$, поред резултата који се добијају на основу тензора кривине $\overset{0}{R}$, за елиминацију $\pi(P)$ и ω из једначине тог тензора кривине, користи и једначина (2.2.11), која заједно са одговарајућом једначином добијеном на основу $\overset{0}{R}$ чини систем од две једначине са две непознате $\pi(P)$ и ω (видети [64]). □

Настављајући са поступком елиминације генератора конциркуларне полу-симетричне метричке конексије из једначина тензора кривине и одговарајућих Ричијевих тензора, добијамо још неке тензоре који не зависе од генератора π.

Теорема 2.2.8 *Нека је* $(\mathcal{M}, g, \overset{1}{\nabla})$ *псеудо-Риманова многострукост са конциркуларном полу-симетричном метричком конексијом. Тензори* $\overset{\theta}{Z}$*,* $\theta = 2, 3, 5$*, дати једначинама*

$$\overset{2}{Z}(X,Y)Z = \overset{2}{R}(X,Y)Z + \frac{\overset{2}{r}}{n(n-1)}(g(X,Z)Y - g(Y,Z)X), \tag{2.2.28}$$

$$\overset{3}{Z}(X,Y)Z = \overset{3}{R}(X,Y)Z + \frac{\overset{3}{r}}{n(n-1)}(g(X,Z)Y - g(Y,Z)X) + \frac{{}'\overset{3}{r}}{n(n-1)}(g(X,Z)Y - g(X,Y)Z), \tag{2.2.29}$$

$$\overset{5}{Z}(X,Y)Z = \overset{5}{R}(X,Y)Z + \frac{1}{n-1}({}'\overset{5}{R}(Y,Z)X - {}'\overset{5}{R}(X,Y)Z) + \frac{\overset{5}{r} + {}'\overset{5}{r}}{n(n-1)}(g(X,Z)Y - g(Y,Z)X), \tag{2.2.30}$$

су независни од π *и једнаки су конциркуларном тензору кривине* $\overset{g}{Z}$*, где су* ${}'\overset{\nu}{r}$*,* $\nu = 3, 5$*, трагови тензора* ${}'\overset{\nu}{R}(X,Y) = \mathrm{trace}\{Z \to \overset{\nu}{R}(X,Y)Z\}$*.*

Доказ: На основу једначина (2.2.25) и (2.2.26), добијамо

$$\omega = \frac{\overset{g}{r} - \overset{3}{r}}{n(n-1)}, \tag{2.2.31}$$

$${}'\overset{3}{r} = -n(n-1)\omega - n(n-1)\pi(P). \tag{2.2.32}$$

Комбинацијом претходних једначина, имамо да важи

$$\pi(P) = \frac{\overset{3}{r} - {}'\overset{3}{r} - \overset{g}{r}}{n(n-1)}. \tag{2.2.33}$$

Заменом једначина (2.2.31) и (2.2.33) у (2.2.16), после сређивања, добијамо

$$\overset{3}{Z}(X,Y)Z = \overset{g}{Z}(X,Y)Z,$$

где је $\overset{3}{Z}$ тензор дат једначином (2.2.29) и $\overset{g}{Z}$ је конциркуларни тензор кривине метрике g дат једначином (1.7.4). ☐

Претходне теореме директно имплицирају наредна тврђења.

Последица 2.2.2 *Псеудо-Риманова многострукост* $(\mathcal{M}, g, \overset{1}{\nabla})$ *са конциркуларном полу-симетричном метричком конексијом је пројективно равна ако и само ако нестаје било који од тензора* $\overset{\theta}{W}$*,* $\theta = 0, 1, \ldots, 5$*, који су дати једначинама (2.2.12), (2.2.19)-(2.2.23).*

Последица 2.2.3 *Псеудо-Риманова многострукост* $(\mathcal{M}, g, \overset{1}{\nabla})$ *са конциркуларном полу-симетричном метричком конексијом је конциркуларно равна ако и само ако нестаје било који од тензора* $\overset{\theta}{Z}$*,* $\theta = 1, 2, 3, 5$*, који су дати једначинама (2.2.13), (2.2.28)-(2.2.30).*

Тензори $\overset{\theta}{W}$, $\theta = 0, 1, 2$ дати са (2.2.19), (2.2.12) и (2.2.20), су пројективни тензори кривине конексија $\overset{0}{\nabla}$, $\overset{1}{\nabla}$ и $\overset{2}{\nabla}$, редом. Тензори $\overset{\theta}{Z}$, $\theta = 1, 2$ дати са (2.2.13) и (2.2.28), су конциркуларни тензори кривине конексија $\overset{1}{\nabla}$ и $\overset{2}{\nabla}$, редом.

2.2.2 Трансформације конексија

У овом делу ћемо посматрати трансформације конексија при којима је инваријантан Риманов тензор кривине $\overset{g}{R}$, као и трансформације конексија при којима су инваријантни Вејлов пројективни тензор кривине $\overset{g}{W}$ и конциркуларни тензор кривине $\overset{g}{Z}$. Ако је $\omega \neq 0$, за трансформације конексија $\overset{g}{\nabla} \to \overset{\theta}{\nabla}$, $\theta = 0, 1, 2$, ћемо рећи да су *нетривијалне*, док су за $\omega = 0$ *тривијалне*.

За одређивање услова при којима је Риманов тензор кривине $\overset{g}{R}$ инваријантан при трансформацији конексија $\overset{g}{\nabla} \to \overset{\theta}{\nabla}$, $\theta = 0, 1, 2$, посматраћемо тензоре кривине линеарних конексија $\overset{\theta}{\nabla}$. Најпре, на основу једначине (2.2.9) закључујемо да је тензор кривине $\overset{1}{R}$ једнак Римановом тензору кривине $\overset{g}{R}$ ако и само ако је

$$(\omega + \frac{1}{2}\pi(P))(g(X,Z)Y - g(Y,Z)X) = 0,$$

што је еквивалентно са условом

$$2\omega = -g(P,P),$$

па можемо формулисати наредно тврђење.

Теорема 2.2.9 *Нека је* $(\mathcal{M}, g, \overset{1}{\nabla})$ *псеудо-Риманова многострукост са конциркуларном полу-симетричном метричком конексијом* $\overset{1}{\nabla}$ *и нека је* $\overset{g}{\nabla}$ *Леви-Чивита конексија. Риманов тензор кривине* $\overset{g}{R}$ *је инваријантан при трансформацији конексија* $\overset{g}{\nabla} \to \overset{1}{\nabla}$ *ако и само ако је* $2\omega = -g(P,P)$.

Полазећи од тензора кривине друге врсте, лако можемо доказати наредну теорему.

Теорема 2.2.10 *Нека је* $(\mathcal{M}, g, \overset{1}{\nabla})$ *псеудо-Риманова многострукост са конциркуларном полу-симетричном метричком конексијом* $\overset{1}{\nabla}$, *која има дуалну конексију* $\overset{2}{\nabla}$, *и нека је* $\overset{g}{\nabla}$ *Леви-Чивита конексија. Риманов тензор кривине* $\overset{g}{R}$ *је инваријантан при трансформацији конексија* $\overset{g}{\nabla} \to \overset{2}{\nabla}$ *ако и само ако је трансформација тривијална.*

Доказ: Из једначине (2.2.15) закључујемо да је тензор кривине $\overset{2}{R}$ једнак Римановом тензору кривине $\overset{g}{R}$ ако и само ако је

$$\omega(g(X,Z)Y - g(Y,Z)X) = 0,$$

одакле добијамо $\omega = 0$, што значи да је трансформација конексија $\overset{g}{\nabla} \to \overset{2}{\nabla}$ тривијална. □

Ако претпоставимо да је $\overset{0}{R} = \overset{g}{R}$, тада из једначине (2.2.14) следи да је

$$\frac{1}{2}(3\omega + \pi(P))(g(X,Z)Y - g(Y,Z)X) - \frac{1}{4}\pi(Z)(\pi(Y)X - \pi(X)Y) = 0.$$

Контракцијом претходне једначине по X добијамо

$$\frac{n-1}{2}(3\omega + \pi(P))g(Y,Z) + \frac{n-1}{4}\pi(Y)\pi(Z) = 0$$

и ако узмемо $Z = P$, претходна једначина добија облик[1]

$$\frac{3(n-1)}{4}(2\omega + \pi(P))\pi(Y) = 0,$$

одакле је

$$2\omega + \pi(P) = 0.$$

Овим смо доказали следећу теорему.

---

[1] У раду [64] је коришћен другачији поступак, због чега је добијен резултат који зависи од димензије многострукости.

Теорема 2.2.11 *Нека је* $(\mathcal{M}, g, \overset{1}{\nabla})$ *псеудо-Риманова многострукост са конциркуларном полу-симетричном метричком конексијом* $\overset{1}{\nabla}$*, која има симетричну конексију* $\overset{0}{\nabla}$*, и нека је* $\overset{g}{\nabla}$ *Леви-Чивита конексија. Ако је Риманов тензор кривине* $\overset{g}{R}$ *инваријантан при трансформацији конексија* $\overset{g}{\nabla} \to \overset{0}{\nabla}$*, тада је* $2\omega = -g(P, P)$*.*

На основу једначине (2.2.12) и Теореме 2.2.7, видимо да се пројективни тензори кривине конексија $\overset{\theta}{\nabla}$, $\theta = 0, 1, 2$, поклапају са Вејловим пројективним тензором кривине Леви-Чивита конексије, па можемо формулисати наредну теорему.

Теорема 2.2.12 *Нека је* $(\mathcal{M}, g, \overset{1}{\nabla})$ *псеудо-Риманова многострукост са конциркуларном полу-симетричном метричком конексијом* $\overset{1}{\nabla}$*, која има симетричну конексију* $\overset{0}{\nabla}$ *и дуалну конексију* $\overset{2}{\nabla}$*, и нека је* $\overset{g}{\nabla}$ *Леви-Чивита конексија. Вејлов пројективни тензор кривине* $\overset{g}{W}$ *је инваријантан при трансформацији конексија* $\overset{g}{\nabla} \to \overset{\theta}{\nabla}$*,* $\theta = 0, 1, 2$*.*

Слично, на основу једначине (2.2.13) и Теореме 2.2.8, видимо да се конциркуларни тензори кривине конексија $\overset{1}{\nabla}$ и $\overset{2}{\nabla}$ поклапају са конциркуларним тензором кривине Леви-Чивита конексије, што имплицира следећи закључак.

Теорема 2.2.13 *Нека је* $(\mathcal{M}, g, \overset{1}{\nabla})$ *псеудо-Риманова многострукост са конциркуларном полу-симетричном метричком конексијом* $\overset{1}{\nabla}$*, која има дуалну конексију* $\overset{2}{\nabla}$*, и нека је* $\overset{g}{\nabla}$ *Леви-Чивита конексија. Конциркуларни тензор кривине* $\overset{g}{Z}$ *је инваријантан при трансформацији конексија* $\overset{g}{\nabla} \to \overset{1}{\nabla}$ *и* $\overset{g}{\nabla} \to \overset{2}{\nabla}$*.*

2.2.3 Ајнштајнове многострукости

Тензор $\overset{g}{\mathsf{E}}$ који је дат једначином

$$\overset{g}{\mathsf{E}} = \overset{g}{Ric} - \frac{\overset{g}{r}}{n} g, \tag{2.2.34}$$

се назива *Ајнштајнов тензор* [70], *Ричијев тензор без трага* [109] или *конциркуларни Ричи тензор* [28]. Ако је овај тензор једнак нули тада псеудо-Риманова многострукост постаје Ајнштајнова, која има примену у многим научним дисциплинама, као што су математичка физика, теорија гравитације итд. Дакле, Ајнштајнова многострукост (у односу на метрику g) се карактерише следећом једначином

$$\overset{g}{Ric} = \frac{\overset{g}{r}}{n} g, \tag{2.2.35}$$

при чему је $\overset{g}{r} = const.$ за $n > 2$. У раду [66], декомпозицијом линеарно независних тензора кривине одређени су *тензори Ајнштајновог типа* (о њима ће више речи бити у последњој глави), док су у [86] одређени као инваријанте при конциркуларном пресликавању генералисаних Риманових многострукости. Коришћењем тензора Ајнштајновог типа, који су дати једначинама

$$\overset{\theta}{\mathsf{E}} = \overset{\theta}{Ric} - \frac{\overset{\theta}{r}}{n} g, \quad \theta = 0, 1, 2, \ldots, 5,$$

можемо дефинисати специјалне класе псеудо-Риманових многострукости са конциркуларном полу-симетричном метричком конексијом, а затим ћемо одредити нове услове да посматрана многострукост буде Ајнштајнова. У овом случају, сви тензори Ајнштајновог типа $\overset{\theta}{\mathsf{E}}$, $\theta = 0, 1, 2, \ldots, 5$ су симетрични, што је последица особине симетричности коју имају одговарајући Ричијеви тензори $\overset{\theta}{Ric}$, па можемо увести следећу дефиницију.

Дефиниција 2.2.2 Псеудо-Риманова многострукост $(\mathcal{M}, g, \overset{1}{\nabla})$ са конциркуларном полу-симетричном метричком конексијом је *многострукост Ајнштајновог типа* θ *врсте*, $\theta = 0, 1, 2, \ldots, 5$, ако ишчезава тензор Ајнштајновог типа θ врсте, тј. ако је $\overset{\theta}{\mathsf{E}} = 0$.

У наставку ћемо детаљно испитати овакве многострукости. Најпре, ако је многострукост Ајнштајновог типа прве врсте, тада је

$$\overset{1}{Ric} = \frac{\overset{1}{r}}{n} g$$

и на основу једначине (2.2.10) следи

$$\frac{\overset{1}{r}}{n} g = \overset{g}{Ric} - 2(n-1)(\omega + \frac{1}{2}\pi(P))g.$$

Даље, узимајући у обзир једначину (2.2.11), имамо да је

$$\frac{1}{n}(\overset{g}{r} - 2n(n-1)(\omega + \frac{1}{2}\pi(P)))g = \overset{g}{Ric} - 2(n-1)(\omega + \frac{1}{2}\pi(P))g,$$

одакле, после сређивања, добијамо

$$\overset{g}{Ric} = \frac{\overset{g}{r}}{n} g,$$

што нам показује да је оваква многострукост Ајнштајнова.

Обрнуто, ако претпоставимо да важи претходна једначина, тада на основу (2.2.10) и (2.2.11), добијамо

$$\overset{1}{Ric} = \frac{\overset{1}{r}}{n} g.$$

Претходним поступком смо доказали следећу теорему.

Теорема 2.2.14 *Псеудо-Риманова многострукост са конциркуларном полу-симетричном метричком конексијом је Ајнштајнова многострукост ако и само ако је многострукост Ајнштајновог типа прве врсте.*

Коришћењем сличног поступка и једначина Ричијевог тензора и скалара кривине друге врсте, можемо доказати следећу теорему.

Теорема 2.2.15 *Псеудо-Риманова многострукост са конциркуларном полу-симетричном метричком конексијом је Ајнштајнова многострукост ако и само ако је многострукост Ајнштајновог типа друге врсте.*

На основу једначина (2.2.15) и (2.2.16) имамо да је $\overset{2}{Ric} = \overset{3}{Ric}$, одакле следи да је и $\overset{2}{\mathsf{E}} = \overset{3}{\mathsf{E}}$, што значи да се многострукости Ајнштајновог типа друге и треће врсте поклапају, па претходна теорема важи и за многострукост Ајнштајновог типа треће врсте.

Напомена 2.2.4 *Тензори* $\overset{\nu}{\mathsf{E}}$, $\nu = 1, 2, 3$ *се могу добити контракцијом тензора* $\overset{\nu}{Z}$, *датих једначинама (2.2.13), (2.2.28) и (2.2.29). Са друге стране, Ајнштајнов тензор* $\overset{g}{\mathsf{E}}$ *се добија контракцијом конциркуларног тензора кривине* $\overset{g}{Z}$, *па на основу Теореме 2.2.13 следи да је и Ајнштајнов тензор* $\overset{g}{\mathsf{E}}$ *инваријантан при трансформацијама* $\overset{g}{\nabla} \to \overset{1}{\nabla}$ *и* $\overset{g}{\nabla} \to \overset{2}{\nabla}$.

2.2.4 Квази-Ајнштајнове многострукости

Постоји много радова који се баве уопштавањем Ајнштајнових многострукости, са различитим приступима, што зависи од посматраног проблема. На пример, квази-Ајнштајнове су само једне од многих многострукости које уопштавају Ајнштајнове. *Квази-Ајнштајнова многострукост* је псеудо-Риманова многострукост чији је Ричијев тензор облика

$$\overset{g}{Ric} = ag + b\pi \otimes \pi, \tag{2.2.36}$$

при чему у литератури постоје следећи случајеви ових многострукости:

1) У раду [12], a и b су скаларне функције, а π је 1-форма са придруженим јединичним вектором;
2) У раду [34], a и b су реалне константе, а π је 1-форма;
3) У раду [47], a и b су скаларне функције, а π је затворена 1-форма;
4) У раду [50], a и b су скаларне функције, а π је 1-форма.

Наиме, у раду [47] су проучаване квази-Ајнштајнове локално конформне Келерове многострукости, са затвореном 1-формом (тзв. *Лиовом формом*), код којих је Ричијев тензор облика (2.2.36), при чему су a и b скаларне функције.

У претходном делу смо искористили тензоре Ајштајновог типа прве, друге и треће врсте, а у наставку ћемо искористити преостале тензоре Ајнштајновог типа у односу на конциркуларну полу-симетричну метричку конексију и помоћу њих ћемо одредити нове услове да многострукост буде квази-Ајнштајнова (у односу на метрику g).

Ако је многострукост Ајнштајновог типа нулте врсте, тј. ако је $\overset{0}{\mathsf{E}} = 0$, тада за Ричијев тензор нулте врсте важи

$$\overset{0}{Ric} = \frac{\overset{0}{r}}{n} g. \tag{2.2.37}$$

Ричијев тензор и скалар кривине нулте врсте се могу добити на основу једначине (2.2.14) и дати су једначинама

$$\overset{0}{Ric} = \overset{g}{Ric} - \frac{n-1}{2}(3\omega + \pi(P))g - \frac{n-1}{4}\pi \otimes \pi \tag{2.2.38}$$

и

$$\overset{0}{r} = \overset{g}{r} - \frac{3n(n-1)}{2}\omega - \frac{(n-1)(2n+1)}{4}\pi(P). \tag{2.2.39}$$

Након замене једначине (2.2.37) у (2.2.38), добијамо

$$\begin{aligned}\frac{1}{4}(4\overset{g}{r} - 6n(n-1)\omega - (n-1)(2n+1)\pi(P))g = \overset{g}{Ric} &- \frac{n-1}{2}(3\omega + \pi(P))g \\ &- \frac{n-1}{4}\pi \otimes \pi,\end{aligned}$$

где смо узели у обзир и (2.2.39). Даље, на основу претходне једначине добијамо да важи

$$\overset{g}{Ric} = \frac{1}{4n}(4\overset{g}{r} - (n-1)\pi(P)) + \frac{n-1}{4}\pi \otimes \pi,$$

одакле видимо да је многострукост квази-Ајнштајнова, према дефиницији из рада [47], јер је, као што већ знамо, на основу услова (2.2.1), 1-форма π затворена.

Обрнуто, ако претпоставимо да важи претходна једначина, тада на основу (2.2.38) и (2.2.39), након једноставног рачуна, добијамо

$$\overset{0}{Ric} = \frac{\overset{0}{r}}{n} g,$$

што значи да је оваква многострукост Ајнштајновог типа нулте врсте.

Теорема 2.2.16 *Псеудо-Риманова многострукост* $(\mathcal{M}, g, \overset{1}{\nabla})$ *са концикуларном полу-симетричном метричком конексијом је многострукост Ајнштајновог типа нулте врсте ако и само ако је квази-Ајнштајнова многострукост чији Ричијев тензор* $\overset{g}{Ric}$ *задовољава следећу релацију*

$$\overset{g}{Ric} = \frac{1}{4n}(4\overset{g}{r} - (n-1)\pi(P))g + \frac{n-1}{4}\pi \otimes \pi.$$

Коришћењем Ричијевих тензора и скалара кривине четврте и пете врсте, аналогно можемо доказати следеће теореме.

Теорема 2.2.17 *Псеудо-Риманова многострукост* $(\mathcal{M}, g, \overset{1}{\nabla})$ *са концикуларном полу-симетричном метричком конексијом је многострукост Ајнштајновог типа четврте врсте ако и само ако је квази-Ајнштајнова многострукост чији Ричијев тензор* $\overset{g}{Ric}$ *задовољава следећу релацију*

$$\overset{g}{Ric} = \frac{1}{n}(\overset{g}{r} - (n-1)\pi(P))g + (n-1)\pi \otimes \pi.$$

Теорема 2.2.18 *Псеудо-Риманова многострукости* $(\mathcal{M}, g, \overset{1}{\nabla})$ *са концикуларном полу-симетричном метричком конексијом је многострукост Ајнштајновог типа пете врсте ако и само ако је квази-Ајнштајнова многострукост чији Ричијев тензор* $\overset{g}{Ric}$ *задовољава следећу релацију*

$$\overset{g}{Ric} = \frac{1}{2n}(2\overset{g}{r} - (n-1)\pi(P))g + \frac{n-1}{2}\pi \otimes \pi.$$

Пошто су идеални флуиди примери квази-Ајнштајнових многострукости, природно је да претходне резултате применимо на Лоренцове многострукости и на идеалне флуиде.

2.3 Лоренцова многострукост

Као што смо већ напоменули на почетку, Лоренцова многострукост представља класу псеудо-Риманове многострукости са Лоренцовом метриком сигнатуре $(-, +, +, \ldots, +)$. Ове многострукости имају примену у теорији опште релативности и космологији, јер је простор-време повезана четвородимензионална Лоренцова многострукост. Постоје разни модели простор-времена, а једно од њих је генералисано Робертсон-Вокерово (кратко, *GRW*) простор-време, које је као специјална класа Лоренцових многострукости дефинисано у раду [1].

Дефиниција 2.3.1 Лоренцова многострукост димензије $n \geq 3$ је *генералисано Робертсон-Вокерово простор-време* ако метрика g има облик

$$\mathrm{d}s^2 = g_{ij}\mathrm{d}x^i\mathrm{d}x^j = -(\mathrm{d}t)^2 + f(t)^2 g^*_{\mu\nu}(\vec{x})\mathrm{d}x^\mu \mathrm{d}x^\nu,$$

где је t време, f скалирајући фактор и $g^*_{\mu\nu}$ је метрика Риманове подмногострукости (димензије $(n-1)$).

GRW простор-време се негде назива *RW* простор-време димензије $n > 4$ (видети [69]), јер ако метрика g^* има димензију 3 и константну кривину онда је *GRW* простор-време заправо Робертсон-Вокерово (*RW*) простор-време. Дакле, *GRW* простор-време проширује *RW* простор-време и, поред тога, укључује још нека простор-времена, као што су Лоренц-Минковско, Ајнштајн-де Ситерово, де Ситерово, Фридманов космолошки модел итд.

У овом раду ћемо се бавити применом концикуларне полу-симетричне метричке конексије са придруженим јединичним временским вектором P, тј. $\pi(P) = -1$, на Лоренцове многострукости. Диференцирањем релације $\pi(P) = g(P, P) = -1$ (по Леви-Чивита конексији) и коришћењем једначине (2.2.1) добијамо $(\omega - 1)\pi(X) = 0$, одакле је $\omega = 1$. Сада једначина (2.2.1) добија облик

$$(\overset{g}{\nabla}_X \pi)(Y) = g(X, Y) + \pi(X)\pi(Y),$$

одакле следи

$$\overset{g}{\nabla}_X P = X + \pi(X)P,$$

тј.

$$\overset{g}{\nabla}_X P = -\pi(P)(X + \pi(X)P), \tag{2.3.1}$$

што нам показује да је јединични временски вектор P торзо-формирајући облика (1.10.2). Такође, на основу претходног видимо да важи $\omega + \pi(P) = 0$, па из једначине (2.2.2) добијамо $\overset{1}{\nabla} P = 0$, а оваква конексије је полу-симетрична метричка P-конексија. Овим смо доказали наредно тврђење.

Теорема 2.3.1 *Ако је придружени вектор P конциркуларне полу-симетричне метричке конексије јединични временски, тада ова конексија постаје полу-симетрична метричка P-конексија.*

Лоренцове многострукости са полу-симетричном метричком P-конексијом су посматране у радовима [19, 136] и доказана је следећа тврдња.

Теорема 2.3.2 [19] *Нека је $\mathcal{M}$ Лоренцова многострукост димензије $n \geq 3$ снабдевена полу-симетричном метричком P-конексијом чији је придружени вектор P јединични временски торзо-формирајући вектор. Тада је $\mathcal{M}$ заправо GRW простор-време.*

На основу претходне две теореме, имамо наредну последицу.

Последица 2.3.1 *Лоренцова многострукост димензије $n \geq 3$ снабдевена конциркуларном полу-симетричном метричком конексијом чији је придружени вектор P јединични временски представља GRW простор-време.*

За разлику од претходна два споменута рада, у [29] је проучавана полу-симетрична метричка конексија у Лоренцовим многострукостима, без услова о паралелности вектора P у односу на посматрану конексију, и доказана је следећа теорема.

Теорема 2.3.3 [29] *Лоренцова многострукост димензије $n \geq 3$ снабдевена полу-симетричном метричком конексијом чији је Ричијев тензор симетричан и тензор торзије рекурентан представља GRW простор-време.*

Међутим, на основу једначине (2.18) из рада [29], можемо закључити да важи наредна теорема.

Теорема 2.3.4 *Полу-симетрична метричка конексија са придруженим јединичним временским вектором P и рекурентним тензором торзије је полу-симетрична метричка P-конексија.*

Дакле, на основу овог тврђења видимо да Теорема 2.3.3 представља еквивалентан облик Теореме 2.3.2 или Последице 2.3.1.

У овој секцији, под $(\mathcal{M}, g, \overset{1}{\nabla})$ ћемо подразумевати n-димензионално GRW простор-време са полу-симетричном метричком P-конексијом. На основу једначина (2.2.4) - (2.2.5), добијамо да у GRW простор-времену $(\mathcal{M}, g, \overset{1}{\nabla})$ важе следеће једначине

$$\begin{aligned}
(\overset{g}{\nabla}_X \pi)(P) &= (\overset{g}{\nabla}_P \pi)(X) = \pi(\overset{g}{\nabla}_P X) = 0,\\
(\mathcal{L}_P \pi)(X) &= 0,\\
\overset{1}{T}(P, X) &= \overset{g}{\nabla}_X P.
\end{aligned}$$

На основу једначине (2.3.1) закључујемо да важи $\overset{g}{\nabla}_P P = 0$, што значи да је вектор P геодезијски.

2.3.1 Особине тензора кривине

У овом делу ћемо проучавати особине тензора кривине $\overset{\theta}{R}$, $\theta = 0, 1, 2, \ldots, 5$, и Римановог тензора кривине $\overset{g}{R}$ у $(\mathcal{M}, g, \overset{1}{\nabla})$. С обзиром на то да сада имамо конкретне вредности за $\pi(P)$ и ω, једначине тензора кривине (2.2.14) - (2.2.18) се редукују и у вези са тим имамо наредна тврђења.

Теорема 2.3.5 *У GRW простор-времену* $(\mathcal{M}, g, \overset{1}{\nabla})$*, тензори кривине* $\overset{\theta}{R}$*,* $\theta = 0, 1, 2, \ldots, 5$*, и Риманов тензор кривине* $\overset{g}{R}$ *су повезани једначинама*

$$\overset{0}{R}(X,Y)Z = \overset{g}{R}(X,Y)Z + g(X,Z)Y - g(Y,Z)X - \frac{1}{4}\pi(Z)(\pi(Y)X - \pi(X)Y), \tag{2.3.2}$$

$$\overset{\nu}{R}(X,Y)Z = \overset{g}{R}(X,Y)Z + g(X,Z)Y - g(Y,Z)X, \quad \nu = 1, 2, 3, \tag{2.3.3}$$

$$\overset{4}{R}(X,Y)Z = \overset{g}{R}(X,Y)Z + g(X,Z)Y - g(Y,Z)X - \pi(Z)(\pi(Y)X - \pi(X)Y), \tag{2.3.4}$$

$$\overset{5}{R}(X,Y)Z = \overset{g}{R}(X,Y)Z + g(X,Z)Y - g(Y,Z)X - \frac{1}{2}\pi(Y)(\pi(Z)X - \pi(X)Z). \tag{2.3.5}$$

Теорема 2.3.6 *У GRW простор-времену* $(\mathcal{M}, g, \overset{1}{\nabla})$*, Ричијеви тензори* $\overset{\theta}{Ric}$*,* $\theta = 0, 1, 2, \ldots, 5$*, и Ричијев тензор* $\overset{g}{Ric}$ *су повезани једначинама*

$$\overset{0}{Ric} = \overset{g}{Ric} - \frac{n-1}{4}(4g + \pi \otimes \pi), \tag{2.3.6}$$

$$\overset{\nu}{Ric} = \overset{g}{Ric} - (n-1)g, \quad \nu = 1, 2, 3, \tag{2.3.7}$$

$$\overset{4}{Ric} = \overset{g}{Ric} - (n-1)(g + \pi \otimes \pi), \tag{2.3.8}$$

$$\overset{5}{Ric} = \overset{g}{Ric} - \frac{n-1}{2}(2g + \pi \otimes \pi). \tag{2.3.9}$$

На основу једначине (2.3.3) видимо да се поклапају тензори кривине $\overset{1}{R}$, $\overset{2}{R}$ и $\overset{3}{R}$, па ћемо у наставку, уместо $\overset{\nu}{R}$ и $\overset{\nu}{Ric}$, $\nu = 1, 2, 3$, користити само $\overset{1}{R}$ и $\overset{1}{Ric}$.

На основу особине паралелности вектора P у односу на конексију $\overset{1}{\nabla}$, лако се показује да у GRW простор-времену $(\mathcal{M}, g, \overset{1}{\nabla})$ важи

$$\overset{1}{R}(X,Y)P = \overset{1}{R}(P,Y)Z = 0,$$
$$\pi(\overset{1}{R}(X,Y)Z) = 0,$$
$$\overset{1}{Ric}(P,X) = 0,$$

чиме смо потврдили резултате из [136]. Са друге стране, Риманов тензор кривине $\overset{g}{R}$ и Ричијев тензор $\overset{g}{Ric}$, у GRW простор-времену $(\mathcal{M}, g, \overset{1}{\nabla})$, задовољавају следеће једначине

$$\overset{g}{R}(X,Y)P = \pi(Y)X - \pi(X)Y = \overset{1}{T}(X,Y), \tag{2.3.10}$$

$$\overset{g}{R}(P,Y)Z = g(Y,Z)P - \pi(Z)Y, \tag{2.3.11}$$

$$\pi(\overset{g}{R}(X,Y)Z) = \pi(X)g(Y,Z) - \pi(Y)g(X,Z) = g(\overset{1}{T}(X,Y),Z) = \overset{1}{T}(X,Y,Z), \tag{2.3.12}$$

$$\overset{g}{Ric}(P,X) = (n-1)\pi(X), \tag{2.3.13}$$

што се у одговарајућем запису може наћи у [19, 108]. На основу претходних релација, лако можемо показати да тензори кривине $\overset{0}{R}, \overset{4}{R}$ и $\overset{5}{R}$ имају следеће особине

$$\begin{aligned}
4\overset{0}{R}(X,Y)P = \overset{4}{R}(X,Y)P = 2\overset{5}{R}(X,P)Y = \overset{1}{T}(X,Y),\\
4\overset{0}{R}(P,Y)Z = \overset{4}{R}(P,Y)Z = 2\overset{5}{R}(P,Z)Y = -\pi(Z)\overset{g}{\nabla}_Y P,\\
\overset{0}{R}(P,P)X = \overset{4}{R}(P,P)X = \overset{5}{R}(P,X)P = 0,\\
\pi(\overset{\theta}{R}(X,Y)Z) = 0, \theta = 0,4,5,
\end{aligned}$$

док одговарајући Ричијеви тензори задовољавају следеће релације

$$4\overset{0}{Ric}(P,X) = \overset{4}{Ric}(P,X) = 2\overset{5}{Ric}(P,X) = (n-1)\pi(X).$$

Ове једначине показују да су $\frac{n-1}{4}$, $(n-1)$ и $\frac{n-1}{2}$ сопствене вредности Ричијевих тензора $\overset{0}{Ric}$, $\overset{4}{Ric}$ и $\overset{5}{Ric}$, редом, у односу на сопствени вектор P. Такође, једначина (2.3.13) имплицира да је $(n-1)$ сопствена вредност Ричијевог тензора $\overset{g}{Ric}$ у односу на сопствени вектор P.

Како је $2\omega \neq -\pi(P)$, на основу Теореме 2.2.9 закључујемо да Риманов тензор кривине $\overset{g}{R}$ не може бити инваријантан при трансформацији конексија $\overset{g}{\nabla} \to \overset{1}{\nabla}$. Такође, Теореме 2.2.10 и 2.2.11, имплицирају наредно тврђење.

Последица 2.3.2 *У GRW простор-времену $(\mathcal{M}, g, \overset{1}{\nabla})$ Риманов тензор кривине $\overset{g}{R}$ не може бити инваријантан при трансформацијама конексија $\overset{g}{\nabla} \to \overset{\theta}{\nabla}$, $\theta = 0,1,2$.*

Ако је $\overset{1}{R} = 0$, тада је GRW простор-време $(\mathcal{M}, g, \overset{1}{\nabla})$ локално изометрично јединичној сфери $S^n(1)$ (видети [19]), док ћемо за остале тензоре кривине $\overset{\theta}{R}$, $\theta = 0,4,5$, показати да не могу бити једнаки нули.

Теорема 2.3.7 *У GRW простор-времену $(\mathcal{M}, g, \overset{1}{\nabla})$ тензори кривине $\overset{0}{R}$, $\overset{4}{R}$ и $\overset{5}{R}$ су различити од нуле.*

Доказ: Доказ ћемо извести за $\overset{0}{R}$, а слично тако се доказује и за остала два тензора кривине. Ако је $\overset{0}{R} = 0$, на основу једначине (2.3.2) се добија

$$\overset{g}{R}(X,Y)Z + g(X,Z)Y - g(Y,Z)X - \frac{1}{4}\pi(Z)(\pi(Y)X - \pi(X)Y) = 0.$$

Ако узмемо да је $Z = P$, претходна једначина добија облик

$$\overset{g}{R}(X,Y)P + \pi(X)Y - \pi(Y)X - \frac{1}{4}\pi(Z)(\pi(Y)X - \pi(X)Y) = 0.$$

Узимајући у обзир једначину (2.3.10), даље имамо

$$\overset{1}{T}(X,Y) - \overset{1}{T}(X,Y) - \frac{1}{4}\pi(Z)\overset{1}{T}(X,Y) = 0,$$

одакле се добија $\overset{1}{T} = 0$, што је немогуће. □

Такође, ако ишчезавају Ричијеви тензори $\overset{0}{Ric}$, $\overset{4}{Ric}$, $\overset{5}{Ric}$, онда се нарушавају особине Ричијевог тензора $\overset{g}{Ric}$.

Теорема 2.3.8 *У GRW простор-времену* $(\mathcal{M}, g, \overset{1}{\nabla})$ *Ричијеви тензори* $\overset{0}{Ric}$, $\overset{4}{Ric}$, $\overset{5}{Ric}$ *су различити од нуле.*

Доказ: На пример, ако је $\overset{5}{Ric} = 0$, тада на основу једначине (2.3.9) добијамо

$$\overset{g}{Ric} = \frac{n-1}{2}(2g + \pi \otimes \pi).$$

Одавде следи

$$\overset{g}{Ric}(X, P) = \frac{n-1}{2}(2\pi(X) - \pi(X)) = \frac{n-1}{2}\pi(X),$$

што је у супротности са једначином (2.3.13). □

Претходне теореме су нас мотивисале да у наставку истраживања тензорима кривине и Ричијевим тензорима постављамо неке слабије услове од услова ишчезавања. Зато ћемо, аналогно једначини (1.8.1), за (0,4)-тензоре кривине $\overset{\theta}{\mathcal{R}}(X, Y, Z, W) = g(\overset{\theta}{R}(X, Y)Z, W)$, и за $(0, k)$-тензор B, $k \geq 1$, дефинисати тензорско поље $\overset{\theta}{\mathcal{R}} \cdot B$, $\theta \in \{0, 1, 4, 5\}$, једначином

$$\begin{aligned}(\overset{\theta}{\mathcal{R}} \cdot B)(X_1, X_2, \dots, X_k; X, Y) =& (\overset{\theta}{R}(X, Y) \cdot B)(X_1, X_2, \dots, X_k) \\ =& - B(\overset{\theta}{R}(X, Y)X_1, X_2, \dots, X_k) \\ & - \dots - B(X_1, X_2, \dots, \overset{\theta}{R}(X, Y)X_k).\end{aligned}$$

У раду [3] проучаване су различите симетрије у GRW простор-времену.

Теорема 2.3.9 [3] *У свакој Ајнштајновој многострукости,* $n \geq 4$, *важи*

$$\overset{g}{\mathcal{R}} \cdot \overset{g}{\mathcal{C}} - \overset{g}{\mathcal{C}} \cdot \overset{g}{\mathcal{R}} = \frac{1}{n-1} Q(\overset{g}{Ric}, \overset{g}{\mathcal{R}}).$$

Стога, ова једначина важи у сваком Ајнштајновом GRW простор-времену.

На Дијаграму 1, који је дат на стр. 19, су представљени односи разних класа многострукости, где, на пример, видимо да је Ајнштајнова многострукост и Ричи полу-симетрична, док обрнуто не мора да важи, а сада ћемо доказати следећу теорему.

Теорема 2.3.10 *GRW простор-време* $(\mathcal{M}, g, \overset{1}{\nabla})$ *је Ричи полу-симетрична многострукост ако и само ако је Ајнштајнова.*

Доказ: Ако је $(\mathcal{M}, g, \overset{1}{\nabla})$ Ричи полу-симетрична многострукост, тада је

$$\overset{g}{Ric}(\overset{g}{R}(X, Y)U, V) + \overset{g}{Ric}(U, \overset{g}{R}(X, Y)V) = 0.$$

Заменом вектора X и V са P, имамо

$$\overset{g}{Ric}(\overset{g}{R}(P, Y)U, P) + \overset{g}{Ric}(U, \overset{g}{R}(P, Y)P) = 0.$$

На основу једначине (2.3.11), сада добијамо

$$g(Y, U)\overset{g}{Ric}(P, P) - \pi(U)\overset{g}{Ric}(Y, P) + \pi(Y)\overset{g}{Ric}(U, P) + \overset{g}{Ric}(Z, Y) = 0.$$

Заменом (2.3.13) у претходну једначину, након сређивања, добијамо да је многострукост Ајнштајнова, чији је Ричијев тензор облика $\overset{g}{Ric} = (n-1)g$. Обрнуто важи на основу Дијаграма 1, чиме смо доказали теорему у оба смера. □

У наставку ћемо испитивати релације $\overset{\theta}{\mathcal{R}}\cdot\overset{\theta}{Ric}$, $\theta=0,1,4,5$, које су дефинисане једначином (1.8.1). Најпре, аналогно једначини (1.8.2), дефинишемо следећи Тачибана тензор

$$\begin{aligned} Q(\overset{g}{Ric},\Pi)(X_1,X_2;X,Y) &= ((X\wedge_{\overset{g}{Ric}} Y)\cdot\Pi)(X_1,X_2)\\ &= -\Pi((X\wedge_{\overset{g}{Ric}} Y)X_1,X_2)-\Pi(X_1,(X\wedge_{\overset{g}{Ric}} Y)X_2),\end{aligned}\tag{2.3.14}$$

где је $\Pi=\pi\otimes\pi$, а ендоморфизам $(X\wedge_{\overset{g}{Ric}} Y)$ је дефинисан са

$$(X\wedge_{\overset{g}{Ric}} Y)Z=\overset{g}{Ric}(Y,Z)X-\overset{g}{Ric}(X,Z)Y.$$

Сада можемо доказати наредно тврђење за тензоре кривине полу-симетричне метричке P-конексије.

Теорема 2.3.11 *У GRW простор-времену $(\mathcal{M},g,\overset{1}{\nabla})$ тензори кривине $\overset{0}{\mathcal{R}}$, $\overset{1}{\mathcal{R}}$, $\overset{4}{\mathcal{R}}$ и Ричијеви тензори $\overset{0}{Ric}$, $\overset{1}{Ric}$, $\overset{4}{Ric}$ задовољавају следеће релације*

$$\overset{0}{\mathcal{R}}\cdot\overset{0}{Ric}=\overset{g}{\mathcal{R}}\cdot\overset{g}{Ric}-Q(g,\overset{g}{Ric})-\frac{n-1}{4}Q(g,\Pi)+\frac{1}{4}Q(\overset{g}{Ric},\Pi),\tag{2.3.15}$$

$$\overset{1}{\mathcal{R}}\cdot\overset{1}{Ric}=\overset{g}{\mathcal{R}}\cdot\overset{g}{Ric}-Q(g,\overset{g}{Ric}),\tag{2.3.16}$$

$$\overset{4}{\mathcal{R}}\cdot\overset{4}{Ric}=\overset{g}{\mathcal{R}}\cdot\overset{g}{Ric}-Q(g,\overset{g}{Ric})-(n-1)Q(g,\Pi)+Q(\overset{g}{Ric},\Pi),\tag{2.3.17}$$

где је $\Pi=\pi\otimes\pi$, а $Q(\cdot,\cdot)$ су Тачибана тензори дефинисани једначинама (1.8.2) и (2.3.14).

Доказ: Доказ ћемо извести за последњу једначину. Најпре имамо

$$(\overset{4}{R}(X,Y)\cdot\overset{4}{Ric})(U,V)=-\overset{4}{Ric}(\overset{4}{R}(X,Y)U,V)-\overset{4}{Ric}(U,\overset{4}{R}(X,Y)V),$$

одакле на основу једначина (2.3.4) и (2.3.8) добијамо

$$\begin{aligned}(\overset{4}{R}(X,Y)\cdot\overset{4}{Ric})(U,V)=&-\overset{g}{Ric}(\overset{g}{R}(X,Y)U,V)-\overset{g}{Ric}(U,\overset{g}{R}(X,Y)V)\\ &+(g(Y,U)+\pi(Y)\pi(U))\overset{g}{Ric}(X,V)-(g(X,V)+\pi(X)\pi(V))\overset{g}{Ric}(U,Y)\\ &+(g(Y,V)+\pi(Y)\pi(V))\overset{g}{Ric}(U,X)-(g(X,U)+\pi(X)\pi(U))\overset{g}{Ric}(Y,V)\\ &+(n-1)\pi(V)(\pi(X)g(Y,U)-\pi(Y)g(X,U))\\ &+(n-1)\pi(U)(\pi(X)g(Y,V)-\pi(Y)g(X,V)).\end{aligned}\tag{2.3.18}$$

Одавде следи

$$\overset{4}{\mathcal{R}}\cdot\overset{4}{Ric}=\overset{g}{\mathcal{R}}\cdot\overset{g}{Ric}-Q(g,\overset{g}{Ric})-(n-1)Q(g,\Pi)+Q(\overset{g}{Ric},\Pi).$$

□

На основу претходне теореме имамо директну последицу.

Последица 2.3.3 *У GRW простор-времену $(\mathcal{M},g,\overset{1}{\nabla})$ тензор кривине $\overset{1}{\mathcal{R}}$ и Ричијев тензор $\overset{1}{Ric}$ задовољавају релацију $\overset{1}{\mathcal{R}}\cdot\overset{1}{Ric}=0$ ако и само ако је многострукост Ричи псеудо-симетрична константног типа облика*

$$\overset{g}{\mathcal{R}}\cdot\overset{g}{Ric}=Q(g,\overset{g}{Ric}).$$

У раду [19] је доказано да важи $\overset{1}{\mathcal{R}}\cdot\overset{1}{Ric}=\overset{g}{\mathcal{R}}\cdot\overset{g}{Ric}$ ако и само ако је многострукост Ричи равна у односу на полу-симетричну метричку P-конексију $\overset{1}{\nabla}$ или је многострукост Ајнштајнова у односу на метрику g. Сада ћемо испитати шта се добија на основу тензора $\overset{0}{\mathcal{R}}\cdot\overset{0}{Ric}$ и $\overset{4}{\mathcal{R}}\cdot\overset{4}{Ric}$.

Теорема 2.3.12 *GRW простор-време $(\mathcal{M}, g, \overset{1}{\nabla})$ је Ајнштајнова многострукост ако и само ако важи $\overset{\nu}{\mathcal{R}} \cdot \overset{\nu}{Ric} = 0$, $\nu = 0, 4$.*

Доказ: Ако је $\overset{4}{\mathcal{R}} \cdot \overset{4}{Ric} = 0$, тада на основу једначине (2.3.18), узимајући $X = V = P$, имамо

$$\begin{aligned}
-\overset{g}{Ric}(\overset{g}{R}(P,Y)U,P) &- \overset{g}{Ric}(U,\overset{g}{R}(P,Y)P) - (g(P,U)+\pi(P)\pi(U))\overset{g}{Ric}(Y,P)\\
&+ (g(Y,U)+\pi(Y)\pi(U))\overset{g}{Ric}(P,P) - (g(P,P)+\pi(P)\pi(P))\overset{g}{Ric}(U,Y)\\
&+ (g(Y,P)+\pi(Y)\pi(P))\overset{g}{Ric}(U,P) + (n-1)\pi(P)(\pi(P)g(Y,U)-\pi(Y)g(P,U))\\
&+ (n-1)\pi(U)(\pi(P)g(Y,P)-\pi(Y)g(P,P)) = 0.
\end{aligned}$$

Коришћењем особина Римановог тензора кривине $\overset{g}{\mathcal{R}}$ и Ричијевог тензора $\overset{g}{Ric}$, тј. коришћењем једначина (2.3.11) и (2.3.13), након сређивања, добијамо

$$\overset{g}{Ric} = (n-1)g, \tag{2.3.19}$$

што значи да је таква многострукост Ајнштајнова. Обрнуто, ако важи једначина (2.3.19), на основу релације (2.3.18) добијамо да важи $\overset{4}{\mathcal{R}} \cdot \overset{4}{Ric} = 0$. □

За тензор кривине $\overset{5}{\mathcal{R}}$ и Ричијев тензор $\overset{5}{Ric}$ ћемо доказати следеће тврђење.

Теорема 2.3.13 *GRW простор-време $(\mathcal{M}, g, \overset{1}{\nabla})$ је Ајнштајнова многострукост ако и само ако важи $\overset{5}{\mathcal{R}} \cdot \overset{5}{Ric} = \overset{g}{\mathcal{R}} \cdot \overset{g}{Ric}$.*

Доказ: За релацију $\overset{5}{\mathcal{R}} \cdot \overset{5}{Ric}$ имамо

$$\begin{aligned}
(\overset{5}{R}(X,Y)\cdot\overset{5}{Ric})(U,V) =& (\overset{g}{R}(X,Y)\cdot\overset{g}{Ric})(U,V) - \frac{n-1}{2}\pi(Y)(\pi(V)g(X,U)+\pi(U)g(X,V))\\
&+ \frac{1}{2}\pi(Y)(\pi(V)\overset{g}{Ric}(U,X)+\pi(U)\overset{g}{Ric}(X,V))\\
&- \pi(Y)\pi(X)(\overset{g}{Ric}(U,V)-(n-1)g(U,V)) - g(X,U)\overset{g}{Ric}(Y,V)\\
&+ g(Y,U)\overset{g}{Ric}(X,V) - g(X,V)\overset{g}{Ric}(U,Y) + g(Y,V)\overset{g}{Ric}(U,X).
\end{aligned} \tag{2.3.20}$$

Претпоставимо да је $\overset{5}{\mathcal{R}} \cdot \overset{5}{Ric} = \overset{g}{\mathcal{R}} \cdot \overset{g}{Ric}$. Ако узмемо да је $X = V = P$, коришћењем једначина (2.3.11) и (2.3.13), након сређивања добијамо да је многострукост Ајнштајнова, чији је Ричијев тензор облика (2.3.19).

Обрнуто, ако претпоставимо да важи (2.3.19), тада заменом у (2.3.20) добијамо да важи $\overset{5}{\mathcal{R}} \cdot \overset{5}{Ric} = \overset{g}{\mathcal{R}} \cdot \overset{g}{Ric}$. □

С обзиром на то да у свакој псеудо-Римановој Ајнштајновој многострукости (димензије $n \geq 4$) важи следећа једначина (Теорема 3.1 у [35])

$$\overset{g}{\mathcal{R}} \cdot \overset{g}{\mathcal{C}} - \overset{g}{\mathcal{C}} \cdot \overset{g}{\mathcal{R}} = \frac{\overset{g}{r}}{n(n-1)}Q(g,\overset{g}{\mathcal{R}}) = \frac{\overset{g}{r}}{n(n-1)}Q(g,\overset{g}{\mathcal{C}}),$$

на основу Теореме 2.3.9, 2.3.12 и 2.3.13, закључујемо да важи наредна последица.

Последица 2.3.4 *Ако у GRW простор-времену $(\mathcal{M}, g, \overset{1}{\nabla})$, димензије $n \geq 4$, важи било која од релација $\overset{\nu}{\mathcal{R}} \cdot \overset{\nu}{Ric} = 0$, $\nu = 0, 4$ или $\overset{5}{\mathcal{R}} \cdot \overset{5}{Ric} = \overset{g}{\mathcal{R}} \cdot \overset{g}{Ric}$, тада важи и наредна релација*

$$\overset{g}{\mathcal{R}} \cdot \overset{g}{\mathcal{C}} - \overset{g}{\mathcal{C}} \cdot \overset{g}{\mathcal{R}} = \frac{1}{n-1}Q(\overset{g}{Ric},\overset{g}{\mathcal{R}}) = Q(g,\overset{g}{\mathcal{R}}) = Q(g,\overset{g}{\mathcal{C}}).$$

2.3.2 **Идеалан флуид**

Идеалан флуид је пример квази-Ајнштајнове многострукости. Тачније, Лоренцова многострукост се зове *идеалан флуид* ако је Ричијев тензор $\overset{g}{Ric}$ облика

$$\overset{g}{Ric} = ag + b\pi \otimes \pi, \tag{2.3.21}$$

где су a и b скалари. Свако RW простор-време је идеалан флуид [78], а обрнути случај је посматран у радовима [26, 27]. У димензији $n = 4$, GRW простор-време је идеалан флуид ако и само ако је RW простор-време [49].

У раду [29] је посматрана Лоренцова многострукост са полу-симетричном метричком конексијом са јединичним временским торзо-формирајућим вектором и доказано је да ако њен тензор кривине ишчезава тада је то заправо идеалан флуид (видети Теорему 1.3 у [29]).

Овде ћемо се сада бавити применом полу-симетричне метричке P-конексије на идеалан флуид. У раду [60] аутори су доказали да у идеалном флуиду са полу-симетричном метричком P-конексијом важи наредна релација (Лема 5. у [60])

$$a - b = n - 1. \tag{2.3.22}$$

Штавише, лако се може показати да се Ричијев тензор идеалног флуида са полу-симетричном метричком P-конексијом може записати у облику

$$\overset{g}{Ric} = \left(\frac{\overset{g}{r}}{n-1} - 1\right) g + \left(\frac{\overset{g}{r}}{n-1} - n\right) \pi \otimes \pi. \tag{2.3.23}$$

Скалар кривине идеалног флуида са полу-симетричном метричком P-конексијом у општем случају није константа (видети Лему 3. у раду [60]).

У раду [12] је показано да квази-Ајнштајнове многострукости нису Ричи полу-симетричне у општем случају. Свака тродимензионална квази-Ајнштајнова многострукост је псеудо-симетрична [36], а сада ћемо у n-димензионалном идеалном флуиду са полу-симетричном метричком P-конексијом доказати наредну теорему.

Теорема 2.3.14 *Идеалан флуид* $(\mathcal{M}, g, \overset{1}{\nabla})$ *је Ричи псеудо-симетричан константног типа који задовољава релацију*

$$\overset{g}{\mathcal{R}} \cdot \overset{g}{Ric} = Q(g, \overset{g}{Ric}).$$

Доказ: У идеалном флуиду (2.3.21) имамо

$$\begin{aligned}(\overset{g}{R}(X,Y) \cdot \overset{g}{Ric})(U,V) &= -\overset{g}{Ric}(\overset{g}{R}(X,Y)U, V) - \overset{g}{Ric}(U, \overset{g}{R}(X,Y)V)\\ &= -b\pi(\overset{g}{R}(X,Y)U)\pi(V) - b\pi(U)\pi(\overset{g}{R}(X,Y)V)\end{aligned}$$

где смо користили особину анти-симетричности Римановог тензора кривине, тј. $\overset{g}{\mathcal{R}}(X,Y,U,V) = -\overset{g}{\mathcal{R}}(X,Y,V,U)$. Ако узмемо у обзир једначину (2.3.12), тада добијамо

$$\begin{aligned}(\overset{g}{R}(X,Y) \cdot \overset{g}{Ric})(U,V) = b(&-g(Y,U)\pi(X)\pi(V) + g(X,U)\pi(Y)\pi(V)\\ &- g(Y,V)\pi(X)\pi(U) + g(X,V)\pi(Y)\pi(U)).\end{aligned} \tag{2.3.24}$$

Са друге стране, у идеалном флуиду (2.3.21) имамо

$$\begin{aligned}Q(g, \overset{g}{Ric})(U,V;X,Y) = &- g(Y,U)\overset{g}{Ric}(X,V) + g(X,U)\overset{g}{Ric}(Y,V)\\ &- g(Y,V)\overset{g}{Ric}(X,U) + g(X,V)\overset{g}{Ric}(Y,U)\\ =&b(-g(Y,U)\pi(X)\pi(V) + g(X,U)\pi(Y)\pi(V)\\ &- g(Y,V)\pi(X)\pi(U) + g(X,V)\pi(Y)\pi(U)).\end{aligned}$$

Видимо да су једнаке десне стране последње две једначине, тј. важи $\overset{g}{\mathcal{R}} \cdot \overset{g}{Ric} = Q(g, \overset{g}{Ric})$. ☐

На основу (2.3.23), једначина (2.3.24) се може записати у облику

$$\overset{g}{\mathcal{R}} \cdot \overset{g}{Ric} = \left(\frac{\overset{g}{r}}{n-1} - n \right) Q(g, \Pi),$$

где је $\Pi = \pi \otimes \pi$. Лако се проверава да не може бити $Q(g, \Pi) = 0$, јер је у том случају $\pi = 0$, што је немогуће. Претходна теорема и једначина (2.3.16) дају следећу последицу.

Последица 2.3.5 *Идеалан флуид* $(\mathcal{M}, g, \overset{1}{\nabla})$ *задовољава релацију* $\overset{1}{\mathcal{R}} \cdot \overset{1}{Ric} = 0$.

Пошто Ричијеви тензори $\overset{0}{Ric}$, $\overset{4}{Ric}$ и $\overset{5}{Ric}$ не могу бити једнаки нули (Теорема 2.3.8), сада ћемо им задати мало слабије услове и на тај начин ћемо дефинисати специјалне класе *GRW* простор-времена $(\mathcal{M}, g, \overset{1}{\nabla})$.

Дефиниција 2.3.2 *GRW* простор-време $(\mathcal{M}, g, \overset{1}{\nabla})$ је идеалан флуид θ врсте, $\theta = 0, 1, 4, 5$ ако су Ричијеви тензори $\overset{\theta}{Ric}$ облика

$$\overset{\theta}{Ric} = \overset{\theta}{a} g + \overset{\theta}{b} \pi \otimes \pi, \quad \theta = 0, 1, 4, 5,$$

где су $\overset{\theta}{a}$, $\overset{\theta}{b}$ функције.

Контракцијом претходне једначине добијамо

$$\overset{\theta}{r} = \overset{\theta}{a} n + \overset{\theta}{b}, \quad \theta = 0, 1, 4, 5.$$

Коришћењем особина Ричијевих тензора $\overset{\theta}{Ric}$, $\theta = 0, 1, 4, 5$, можемо добити изразе за $\overset{\theta}{a}$, $\overset{\theta}{b}$, па се идеални флуиди θ врсте могу записати у следећем облику

$$\begin{aligned}
\overset{0}{Ric} &= \left(\frac{\overset{0}{r}}{n-1} - \frac{1}{4} \right) g + \left(\frac{\overset{0}{r}}{n-1} - \frac{n}{4} \right) \pi \otimes \pi, \\
\overset{1}{Ric} &= \frac{\overset{1}{r}}{n-1} (g + \pi \otimes \pi), \\
\overset{4}{Ric} &= \left(\frac{\overset{4}{r}}{n-1} - 1 \right) g + \left(\frac{\overset{4}{r}}{n-1} - n \right) \pi \otimes \pi, \\
\overset{5}{Ric} &= \left(\frac{\overset{5}{r}}{n-1} - \frac{1}{2} \right) g + \left(\frac{\overset{5}{r}}{n-1} - \frac{n}{2} \right) \pi \otimes \pi.
\end{aligned}$$

У наредној теореми ћемо показати да се идеални флуиди θ врсте поклапају са идеалним флуидом (у односу на метрику g).

Теорема 2.3.15 *GRW простор-време* $(\mathcal{M}, g, \overset{1}{\nabla})$ *је идеалан флуид ако и само ако је идеалан флуид* θ *врсте,* $\theta = 0, 1, 4, 5$.

Доказ: Доказаћемо за $\theta = 0$. Ако је *GRW* простор-време $(\mathcal{M}, g, \overset{1}{\nabla})$ идеалан флуид, тада важи једначина (2.3.23). Заменом ове једначине у (2.3.6), добијамо

$$\overset{0}{Ric} = \left(\frac{\overset{g}{r}}{n-1} - n \right) g + \left(\frac{\overset{g}{r}}{n-1} - \frac{5n-1}{4} \right) \pi \otimes \pi.$$

Узимајући у обзир једначину (2.2.39), тј. $4\overset{0}{r} = 4\overset{g}{r} - (n-1)(4n-1)$, претходна једначина се може записати у облику

$$\overset{0}{Ric} = \left(\frac{\overset{0}{r}}{n-1} - \frac{1}{4}\right) g + \left(\frac{\overset{0}{r}}{n-1} - \frac{n}{4}\right) \pi \otimes \pi, \tag{2.3.25}$$

чиме смо доказали да је $(\mathcal{M}, g, \overset{1}{\nabla})$ идеалан флуид нулте врсте.

Обрнуто, ако важи једначина (2.3.25), тада заменом ове једначине у (2.3.6) и коришћењем (2.2.39), добијамо једначину (2.3.23). ☐

2.3.3 *GRW* простор-време Ајнштајновог типа θ врсте

За разлику од претходне секције, овде ћемо задати мало строжије услове за Ричијеве тензоре $\overset{0}{Ric}$, $\overset{4}{Ric}$ и $\overset{5}{Ric}$, тј. посматраћемо случај када су они пропорционални са метриком g. Наиме, на *GRW* простор-време са полу-симетричном метричком P-конексијом ћемо применити резултате из Секције 2.2.4, односно бавићемо се многострукостима Ајнштајновог типа θ врсте, $\theta = 0, 4, 5$. *GRW* простор-време $(\mathcal{M}, g, \overset{1}{\nabla})$ Ајнштајновог типа θ врсте, $\theta = 0, 4, 5$, је заправо специјалан случај идеалног флуида θ врсте, за

$$\overset{\theta}{a} = \frac{\overset{\theta}{r}}{n} \quad \text{и} \quad \overset{\theta}{b} = 0.$$

Теорема 2.3.16 *GRW простор-време $(\mathcal{M}, g, \overset{1}{\nabla})$ је Ајнштајновог типа нулте врсте ако и само је идеалан флуид чији је Ричијев тензор облика*

$$\overset{g}{Ric} = \frac{n-1}{4}(5g + \pi \otimes \pi), \tag{2.3.26}$$

и скалар кривине је константан, $4\overset{g}{r} = (n-1)(5n-1)$.

Доказ: Ако је многострукост Ајнштајновог типа нулте врсте, тада на основу Теореме 2.2.16 имамо да је идеалан флуид облика

$$\overset{g}{Ric} = \frac{1}{4n}(4\overset{g}{r} + n - 1)g + \frac{n-1}{4}\pi \otimes \pi. \tag{2.3.27}$$

Узимајући у обзир једначине (2.3.21) и (2.3.22), добијамо да је

$$\frac{1}{4n}(4\overset{g}{r} + n - 1) - \frac{n-1}{4} = n - 1,$$

одакле следи

$$\overset{g}{r} = \frac{(n-1)(5n-1)}{4}.$$

Заменом последње једначине у (2.3.27) добијамо једначину (2.3.26). ☐

На исти начин се могу доказати и наредне две теореме.

Теорема 2.3.17 *GRW простор-време $(\mathcal{M}, g, \overset{1}{\nabla})$ је Ајнштајновог типа четврте врсте ако и само је идеалан флуид чији је Ричијев тензор облика*

$$\overset{g}{Ric} = (n-1)(2g + \pi \otimes \pi),$$

и скалар кривине је константан, $\overset{g}{r} = (n-1)(2n-1)$.

Теорема 2.3.18 *GRW простор-време* $(\mathcal{M}, g, \overset{1}{\nabla})$ *је Ајнштајновог типа пете врсте ако и само је идеалан флуид чији је Ричијев тензор облика*

$$\overset{g}{Ric} = \frac{n-1}{2}(3g + \pi \otimes \pi),$$

и скалар кривине је константан, $2\overset{g}{r} = (n-1)(3n-1)$.

Дакле, иако је GRW простор-време $(\mathcal{M}, g, \overset{1}{\nabla})$ Ајнштајновог типа θ врсте $\theta = 0, 4, 5$ заправо специјалан случај идеалног флуида θ врсте, за разлику од претходне секције, овде смо задавањем строжијих услова за Ричијеве тензоре $\overset{0}{Ric}$, $\overset{4}{Ric}$ и $\overset{5}{Ric}$, доказали да је у тим случајевима скалар кривине $\overset{g}{r}$ у $(\mathcal{M}, g, \overset{1}{\nabla})$ константан, што не важи у општем случају (Лема 3. у раду [60]).

2.3.4 Примена на теорију релативности

Са циљем да претходно одређене резултате применимо на теорију релативности, у наставку ћемо посматрати GRW простор-време $(\mathcal{M}, g, \overset{1}{\nabla})$ димензије $n = 4$. *Ајнштајнове једначине поља* представљају фундаменталне једначине у теорији релативности, јер повезују кривину простор-времена са масом и енергијом материје. Овде ћемо се бавити Ајнштајновом једначином без космолошке константе која гласи

$$\overset{g}{Ric} - \frac{\overset{g}{r}}{2} g = k\tau, \tag{2.3.28}$$

где је τ *тензор енергије-импулса* (типа $(0,2)$), а k је *гравитациона константа.* У раду [30] предмет проучавања је било простор-време са полу-симетричним тензором енергије-импулса облика $\overset{g}{\mathcal{R}} \cdot \tau = 0$, док је у раду [68] проучавано простор-време са псеудо-симетричним тензором енергије-импулса облика $\overset{g}{\mathcal{R}} \cdot \tau = fQ(g, \tau)$. Сада ћемо показати наредну теорему.

Теорема 2.3.19 *У GRW простор-времену* $(\mathcal{M}, g, \overset{1}{\nabla})$ *које задовољава Ајнштајнову једначину без космолошке константе важи*

$$\overset{\theta}{\mathcal{R}} \cdot \tau = fQ(g, \tau), \quad \theta = 0, 1, 4, \tag{2.3.29}$$

ако и само ако важи

$$\overset{\theta}{\mathcal{R}} \cdot \overset{g}{Ric} = fQ(g, \overset{g}{Ric}), \tag{2.3.30}$$

где је f *произвољна функција.*

Доказ: Из једначине (2.3.29) добијамо

$$\begin{aligned} -\tau(\overset{\theta}{R}(X,Y)U, V) - \tau(U, \overset{\theta}{R}(X,Y)V) = f(&-g(Y,U)\tau(X,V) + g(X,U)\tau(Y,V) \\ &- g(Y,V)\tau(U,X) + g(X,V)\tau(U,Y)). \end{aligned}$$

Ако узмемо у обзир једначину (2.3.28), даље имамо

$$\begin{aligned} &- \overset{g}{Ric}(\overset{\theta}{R}(X,Y)U, V) + \frac{\overset{g}{r}}{2} g(\overset{\theta}{R}(X,Y)U, V) - \overset{g}{Ric}(U, \overset{\theta}{R}(X,Y)V) + \frac{\overset{g}{r}}{2} g(U, \overset{\theta}{R}(X,Y)V) \\ &= f(-g(Y,U)\overset{g}{Ric}(X,V) + g(X,U)\overset{g}{Ric}(Y,V) - g(Y,V)\overset{g}{Ric}(U,X) + g(X,V)\overset{g}{Ric}(U,Y)). \end{aligned}$$

Како је $\overset{\theta}{\mathcal{R}}(X,Y,U,V) = -\overset{\theta}{\mathcal{R}}(X,Y,V,U)$, $\theta = 0, 1, 4$ [73], на основу последње релације добијамо једначину (2.3.30). □

Тензор енергије-импулса за идеалан флуид је облика

$$\tau = pg + (\sigma + p)\pi \otimes \pi, \tag{2.3.31}$$

где је σ густина енергије и p је изотропни притисак флуида, при чему је $\sigma + p \neq 0$ и $\sigma > 0$ (видети стр. 61-63. у [38]). Однос притиска и густине енергије представља *једначину стања* и у зависности од њене вредности имамо различита стања. На пример, једначина стања *тамне енергије* може се описати релацијом $\frac{p}{\sigma} = \varpi$, за $\varpi < -\frac{1}{3}$, док за $\varpi < -1$ имамо *фантомску тамну енергију*.

На основу Теореме 2.3.14 може се доказати валидност наредног тврђења.

Теорема 2.3.20 *У идеалном флуиду $(\mathcal{M}, g, \overset{1}{\nabla})$ који задовољава Ајнштајнову једначину без космолошке константе важи релација*

$$\overset{g}{\mathcal{R}} \cdot \tau = Q(g, \tau).$$

На основу једначина (2.3.28) и (2.3.31) добијамо

$$\overset{g}{Ric} = \frac{1}{2}(\overset{g}{r} + 2kp)g + k(\sigma + p)\pi \otimes \pi.$$

Контракцијом ове једначине добијамо скалар кривине $\overset{g}{r} = k(\sigma - 3p)$, па Ричијев тензор идеалног флуида има облик

$$\overset{g}{Ric} = \frac{k(\sigma - p)}{2} g + k(\sigma + p)\pi \otimes \pi.$$

Узимајући у обзир да у четвородимензионалном идеалном флуиду са полу-симетричном метричком P-конексијом важи $a - b = 3$ (видети (2.3.23)), на основу претходне једначине добијамо

$$k(\sigma + 3p) = -6. \tag{2.3.32}$$

Како је $k > 0$, следи да је

$$\sigma + 3p < 0.$$

Ово значи да је нарушен *јак услов енергије* (енг. strong energy condition), за који би требало да важи $\sigma + 3p \geq 0$ и $\sigma + p \geq 0$.

Теорема 2.3.21 *У идеалном флуиду $(\mathcal{M}, g, \overset{1}{\nabla})$ који задовољава Ајнштајнову једначину без космолошке константе је нарушен јак услов енергије.*

С обзиром на то да је дивергенција леве стране једнакости (2.3.28) једнака нули, исто треба да важи и за десну страну те једнакости. За дивергенцију тензора енергије-импулса идеалног флуида имамо

$$\mathrm{div}\tau = (\sigma + p)\mathrm{div}\pi \otimes \pi. \tag{2.3.33}$$

Међутим, узимајући у обзир једначину (2.3.1) која важи за полу-симетричну метричку P-конексију, даље имамо

$$\mathrm{div}\pi \otimes \pi = 3\pi,$$

што значи да је једначина (2.3.33) једнака нули ако и само ако је $\sigma + p = 0$, одакле се добија једначина стања $\frac{p}{\sigma} = -1$, што је гранична вредност за фантомску тамну енергију.

Теорема 2.3.22 *У идеалном флуиду $(\mathcal{M}, g, \overset{1}{\nabla})$ који задовољава Ајнштајнову једначину без космолошке константе, једначина стања представља фантомску баријеру.*

Напомена 2.3.1 *Теорема 2.3.21 се може сматрати последицом Теореме 2.3.14 из овог рада и Теореме II. 2.(ii) из рада* [68].

Напомена 2.3.2 *Једначина (2.3.32) је одређена и у раду* [136] *за псеудо Z-симетрично простор-време.*

2.4 Специјална полу-симетрична метричка конексија

Једначина (2.3.33) нам је била повод да у наставку посматрамо тип полу-симетричне метричке конексије за коју ће дивергенција $\mathrm{div}\pi \otimes \pi$ бити једнака нули. Зато ћемо сада у псеудо-Римановој многострукости проучавати полу-симетричну метричку конексију (2.1.2) са придруженим вектором P који је паралелан у односу на Леви-Чивита конексију, тј. $\overset{g}{\nabla} P = 0$. Такву конексију $\overset{1}{\nabla}$ ћемо звати *специјална полу-симетрична метричка конексија.* У радовима [15, 50, 76, 81] је проучавана конексија (2.1.2) у Римановим многострукостима са условом $\overset{g}{\nabla} P = 0$, при чему је P јединични вектор у тој многострукости. Овде за сада нећемо узети јединични вектор, већ тек код примене на Лоренцове многострукости.

У овом делу ознаком $\overset{1}{\nabla}$ ћемо обележавати специјалну полу-симетричну метричку конексију. На основу једначине (2.1.2), за коваријантни извод $\overset{1}{\nabla}$ вектора P имамо

$$\overset{1}{\nabla}_X P = \pi(P)X - \pi(X)P,$$

односно коваријанти извод ковектора π гласи

$$(\overset{1}{\nabla}_X \pi)(Y) = \pi(P)g(X,Y) - \pi(X)\pi(Y). \tag{2.4.1}$$

Одавде следи затвореност ковектора π у односу на $\overset{1}{\nabla}$, односно важи

$$\overset{1}{\mathrm{d}}\pi(X,Y) = (\overset{1}{\nabla}_X \pi)(Y) - (\overset{1}{\nabla}_Y \pi)(X) = 0.$$

Теорема 2.4.1 *Генератор π специјалне полу-симетричне метричке конексије је затворен у односу на ову конесију.*

Коришћењем једначине (2.4.1), можемо одредити Лиов извод метричког тензора g у односу на $\overset{1}{\nabla}$ у правцу вектора P

$$\begin{aligned}(\overset{1}{\mathcal{L}}_P g)(X,Y) &= Pg(X,Y) - g(\overset{1}{\nabla}_P X - \overset{1}{\nabla}_X P, Y) - g(X, \overset{1}{\nabla}_P Y - \overset{1}{\nabla}_Y P)\\ &= (\overset{1}{\nabla}_P g)(X,Y) + g(\overset{1}{\nabla}_X P, Y) + g(X, \overset{1}{\nabla}_Y P)\\ &= 2(\pi(P)g(X,Y) - \pi(X)\pi(Y)) = 2(\overset{1}{\nabla}_X \pi)(Y).\end{aligned} \tag{2.4.2}$$

За сада ће бити довољно само проучавање тензора кривине $\overset{1}{R}$, па из тог разлога овде нећемо наводити остале линеарно независне тензоре кривине, као што смо то радили раније. Тензор α и њему придружени тензор $\mathcal{A}$, дати једначином (2.1.7), за специјалну полу-симетричну метричку конексију добијају облик

$$\alpha(X,Y) = g(\mathcal{A}X, Y) = \frac{1}{2}\pi(P)g(X,Y) - \pi(X)\pi(Y), \tag{2.4.3}$$

одакле се одређује њихов траг

$$\bar{a} = \mathrm{trace}\{X \to \mathcal{A}X\} = \frac{n-2}{2}\pi(P).$$

На основу (2.4.3), видимо да је α симетричан тензор. Узимајући у обзир претходне две једначине, помоћу (2.1.6) закључујемо да тензор кривине специјалне полу-симетричне метричке конексије има облик

$$\begin{aligned}\overset{1}{R}(X,Y)Z =& \overset{g}{R}(X,Y)Z - \pi(P)(g(Y,Z)X - g(X,Z)Y) + (g(Y,Z)\pi(X) - g(X,Z)\pi(Y))P\\ &+ \pi(Z)(\pi(Y)X - \pi(X)Y).\end{aligned} \tag{2.4.4}$$

Контракцијом ове једначине добијамо изразе за одговарајући Ричијев тензор и скалар кривине

$$\overset{1}{Ric}(Y,Z) = \overset{g}{Ric}(Y,Z) - (n-2)\pi(P)g(Y,Z) + (n-2)\pi(Y)\pi(Z), \tag{2.4.5}$$
$$\overset{1}{r} = \overset{g}{r} - (n-1)(n-2)\pi(P). \tag{2.4.6}$$

Одавде видимо да је Ричијев тензор $\overset{1}{Ric}$ симетричан. Такође, претходна једначина нам показују да су скалари кривине $\overset{1}{r}$ и $\overset{g}{r}$ једнаки ако и само ако је $\pi(P) = 0$, тј. када је вектор P изотропни. Ово ћемо формално записати у наредној теореми.

Теорема 2.4.2 *Скалар кривине $\overset{g}{r}$ је инваријантан при трансформацији $\overset{g}{\nabla} \to \overset{1}{\nabla}$ ако и само ако је генератор специјалне полу-симетричне метричке конексије $\overset{1}{\nabla}$ изотропни вектор.*

У наставку наводимо особине тензора кривине и Ричијевих тензора, које имплицира услов паралелности вектора P.

Теорема 2.4.3 *Нека је $(\mathcal{M}, g, \overset{1}{\nabla})$ псеудо-Риманова многострукост са специјалном полу-симетричном метричком конексијом $\overset{1}{\nabla}$. У односу на генератор ове конексије, тензори кривине $\overset{g}{R}$, $\overset{1}{R}$ и Ричијеви тензори $\overset{g}{Ric}$, $\overset{1}{Ric}$ имају следеће особине*

$$\overset{g}{R}(X,Y)P = \overset{g}{R}(P,X)Y = 0, \;\; \pi(\overset{g}{R}(X,Y)Z) = 0, \tag{2.4.7}$$
$$\overset{g}{Ric}(X,P) = 0, \tag{2.4.8}$$
$$\overset{1}{R}(X,Y)P = \overset{1}{R}(P,X)Y = 0, \;\; \pi(\overset{1}{R}(X,Y)Z) = 0, \tag{2.4.9}$$
$$\overset{1}{Ric}(X,P) = 0. \tag{2.4.10}$$

Доказ: С обзиром на то да је $\overset{g}{\nabla}P = 0$, добијамо

$$\overset{g}{R}(X,Y)P = \overset{g}{\nabla}_X \overset{g}{\nabla}_Y P - \overset{g}{\nabla}_Y \overset{g}{\nabla}_X P - \overset{g}{\nabla}_{[X,Y]}P = 0.$$

Коришћењем особина Римановог тензора кривине, лако добијамо остале две једнакости у (2.4.7), а контракцијом добијамо идентитет (2.4.8). За одређивање релација (2.4.9) и (2.4.10) могу се користити претходни идентитети и једначине (2.4.4) и (2.4.5). □

Као што је конформни тензор кривине инваријантан при трансформацији Леви-Чивита конексије на полу-симетричну метричку конексију [2], исто тако се не мења ни при трансформацији на специјалну полу-симетричну метричку конексију. Заиста, ако са $\overset{1}{C}$ означимо конформи тензор кривине у односу на конексију $\overset{1}{\nabla}$, тј.

$$\begin{aligned}\overset{1}{C}(X,Y)Z = &\overset{1}{R}(X,Y)Z - \frac{1}{n-2}(\overset{1}{Ric}(Y,Z)X - \overset{1}{Ric}(X,Z)Y + g(Y,Z)\overset{1}{Q}X - g(X,Z)\overset{1}{Q}Y) \\ &+ \frac{\overset{1}{r}}{(n-1)(n-2)}(g(Y,Z)X - g(X,Z)Y),\end{aligned}$$

тада се уз помоћ једначина (2.4.4)-(2.4.6) лако добија

$$\overset{1}{C}(X,Y)Z = \overset{g}{C}(X,Y)Z,$$

где је $\overset{g}{C}$ конформни тензор кривине (1.7.2).

Теорема 2.4.4 *Конформни тензор кривине $\overset{g}{C}$ је инваријантан при трансформацији $\overset{g}{\nabla} \to \overset{1}{\nabla}$, где је $\overset{1}{\nabla}$ специјална полу-симетрична метричка конексија.*

У општем случају, конхармонијски тензор кривине $\overset{g}{H}$ се мења при преласку са Леви-Чивита на полу-симетричну метричку конексију, па је због тога у раду [117] дефинисан специјалан тип ове конексије која не мења тензор $\overset{g}{H}$. Сада ћемо испитати утицај специјалне полу-симетричне метричке конексије на поменути тензор.

Конхармонијски тензор кривине $\overset{1}{H}$ у односу на конексију $\overset{1}{\nabla}$ гласи

$$\overset{1}{H}(X,Y)Z = \overset{1}{R}(X,Y)Z - \frac{1}{n-2}(\overset{1}{Ric}(Y,Z)X - \overset{1}{Ric}(X,Z)Y + g(Y,Z)\overset{1}{Q}X - g(X,Z)\overset{1}{Q}Y),$$

па се на основу једначина (2.4.4) и (2.4.5), може изразити на следећи начин

$$\overset{1}{H}(X,Y)Z = \overset{g}{H}(X,Y)Z + \pi(P)(g(Y,Z)X - g(X,Z)Y),$$

где је $\overset{g}{H}$ конхармонијски тензор кривине Леви-Чивита конексије дат једначином (1.7.3). Видимо да једнакост између $\overset{1}{H}$ и $\overset{g}{H}$ важи у случају када је $\pi(P) = 0$, па претходна једначина имплицира наредно тврђење.

Теорема 2.4.5 *Конхармонијски тензор кривине $\overset{g}{H}$ је инваријантан при трансформацији Леви-Чивита конексије на специјалну полу-симетричну метричку конексију ако и само ако је генератор те конексије изотропни вектор.*

Слично се добија и релација између конциркуларних тензора кривине конексија $\overset{1}{\nabla}$ и $\overset{g}{\nabla}$

$$\begin{aligned}\overset{1}{Z}(X,Y)Z =& \overset{g}{Z}(X,Y)Z - \frac{2}{n}\pi(P)(g(Y,Z)X - g(X,Z)Y) + (g(Y,Z)\pi(X) - g(X,Z)\pi(Y))P \\ &+ \pi(Z)(\pi(Y)X - \pi(X)Y),\end{aligned}$$

где је $\overset{1}{Z}$ дат једначином (1.7.7), а тензор $\overset{g}{Z}$ дат са (1.7.4). Добро позната чињеница је да конциркуларно равна многострукост представља многострукост константне кривине и Ајнштајнову многострукост. Ово нас је навело да проверимо да ли конциркуларно равна многострукост у односу на $\overset{1}{\nabla}$ представља неку познату многострукост? Стога, ако претпоставимо да је $\overset{1}{Z} = 0$, на основу претходне једначине имамо

$$\overset{g}{Z}(X,Y)Z = \frac{2}{n}\pi(P)(g(Y,Z)X - g(X,Z)Y) - (g(Y,Z)\pi(X) - g(X,Z)\pi(Y))P - \pi(Z)(\pi(Y)X - \pi(X)Y).$$

Контракцијом по векторском пољу X, након једноставног рачуна, добијамо облик Ричијевог тензора

$$\overset{g}{Ric}(Y,Z) = \frac{\overset{g}{r} + (n-2)\pi(P)}{n}g(Y,Z) - (n-2)\pi(Y)\pi(Z). \tag{2.4.11}$$

Узимајући у обзир особину (2.4.8), можемо одредити облик скалара кривине

$$\overset{g}{r} = (n-1)(n-2)\pi(P),$$

па његовом заменом у (2.4.11), добијамо

$$\overset{g}{Ric} = (n-2)(\pi(P)g - \pi \otimes \pi), \tag{2.4.12}$$

што значи да је оваква многострукост квази-Ајштајнова.

Теорема 2.4.6 *Нека је* $(\mathcal{M}, g, \overset{1}{\nabla})$ *псеудо-Риманова многострукост са специјалном полу-симетричном метричком конексијом* $\overset{1}{\nabla}$*. Ако је посматрана многострукост конциркуларно равна у односу на* $\overset{1}{\nabla}$*, тада је то квази-Ајнштанова многострукост облика (2.4.12), при чему је* P *неизотропни вектор.*

Када је $\overset{1}{Ric} = 0$, једначина (2.4.5) имплицира (2.4.12), чиме је доказана следећа теорема.

Теорема 2.4.7 *Нека је* $(\mathcal{M}, g, \overset{1}{\nabla})$ *псеудо-Риманова многострукост са специјалном полу-симетричном метричком конексијом* $\overset{1}{\nabla}$*. Ако је посматрана многострукост Ричи равна у односу на* $\overset{1}{\nabla}$*, тада је то квази-Ајнштанова многострукост облика (2.4.12), при чему је* P *неизотропни вектор.*

2.4.1 Ричијеви солитони

Поменули смо већ да постоје разне многострукости које уопштавају Ајнштајнове, од којих смо проучавали квази-Ајнштајнове. Такође и разни типови тзв. *солитона* представљају њихово уопштење.

Псеудо-Риманова многострукост $(\mathcal{M}, g)$ је *Ричијев солитон* ако допушта векторско поље V такво да је

$$\mathcal{L}_V g + 2\overset{g}{Ric} = 2cg, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Дакле, Ричијев солитон је уређена тројка $(\mathcal{M}, g, V)$. Ако је $c > 0$, $c = 0$, $c < 0$, за Ричијев солитон се каже да је *смањујући*, *стабилан* и *проширујући*, редом (енг. shrinking, steady, expanding).

Сада ћемо проучавати Ричијеве солитоне у $(\mathcal{M}, g, \overset{1}{\nabla})$. Како је $\overset{g}{\nabla} P = 0$, важи и $\mathcal{L}_P g = 0$, па Ричијев солитон

$$\mathcal{L}_P g + 2\overset{g}{Ric} = 2cg, \tag{2.4.13}$$

представља Ајнштајнову многострукост $\overset{g}{Ric} = cg$.

Теорема 2.4.8 *Нека је* $(\mathcal{M}, g, \overset{1}{\nabla})$ *псеудо-Риманова многострукост са специјалном полу-симетричном метричком конексијом* $\overset{1}{\nabla}$*. Ричијев солитон облика (2.4.13) представља Ајнштајнову многострукост.*

У наставку ћемо посматрати Ричијеве солитоне у односу на $\overset{1}{\nabla}$, дефинисане једначином

$$\overset{1}{\mathcal{L}}_P g + 2\overset{1}{Ric} = 2\overset{1}{c} g, \quad \overset{1}{c} \in \mathbb{R}. \tag{2.4.14}$$

Због Теореме 2.4.1, ово је *градијентни Ричијев солитон* у односу на $\overset{1}{\nabla}$. Узимајући у обзир (2.4.2) и (2.4.5), претходна једначина постаје

$$\overset{g}{Ric} = (\overset{1}{c} + (n-3)\pi(P))g - (n-3)\pi \otimes \pi.$$

Због (2.4.8), на основу претходне једначине имамо $\overset{1}{c}\pi(X) = 0$, одакле је $\overset{1}{c} = 0$, што значи да је Ричијев солитон (2.4.14) стабилан.

Теорема 2.4.9 *Нека је* $(\mathcal{M}, g, \overset{1}{\nabla})$ *псеудо-Риманова многострукост са специјалном полу-симетричном метричком конексијом* $\overset{1}{\nabla}$*. Ричијев солитон облика (2.4.14) је стабилан и представља квази-Ајнштајнову многострукост чији Ричијев тензор има израз*

$$\overset{g}{Ric} = (n-3)(\pi(P)g - \pi \otimes \pi).$$

2.4.2 Примена на Лоренцове многострукости

Са циљем да специјалну полу-симетричну метричку конексију применимо на Лоренцове многострукости, узећемо да је њен генератор јединични временски вектор, тј. $\pi(P) = -1$.

Ако торзо-формирајући вектор P у односу на несиметричну конексију $\overset{1}{\nabla}$ дефинишемо са

$$\overset{1}{\nabla}_X P = \omega X + \eta(X)P,$$

где је η произвољна 1-форма и ω скалар, тада за несиметричну метричку конексију $\overset{1}{\nabla}$ за јединични временски вектор P, са придруженим ковектором π, важи

$$(\overset{1}{\nabla}_X \pi)(Y) = \omega(g(X,Y) + \pi(X)\pi(Y)).$$

За специјалну полу-симетричну метричку конексију, на основу једначине (2.4.1), сада имамо

$$(\overset{1}{\nabla}_X \pi)(Y) = -(g(X,Y) + \pi(X)\pi(Y)),$$

што представља специјалан случај претходне једначине и ово имплицира наредно тврђење.

Теорема 2.4.10 *Ако је генератор специјалне полу-симетричне метричке конексије јединични временски вектор P, тада је он торзо-формирајући у односу на ову конексију.*

Као што смо већ рекли, Лоренцова многострукост је идеалан флуид ако Ричијев тензор има облик

$$\overset{g}{Ric} = ag + b\pi \otimes \pi, \tag{2.4.15}$$

где су a и b скаларне функције. Контракција ове једначине даје израз

$$\overset{g}{r} = an - b.$$

Користећи особину (2.4.8), из (2.4.15) имамо $0 = a\pi(X) - b\pi(X) = (a-b)\pi(X)$, односно

$$a = b.$$

Комбинацијом претходне две једнакости добијамо

$$a = \frac{\overset{g}{r}}{n-1}$$

што значи да иделан флуид $(\mathcal{M}, g, \overset{1}{\nabla})$ има облик

$$\overset{g}{Ric} = \frac{\overset{g}{r}}{n-1}(g + \pi \otimes \pi). \tag{2.4.16}$$

Ако је Лоренцова многострукост $(\mathcal{M}, g, \overset{1}{\nabla})$ Ајнштајнова, тада комбинацијом једначине

$$\overset{g}{Ric} = \frac{\overset{g}{r}}{n} g$$

и идентитета (2.4.8), имамо $0 = \overset{g}{r}\pi(X)$, одакле је $\overset{g}{r} = 0$. Сада претходна једначина даје $\overset{g}{Ric} = 0$, на основу чега доносимо следећи закључак.

Теорема 2.4.11 *Ајнштајнова Лоренцова многострукост $(\mathcal{M}, g, \overset{1}{\nabla})$ је Ричи равна.*

Ако за Риманов тензор кривине важи

$$\overset{g}{R}(X,Y)Z = f(g(Y,Z)X - g(X,Z)Y) + h(g(Y,Z)\pi(X) - g(X,Z)\pi(Y))P + h\pi(Z)(\pi(Y)X - \pi(X)Y),$$

где су f и h диференцијабилне функције, тада је таква многострукост *квази-константне кривине.*

На основу (2.4.4), видимо да из $\overset{1}{R} = 0$ следи

$$\overset{g}{R}(X,Y)Z = -(g(Y,Z)X - g(X,Z)Y) - (g(Y,Z)\pi(X) - g(X,Z)\pi(Y))P - \pi(Z)(\pi(Y)X - \pi(X)Y), \quad (2.4.17)$$

што ћемо формулисати у наредној теореми.

Теорема 2.4.12 *Ако у Лоренцовој многострукости* $(\mathcal{M}, g, \overset{1}{\nabla})$ *ишчезава тензор кривине специјалне полу-симетричне метричке конексије, тада је ова многострукост квази-константне кривине.*

Даље, контракцијом по X у претходној једначини добијамо

$$\overset{g}{Ric} = -(n-2)(g + \pi \otimes \pi). \quad (2.4.18)$$

Теорема 2.4.13 *Лоренцова многострукости* $(\mathcal{M}, g, \overset{1}{\nabla})$ *чији тензор кривине специјалне полу-симетричне метричке конексије* $\overset{1}{\nabla}$ *ишчезава представља идеалан флуид.*

Поред тога, претходна једначина се може добити и из (2.4.5) за $\overset{1}{Ric} = 0$. Приметимо да је скаларна кривина идеалног флуида (2.4.18) негативна, тј. $\overset{g}{r} = -(n-1)(n-2)$ за $n > 2$. Следећа два тврђења су последица Теореме 2.4.6 и 2.4.7.

Последица 2.4.1 *Ако у Лоренцовој многострукости* $(\mathcal{M}, g, \overset{1}{\nabla})$ *ишчезава Ричијев тензор специјалне полу-симетричне метричке конексије* $\overset{1}{\nabla}$*, тада је ова многострукост идеалан флуид.*

Последица 2.4.2 *Ако у Лоренцовој многострукости* $(\mathcal{M}, g, \overset{1}{\nabla})$ *ишчезава конциркуларни тензор кривине специјалне полу-симетричне метричке конексије* $\overset{1}{\nabla}$*, тада је ова многострукост идеалан флуид.*

Ако у Лоренцовој многострукости $(\mathcal{M}, g, \overset{1}{\nabla})$ посматрамо Ричијев солитон у односу на $\overset{1}{\nabla}$, облика (2.4.14), тада Теорема 2.4.9 имплицира наредно тврђење.

Теорема 2.4.14 *Нека је* $(\mathcal{M}, g, \overset{1}{\nabla})$ *Лоренцова многострукост са специјалном полу-симетричном метричком конексијом* $\overset{1}{\nabla}$*. Ричијев солитон облика (2.4.14) је стабилан и представља идеалан флуид чији Ричијев тензор има једначину*

$$\overset{g}{Ric} = -(n-3)(g + \pi \otimes \pi).$$

Напомена 2.4.1 *Лоренцове многострукости са паралелним изотропним вектором се називају* Бринкманове многострукости. *На основу Теореме 2.4.2 и 2.4.5, у таквим многострукостима скалар кривине и конхармонијски тензор се не мењају када прелазимо са* $\overset{g}{\nabla}$ *на* $\overset{1}{\nabla}$.

2.4.3 Примена на теорију релативности

Овде ћемо се бавити применом специјалне полу-симетричне метричке конексије на теорију релативности и посматраћемо Ајнштајнову једначину без космолошке константе (2.3.28). Јасно је да је за идеалан флуид дивергенција тензора енергије-импулса (2.3.31) једнака нули за специјалну полу-симетричну метричку конексију.

У претходном делу рада смо представили облик Ричијевог тензора у четвородимензионалном идеалном флуиду који задовољава Ајнштајнову једначину без космолошке константе, а сада ћемо то урадити за произвољну димензију n. На основу једначина (2.3.28) и (2.3.31) добијамо

$$\overset{g}{Ric} = \frac{1}{2}(\overset{g}{r} + 2kp)g + k(\sigma + p)\pi \otimes \pi.$$

Контракцијом ове једначине добијамо скалар кривине

$$\overset{g}{r} = \frac{2k}{n-2}(\sigma - (n-1)p),$$

па се Ричијев тензор идеалног флуида који задовољава Ајнштајнову једначину без космолошке константе записује у облику

$$\overset{g}{Ric} = \frac{k(\sigma - p)}{n-2}g + k(\sigma + p)\pi \otimes \pi. \tag{2.4.19}$$

Пошто за идеалан флуид $(\mathcal{M}, g, \overset{1}{\nabla})$ Ричијев тензор има облик (2.4.16), упоређивањем ове једначине са (2.4.19) добијамо

$$\frac{k(\sigma - p)}{n-2} = k(\sigma + p),$$

одакле се добија следећа једначина стања

$$\frac{p}{\sigma} = \frac{3-n}{n-1}.$$

Теорема 2.4.15 *Идеалан флуид* $(\mathcal{M}, g, \overset{1}{\nabla})$ *који задовољава Ајнштајнову једначину без космолошке константе има једначину стања* $\frac{p}{\sigma} = \frac{3-n}{n-1}$.

За димензију $n = 4$, једначина стања има вредност $\frac{p}{\sigma} = -\frac{1}{3}$, а то је гранична вредност за нарушавање јаког услова енергије, односно гранична вредност за тамну енергију, која је одговорна за ширење универзума.

2.5 Пројективна полу-симетрична конексија

За две конексије кажемо да су *пројективно еквивалентне* ако имају исте геодезијске линије. Ако посматрамо полу-симетричну конексију $\overset{1}{\nabla}$ као пројективно еквивалентну са Леви-Чивита конексијом $\overset{g}{\nabla}$, тада се она зове *пројективна полу-симетрична конексија.* Идеју о оваквој конексији су увели П. Жао и Х. Сонг [140] и она је дата релацијом

$$\overset{1}{\nabla}_X Y = \overset{g}{\nabla}_X Y + \psi(Y)X + \psi(X)Y + \eta(Y)X - \eta(X)Y, \tag{2.5.1}$$

где су ψ и η ковектори дати једначинама

$$\psi(X) = \frac{n-1}{2(n+1)}\pi(X), \quad \eta(X) = \frac{1}{2}\pi(X).$$

Лако се проверава да конексија $\overset{1}{\nabla}$, дата једначином (2.5.1), није метричка, односно да важи

$$\begin{aligned}(\overset{1}{\nabla}_X g)(Y,Z) &= Xg(Y,Z) - g(\overset{1}{\nabla}_X Y, Z) - g(Y, \overset{1}{\nabla}_X Z)\\ &= \frac{1}{n+1}(2\pi(X)g(Y,Z) - n\pi(Y)g(X,Z) - n\pi(Z)g(X,Y)).\end{aligned}$$

Коришћењем формуле (1.5.2) за симетричну конексију, на основу једначине (2.5.1) можемо се уверити да се веза између симетричне конексије $\overset{0}{\nabla}$ и Леви-Чивита конексије $\overset{g}{\nabla}$, може представити наредном релацијом

$$\overset{0}{\nabla}_X Y = \overset{g}{\nabla}_X Y + \psi(Y)X + \psi(X)Y,$$

која представља једначину за пројективна (тј. геодезијска) пресликавања, при којима се чувају геодезијске линије (нпр. видети [70]).

Линеарно независни тензори кривине пројективне полу-симетричне конексије (2.5.1) су представљени наредним тврђењем.

Теорема 2.5.1 *Нека је $(\mathcal{M}, g, \overset{1}{\nabla})$ Риманова многострукост са пројективном полу-симетричном конексијом $\overset{1}{\nabla}$, која је дата једначином (2.5.1). Тензори кривине $\overset{\theta}{R}$, $\theta = 0,1,2,\ldots,5$, су са Римановим тензором кривине $\overset{g}{R}$ повезани следећим једначинама*

$$\begin{aligned}\overset{0}{R}(X,Y)Z =& \overset{g}{R}(X,Y)Z + \frac{n-1}{2(n+1)}\big((\overset{g}{\nabla}_X\pi)(Y) - (\overset{g}{\nabla}_Y\pi)(X)\big)Z\\ &+ \frac{n-1}{2(n+1)}\big((\overset{g}{\nabla}_X\pi)(Z)Y - (\overset{g}{\nabla}_Y\pi)(Z)X\big) + \frac{(n-1)^2}{4(n+1)^2}\pi(Z)\big(\pi(Y)X - \pi(X)Y\big),\end{aligned}\tag{2.5.2}$$

$$\begin{aligned}\overset{1}{R}(X,Y)Z =& \overset{g}{R}(X,Y)Z - \frac{1}{n+1}\big((\overset{g}{\nabla}_X\pi)(Y) - (\overset{g}{\nabla}_Y\pi)(X)\big)Z\\ &+ \frac{n}{n+1}\big((\overset{g}{\nabla}_X\pi)(Z)Y - (\overset{g}{\nabla}_Y\pi)(Z)X\big) + \frac{n^2}{(n+1)^2}\pi(Z)\big(\pi(Y)X - \pi(X)Y\big),\end{aligned}\tag{2.5.3}$$

$$\begin{aligned}\overset{2}{R}(X,Y)Z =& \overset{g}{R}(X,Y)Z + \frac{n}{n+1}\big((\overset{g}{\nabla}_X\pi)(Y) - (\overset{g}{\nabla}_Y\pi)(X)\big)Z\\ &- \frac{1}{n+1}\big((\overset{g}{\nabla}_X\pi)(Z)Y - (\overset{g}{\nabla}_Y\pi)(Z)X\big) + \frac{1}{(n+1)^2}\pi(Z)\big(\pi(Y)X - \pi(X)Y\big),\end{aligned}\tag{2.5.4}$$

$$\begin{aligned}\overset{3}{R}(X,Y)Z =& \overset{g}{R}(X,Y)Z + \frac{n}{n+1}\big((\overset{g}{\nabla}_X\pi)(Z)Y - (\overset{g}{\nabla}_Y\pi)(X)Z\big) + \frac{1}{(n+1)^2}\pi(Y)\pi(Z)X\\ &+ \frac{1}{n+1}\big((\overset{g}{\nabla}_Y\pi)(Z)X - (\overset{g}{\nabla}_X\pi)(Y)Z\big) - \frac{n^2}{(n+1)^2}\pi(X)\pi(Z)Y + \frac{n-1}{n+1}\pi(Y)\pi(X)Z,\end{aligned}\tag{2.5.5}$$

$$\begin{aligned}\overset{4}{R}(X,Y)Z =& \overset{g}{R}(X,Y)Z + \frac{n}{n+1}\big((\overset{g}{\nabla}_X\pi)(Z)Y - (\overset{g}{\nabla}_Y\pi)(X)Z\big) - \frac{n^2+2n}{(n+1)^2}\pi(Y)\pi(Z)X\\ &+ \frac{1}{n+1}\big((\overset{g}{\nabla}_Y\pi)(Z)X - (\overset{g}{\nabla}_X\pi)(Y)Z\big) + \frac{2n+1}{(n+1)^2}\pi(X)\pi(Z)Y + \frac{n-1}{n+1}\pi(Y)\pi(X)Z,\end{aligned}\tag{2.5.6}$$

$$\begin{aligned}\overset{5}{R}(X,Y)Z =& \overset{g}{R}(X,Y)Z + \frac{n-1}{2(n+1)}\big((\overset{g}{\nabla}_X\pi)(Y) - (\overset{g}{\nabla}_Y\pi)(X)\big)Z\\ &+ \frac{n-1}{2(n+1)}\big((\overset{g}{\nabla}_X\pi)(Z)Y - (\overset{g}{\nabla}_Y\pi)(Z)X\big) + \frac{(n-1)^2}{4(n+1)^2}\pi(Z)\big(\pi(Y)X - \pi(X)Y\big)\\ &- \frac{1}{4}\pi(Z)\big(\pi(Y)X + \pi(X)Y\big) + \frac{1}{2}\pi(X)\pi(Y)Z.\end{aligned}\tag{2.5.7}$$

Контракцијом по вектору X у једначинама (2.5.2)–(2.5.7) из претходне теореме добијамо одговарајуће релације између Ричијевих тензора $\overset{\theta}{Ric}$, $\theta = 0,1,\ldots,5$ и $\overset{g}{Ric}$.

Теорема 2.5.2 *Нека је $(\mathcal{M}, g, \overset{1}{\nabla})$ Риманова многострукост са пројективном полу-симетричном конексијом $\overset{1}{\nabla}$, која је дата једначином (2.5.1). Ричијеви тензори $\overset{\theta}{Ric}$, $\theta = 0, 1, 2, \dots, 5$, су са Ричијевим тензором $\overset{g}{Ric}$ повезани следећим једначинама*

$$\begin{aligned}
\overset{0}{Ric}(Y,Z) =& \overset{g}{Ric}(Y,Z) - \frac{n(n-1)}{2(n+1)}(\overset{g}{\nabla}_Y\pi)(Z) + \frac{n-1}{2(n+1)}(\overset{g}{\nabla}_Z\pi)(Y) + \frac{(n-1)^3}{4(n+1)^2}\pi(Y)\pi(Z),\\
\overset{1}{Ric}(Y,Z) =& \overset{g}{Ric}(Y,Z) - \frac{n^2-n-1}{n+1}(\overset{g}{\nabla}_Y\pi)(Z) - \frac{1}{n+1}(\overset{g}{\nabla}_Z\pi)(Y) + \frac{n^2(n-1)}{(n+1)^2}\pi(Y)\pi(Z),\\
\overset{2}{Ric}(Y,Z) =& \overset{g}{Ric}(Y,Z) - \frac{1}{n+1}(\overset{g}{\nabla}_Y\pi)(Z) + \frac{n}{n+1}(\overset{g}{\nabla}_Z\pi)(Y) + \frac{n-1}{(n+1)^2}\pi(Y)\pi(Z),\\
\overset{3}{Ric}(Y,Z) =& \overset{g}{Ric}(Y,Z) + \frac{n}{n+1}(\overset{g}{\nabla}_Y\pi)(Z) - \frac{1}{n+1}(\overset{g}{\nabla}_Z\pi)(Y) + \frac{n-1}{(n+1)^2}\pi(Y)\pi(Z),\\
\overset{4}{Ric}(Y,Z) =& \overset{g}{Ric}(Y,Z) + \frac{n}{n+1}(\overset{g}{\nabla}_Y\pi)(Z) - \frac{1}{n+1}(\overset{g}{\nabla}_Z\pi)(Y) - \frac{n(n^2+n-2)}{(n+1)^2}\pi(Y)\pi(Z),\\
\overset{5}{Ric}(Y,Z) =& \overset{g}{Ric}(Y,Z) - \frac{n(n-1)}{2(n+1)}(\overset{g}{\nabla}_Y\pi)(Z) + \frac{n-1}{2(n+1)}(\overset{g}{\nabla}_Z\pi)(Y) + \frac{n(n-1)}{(n+1)^2}\pi(Y)\pi(Z).
\end{aligned}$$

Особина симетричности претходних Ричијевих тензора $\overset{\theta}{Ric}$, $\theta = 0, 1, 2, \dots, 5$ је повезана са особином затворености ковектора π, што је представљено наредном теоремом.

Теорема 2.5.3 *Ричијеви тензори $\overset{\theta}{Ric}$, $\theta = 0, 1, 2, \dots, 5$, пројективне полу-симетричне конексије (2.5.1) су симетрични ако и само ако је ковектор π затворен.*

Доказ: Видети доказ Теореме 3.6 у раду [87]. □

Поред тога, и ишчезавање Ричијевих тензор $\overset{\theta}{Ric}$, $\theta = 0, 1, 2, \dots, 5$, имплицира затвореност ковектора π.

Теорема 2.5.4 *Ако је било који Ричијев тензор $\overset{\theta}{Ric}$, $\theta = 0, 1, 2, \dots, 5$, пројективне полу-симетричне конексије (2.5.1), једнак нули, тада је ковектор π затворен.*

Доказ: На пример, ако је $\overset{5}{Ric} = 0$, тада имамо

$$\overset{g}{Ric}(Y,Z) = \frac{n(n-1)}{2(n+1)}(\overset{g}{\nabla}_Y\pi)(Z) - \frac{n-1}{2(n+1)}(\overset{g}{\nabla}_Z\pi)(Y) - \frac{n(n-1)}{(n+1)^2}\pi(Y)\pi(Z). \tag{2.5.8}$$

Анти-симетризацијом ове једначине налазимо да је

$$\frac{n-1}{2}((\overset{g}{\nabla}_Y\pi)(Z) - (\overset{g}{\nabla}_Z\pi)(Y)) = \frac{n-1}{2}\mathrm{d}\pi(Y,Z) = 0, \tag{2.5.9}$$

чиме смо доказали теорему. □

Надаље ћемо проучавати тензоре кривине $\overset{\theta}{R}$, $\theta = 0, 1, \dots, 5$. Полазећи од једначине сваког линеарно независног тензора кривине, одредићемо тензоре коју су независни од генератора π пројективне полу-симетричне конексије, који се, као што ћемо видети, поклапају са Вејловим пројективним тензором кривине $\overset{g}{W}$, што нам даје потребне и довољне услове да посматрана многострукост буде пројективно равна када они нестају. Најпре ћемо детаљно описати поступак за тензоре кривине пројективне полу-симетричне конексије $\overset{1}{\nabla}$ и симетричне конексије $\overset{0}{\nabla}$, тј. за тензоре $\overset{1}{R}$ и $\overset{0}{R}$, при чему ћемо користити формуле (2.5.10) и (2.5.15), а онда ћемо за тензоре кривине $\overset{3}{R}$ и $\overset{5}{R}$ користити развијене формуле представљене у Теореми 2.5.1, при чему ћемо из тих формула елиминисати изразе који се односе на генератор π, тј. изразе $\overset{g}{\nabla}\pi$ и $\pi \otimes \pi$.

2.5.1 Тензор кривине нулте врсте

Релација (2.5.2) из Теореме 2.5.1 се може записати као

$$\overset{0}{R}(X,Y)Z=\overset{g}{R}(X,Y)Z+\overset{0}{\alpha}(X,Z)Y-\overset{0}{\alpha}(Y,Z)X+\overset{0}{\beta}(X,Y)Z, \tag{2.5.10}$$

где је

$$\overset{0}{\alpha}(X,Y)=\frac{n-1}{2(n+1)}(\overset{g}{\nabla}_X\pi)(Y)-\frac{(n-1)^2}{4(n+1)^2}\pi(X)\pi(Y)$$

и

$$\overset{0}{\beta}(X,Y)=\overset{0}{\alpha}(X,Y)-\overset{0}{\alpha}(Y,X).$$

Контракцијом по вектору X у једначини (2.5.10), добијамо израз за Ричијев тензор $\overset{0}{Ric}$ у следећем облику

$$\overset{0}{Ric}(Y,Z)=\overset{g}{Ric}(Y,Z)-(n-1)\overset{0}{\alpha}(Y,Z)+\overset{0}{\beta}(Z,Y). \tag{2.5.11}$$

Након анти-симетризације у последњој релацији по векторима Y и Z, при чему узимамо у обзир да је Ричијев тензор $\overset{g}{Ric}$ симетричан, имамо једначину

$$\overset{0}{Ric}(Y,Z)-\overset{0}{Ric}(Z,Y)=-(n-1)\overset{0}{\beta}(Y,Z)+2\overset{0}{\beta}(Z,Y),$$

одакле је

$$\overset{0}{\beta}(Z,Y)=\frac{1}{n+1}(\overset{0}{Ric}(Y,Z)-\overset{0}{Ric}(Z,Y)), \tag{2.5.12}$$

што након замене у (2.5.11) даје израз тензора $\overset{0}{\alpha}$ преко одговарајућих Ричијевих тензора

$$\overset{0}{\alpha}(Y,Z)=-\frac{n}{n^2-1}\overset{0}{Ric}(Y,Z)-\frac{1}{n^2-1}\overset{0}{Ric}(Z,Y)+\frac{1}{n-1}\overset{g}{Ric}(Y,Z). \tag{2.5.13}$$

Сада, коришћењем претходне две једначине у (2.5.10), добијамо тензор $\overset{0}{W}$ који не зависи од ковектора π и за који важи једначина

$$\overset{0}{W}(X,Y)Z=\overset{g}{W}(X,Y)Z,$$

где је

$$\begin{aligned}\overset{0}{W}(X,Y)Z=&\overset{0}{R}(X,Y)Z+\frac{n}{n^2-1}\big(\overset{0}{Ric}(X,Z)Y-\overset{0}{Ric}(Y,Z)X\big)\\&+\frac{1}{n^2-1}\big(\overset{0}{Ric}(Z,X)Y-\overset{0}{Ric}(Z,Y)X\big)+\frac{1}{n+1}\big(\overset{0}{Ric}(X,Y)-\overset{0}{Ric}(Y,X)\big)Z\end{aligned} \tag{2.5.14}$$

и $\overset{g}{W}$ је Вејлов пројективни тензор кривине (1.7.5). Тензор $\overset{0}{W}$ дат једначином (2.5.14) је познат као *Вејлов пројективни тензор кривине симетричне конексије* (нпр. видети [70]).

Теорема 2.5.5 *Нека је $(\mathcal{M},g,\overset{1}{\nabla})$ Риманова многострукост са пројективном полу-симетричном конексијом $\overset{1}{\nabla}$, тензор $\overset{0}{W}$ дат једначином (2.5.14) и $\overset{g}{W}$ Вејлов пројективни тензор кривине (1.7.5). Тада је:*

(i) $\overset{0}{W}=\overset{g}{W}$,

(ii) Ако Ричијев тензор $\overset{0}{Ric}$ ишчезава, тада је $\overset{0}{W}=\overset{0}{R}$,

(iii) Ако је ковектор π затворен тада тензор $\overset{0}{W}$ добија облик

$$\overset{0}{W}(X,Y)Z=\overset{0}{R}(X,Y)Z+\frac{1}{n-1}\big(\overset{0}{Ric}(X,Z)Y-\overset{0}{Ric}(Y,Z)X\big).$$

Доказ: Тврђење (*iii*) се доказује коришћењем Теореме 2.5.3. □

2.5.2 Тензор кривине прве врсте

Једначина (2.5.3) за тензор кривине пројективне полу-симетричне конексије $\overset{1}{\nabla}$ се може записати у облику

$$\overset{1}{R}(X,Y)Z = \overset{g}{R}(X,Y)Z + \overset{1}{\alpha}(X,Z)Y - \overset{1}{\alpha}(Y,Z)X + \overset{1}{\beta}(X,Y)Z, \tag{2.5.15}$$

где су $\overset{1}{\alpha}$ и $\overset{1}{\beta}$ тензори типа (0,2), дати једначинама

$$\overset{1}{\alpha}(X,Y) = \frac{n}{n+1}(\overset{g}{\nabla}_X\pi)(Y) - \frac{n^2}{(n+1)^2}\pi(X)\pi(Y)$$

и

$$\overset{1}{\beta}(X,Y) = \frac{1}{n+1}\big((\overset{g}{\nabla}_Y\pi)(X) - (\overset{g}{\nabla}_X\pi)(Y)\big) = \frac{1}{n}(\overset{1}{\alpha}(Y,X) - \overset{1}{\alpha}(X,Y)).$$

Видимо да је $\overset{1}{\beta}$ анти-симетрична билинеарна форма, тј. $\overset{1}{\beta}(X,Y) = -\overset{1}{\beta}(Y,X)$, што ћемо користити у наставку. Контракцијом по X у једначини (2.5.15) одређујемо Ричијев тензор конексије $\overset{1}{\nabla}$

$$\overset{1}{Ric}(Y,Z) = \overset{g}{Ric}(Y,Z) - (n-1)\overset{1}{\alpha}(Y,Z) + \overset{1}{\beta}(Z,Y), \tag{2.5.16}$$

који након анти-симетризације по векторима Y и Z даје следећу једначину

$$\overset{1}{Ric}(Y,Z) - \overset{1}{Ric}(Z,Y) = n\overset{1}{\beta}(Z,Y) - n^2\overset{1}{\beta}(Z,Y) + 2\overset{1}{\beta}(Z,Y), \tag{2.5.17}$$

где смо узели у обзир да је Ричијев тензор $\overset{g}{Ric}$ симетричан и да је $\overset{1}{\beta}$ анти-симетричан (0,2)-тензор, тј. 2-форма. Даље, из претходне релације се може одредити израз за тензор $\overset{1}{\beta}$

$$\overset{1}{Ric}(Y,Z) - \overset{1}{Ric}(Z,Y) = (n^2-n-2)\overset{1}{\beta}(Y,Z),$$

што након замене у (2.5.16) даје израз тензора $\overset{1}{\alpha}$ у зависности од Ричијевих тензора $\overset{1}{Ric}$ и $\overset{g}{Ric}$

$$(n-1)\overset{1}{\alpha}(Y,Z) = \overset{g}{Ric}(Y,Z) - \overset{1}{Ric}(Y,Z) - \frac{1}{(n^2-n-2)}\big(\overset{1}{Ric}(Y,Z) - \overset{1}{Ric}(Z,Y)\big).$$

Заменом претходне две једначине у (2.5.15), добијамо

$$\begin{aligned}\overset{1}{R}(X,Y)Z =& \overset{g}{R}(X,Y)Z + \frac{1}{n-1}\big(\overset{g}{Ric}(X,Z) - \overset{1}{Ric}(X,Z)\big)Y - \frac{1}{n-1}\big(\overset{g}{Ric}(Y,Z) - \overset{1}{Ric}(Y,Z)\big)X\\ &- \frac{1}{(n-1)(n^2-n-2)}\Big(\big(\overset{1}{Ric}(X,Z) - \overset{1}{Ric}(Z,X)\big)Y - \big(\overset{1}{Ric}(Y,Z) - \overset{1}{Ric}(Z,Y)\big)X\Big)\\ &+ \frac{1}{n^2-n-2}\big(\overset{1}{Ric}(X,Y) - \overset{1}{Ric}(Y,X)\big)Z,\end{aligned}$$

или у једноставнијем запису

$$\overset{1}{W}(X,Y)Z = \overset{g}{W}(X,Y)Z,$$

где је

$$\begin{aligned}\overset{1}{W}(X,Y)Z =& \overset{1}{R}(X,Y)Z + \frac{1}{(n-1)(n^2-n-2)}\big((n^2-n-1)\overset{1}{Ric}(X,Z) - \overset{1}{Ric}(Z,X)\big)Y\\ &- \frac{1}{(n-1)(n^2-n-2)}\big((n^2-n-1)\overset{1}{Ric}(Y,Z) - \overset{1}{Ric}(Z,Y)\big)X\\ &- \frac{1}{n^2-n-2}\big(\overset{1}{Ric}(X,Y) - \overset{1}{Ric}(Y,X)\big)Z.\end{aligned} \tag{2.5.18}$$

Тензор $\overset{1}{W}$, који је независан од генератора π пројективне полу-симетричне конексије $\overset{1}{\nabla}$, одређен је у раду[2] [140].

Теорема 2.5.6 *Нека је* $(\mathcal{M}, g, \overset{1}{\nabla})$ *Риманова многострукост са пројективном полу-симетричном конексијом (2.5.1),* $\overset{1}{W}$ *тензор дат једначином (2.5.18) и* $\overset{g}{W}$ *Вејлов пројективни тензор кривине (1.7.5). Тада је:*

(i) $\overset{1}{W} = \overset{g}{W}$,

(ii) Ако Ричијев тензор $\overset{1}{Ric}$ *ишчезава, тада је* $\overset{1}{W} = \overset{1}{R}$,

(iii) Ако је ковектор π *затворен тада тензор* $\overset{1}{W}$ *добија облик*

$$\overset{1}{W}(X,Y)Z = \overset{1}{R}(X,Y)Z + \frac{1}{n-1}\big(\overset{1}{Ric}(X,Z)Y - \overset{1}{Ric}(Y,Z)X\big).$$

2.5.3 Тензор кривине друге врсте

Једначина (2.5.4) за тензор кривине друге врсте се може записати у облику

$$\overset{2}{R}(X,Y)Z = \overset{g}{R}(X,Y)Z - \gamma(X,Z)Y + \gamma(Y,Z)X + n(\gamma(X,Y) - \gamma(Y,X))Z, \tag{2.5.19}$$

где је γ (0,2)-тензор дат једначином

$$\gamma(X,Y) = \frac{1}{n+1}(\overset{g}{\nabla}_X \pi)(Y) + \frac{1}{(n+1)^2}\pi(X)\pi(Y).$$

Коришћењем поступка који је приказан код тензора кривине $\overset{0}{R}$ и $\overset{1}{R}$, помоћу релације (2.5.19) можемо одредити тензор $\overset{2}{W}$ који не зависи од генератора π и задовољава једначину

$$\overset{2}{W}(X,Y)Z = \overset{g}{W}(X,Y)Z,$$

где је

$$\begin{aligned}\overset{2}{W}(X,Y)Z =& \overset{2}{R}(X,Y)Z + \frac{1}{(n-1)(n^2-1)}\big((n^2-1)\overset{2}{Ric}(Z,X) + {}'\overset{2}{R}(Z,X)\big)Y \\ &- \frac{1}{(n-1)(n^2-1)}\big((n^2-1)\overset{2}{Ric}(Z,Y) + {}'\overset{2}{R}(Z,Y)\big)X - \frac{n}{n^2-1}{}'\overset{2}{R}(X,Y)Z\end{aligned} \tag{2.5.20}$$

и (0,2)-тензор ${}'\overset{2}{R}$ је дефинисан релацијом ${}'\overset{2}{R}(X,Y) = \operatorname{trace}\{Z \to \overset{2}{R}(X,Y)Z\}$, при чему се у поступку користи чињеница да је $\operatorname{trace}\{Z \to \overset{g}{R}(X,Y)Z\} = 0$. На основу једначине (2.5.19) се лако доказује да важи

$$\overset{2}{Ric}(Y,Z) - \overset{2}{Ric}(Z,Y) = -\frac{1}{n-1}{}'\overset{2}{R}(Y,Z),$$

одакле видимо да је тензор ${}'\overset{2}{R}$ анти-симетричан. Ако је 1-форма π затворена, тада је ${}'\overset{2}{R} = 0$ (јер је у том случају $\overset{2}{Ric}$ симетричан). На овај начин смо доказали наредну теорему.

---

[2] Разлика између формуле (15) из тог рада и наше формуле (2.5.18) је у знаковима неких коефицијената, јер у том раду постоји техничка грешка, где уместо знака $-$ стоји $+$.

Теорема 2.5.7 *Нека је* $(\mathcal{M}, g, \overset{1}{\nabla})$ *Риманова многострукост са пројективном полу-симетричном конексијом (2.5.1),* $\overset{2}{W}$ *тензор дат једначином (2.5.20) и* $\overset{g}{W}$ *Вејлов пројективни тензор кривине (1.7.5). Тада је:*

(i) $\overset{2}{W} = \overset{g}{W}$,

(ii) Ако Ричијев тензор $\overset{2}{Ric}$ *ишчезава, тада је* $\overset{2}{W} = \overset{2}{R}$,

(iii) Ако је ковектор π *затворен тада тензор* $\overset{2}{W}$ *добија облик*

$$\overset{2}{W}(X,Y)Z = \overset{2}{R}(X,Y)Z + \frac{1}{n-1}\big(\overset{2}{Ric}(X,Z)Y - \overset{2}{Ric}(Y,Z)X\big).$$

2.5.4 Тензор кривине треће врсте

За одређивање тензора независног од генератора пројективне полу-симетричне конексије, на основу тензора кривине треће врсте, крећемо од једначине (2.5.5), као и од одговарајуће једначине између Ричијевих тензора, која гласи

$$\overset{3}{Ric}(Y,Z) = \overset{g}{Ric}(Y,Z) + \frac{n}{n+1}(\overset{g}{\nabla}_Y\pi)(Z) - \frac{1}{n+1}(\overset{g}{\nabla}_Z\pi)(Y) + \frac{n-1}{(n+1)^2}\pi(Y)\pi(Z). \tag{2.5.21}$$

Ако извршимо контракцију по вектору Z у једначини (2.5.5), имамо

$$'\overset{3}{R}(X,Y) := \mathrm{trace}\{Z \to \overset{3}{R}(X,Y)Z\} = (n-1)\Big(\frac{n-1}{n+1}\pi(X)\pi(Y) - (\overset{g}{\nabla}_Y\pi)(X)\Big). \tag{2.5.22}$$

Комбинацијом претходне две једначине, налазимо да важи

$$\begin{aligned}\frac{1}{n+1}(\overset{g}{\nabla}_Y\pi)(Z) =& \frac{1}{n}\Big(\overset{3}{Ric}(Y,Z) - \overset{g}{Ric}(Y,Z) - \frac{1}{n^2-1}{}'\overset{3}{R}(Y,Z)\Big),\\ \frac{1}{n+1}\pi(Y)\pi(Z) =& \frac{n+1}{n(n-1)}\overset{3}{Ric}(Y,Z) - \frac{n+1}{n(n-1)}\overset{g}{Ric}(Y,Z) - \frac{1}{n(n-1)^2}{}'\overset{3}{R}(Y,Z) + \frac{1}{(n-1)^2}{}'\overset{3}{R}(Z,Y).\end{aligned}$$

Ако последња два израза заменимо у једначину тензора кривине треће врсте (2.5.5), тада добијамо

$$\overset{3}{W}(X,Y)Z = \overset{g}{W}(X,Y)Z,$$

где је

$$\begin{aligned}\overset{3}{W}(X,Y)Z =& \overset{3}{R}(X,Y)Z + \frac{1}{n-1}\big(\overset{3}{Ric}(X,Z)Y - \overset{3}{Ric}(Y,Z)X\big) - \big(\overset{3}{Ric}(X,Y) - \overset{3}{Ric}(Y,X)\big)Z\\ &- \frac{1}{(n^2-1)(n-1)}\big(({}'\overset{3}{R}(X,Z) - n^2\,{}'\overset{3}{R}(Z,X))Y - ({}'\overset{3}{R}(Y,Z) - {}'\overset{3}{R}(Z,Y))X\big)\\ &+ \frac{1}{n^2-1}\big({}'\overset{3}{R}(X,Y) - (n+2)\,{}'\overset{3}{R}(Y,X)\big)Z.\end{aligned} \tag{2.5.23}$$

Дакле, видимо да је тензор $\overset{3}{W}$ независан од 1-форме π. Ако упоредимо резултате које добијамо анти-симетризацијом једначина (2.5.21) и (2.5.22), увериђемо се да важи следећа релација

$$\overset{3}{Ric}(Y,Z) - \overset{3}{Ric}(Z,Y) = \frac{1}{n-1}({}'\overset{3}{R}(Y,Z) - {}'\overset{3}{R}(Z,Y)).$$

која нам говори да је у случају затворене 1-форме π и тензор ${}'\overset{3}{R}$ симетричан. Претходне закључке ћемо формулисати у наредној теореми.

Теорема 2.5.8 *Нека је* $(\mathcal{M}, g, \overset{1}{\nabla})$ *Риманова многострукост са пројективном полу-симетричном конексијом* (2.5.1), $\overset{3}{W}$ *тензор дат једначином* (2.5.23) *и* $\overset{g}{W}$ *Вејлов пројективни тензор кривине* (1.7.5). *Тада је:*

(*i*) $\overset{2}{W} = \overset{g}{W}$,

(*ii*) *Ако ишчезава Ричијев тензор* $\overset{3}{Ric}$ *и тензор* $'\overset{3}{R}$ *тада је* $\overset{3}{W} = \overset{3}{R}$,

(*iii*) *Ако је ковектор* π *затворен тада тензор* $\overset{3}{W}$ *добија облик*

$$\overset{3}{W}(X,Y)Z = \overset{3}{R}(X,Y)Z + \frac{1}{n-1}\big(\overset{3}{Ric}(X,Z)Y - \overset{3}{Ric}(Y,Z)X\big) + \frac{1}{n-1}\big('\overset{3}{R}(X,Z)Y - '\overset{3}{R}(X,Y)Z\big).$$

2.5.5 Тензор кривине четврте врсте

Полазећи од једначине тензора кривине четврте врсте (2.5.6), сличним поступком као и за тензор кривине треће врсте $\overset{3}{R}$, можемо одредити тензор

$$\begin{aligned}\overset{4}{W}(X,Y)Z =& \overset{4}{R}(X,Y)Z + \frac{1}{n-1}\big(\overset{4}{Ric}(X,Z)Y - \overset{4}{Ric}(Y,Z)X\big)\\ &- \frac{1}{(n^2-1)(n-1)}\Big(\big('\overset{4}{R}(X,Z) - n^2\,'\overset{4}{R}(Z,X)\big)Y - \big('\overset{4}{R}(Y,Z) - '\overset{4}{R}(Z,Y)\big)X\Big)\\ &- \frac{1}{n^2-1}\big(n\,'\overset{4}{R}(X,Y) + '\overset{4}{R}(Y,X)\big)Z.\end{aligned} \tag{2.5.24}$$

који задовољава релацију $\overset{4}{W} = \overset{g}{W}$. За тензор $'\overset{4}{R}$, који се дефинише преко трага тензора $\overset{4}{R}(X,Y)Z$ по пољу Z, се лако показује да је симетричан када је ковектор π затворен, па смо тако доказали наредну теорему.

Теорема 2.5.9 *Нека је* $(\mathcal{M}, g, \overset{1}{\nabla})$ *Риманова многострукост са пројективном полу-симетричном конексијом* (2.5.1), $\overset{4}{W}$ *тензор дат једначином* (2.5.24) *и* $\overset{g}{W}$ *Вејлов пројективни тензор кривине* (1.7.5). *Тада је:*

(*i*) $\overset{4}{W} = \overset{g}{W}$,

(*ii*) *Ако тензори* $\overset{4}{Ric}$ *и* $'\overset{4}{R}$ *ишчезавају, тада је* $\overset{4}{W} = \overset{4}{R}$,

(*iii*) *Ако је ковектор* π *затворен тада тензор* $\overset{4}{W}$ *добија облик*

$$\overset{4}{W}(X,Y)Z = \overset{4}{R}(X,Y)Z + \frac{1}{n-1}\big(\overset{4}{Ric}(X,Z)Y - \overset{4}{Ric}(Y,Z)X\big) + \frac{1}{n-1}\big('\overset{4}{R}(X,Z)Y - '\overset{4}{R}(X,Y)Z\big).$$

2.5.6 Тензор кривине пете врсте

У случају тензора кривине $\overset{5}{R}$ крећемо од једначине (2.5.7) коју ћемо, због прегледности поступка, записати поново

$$\begin{aligned}\overset{5}{R}(X,Y)Z =& \overset{g}{R}(X,Y)Z + \frac{n-1}{2(n+1)}\big((\overset{g}{\nabla}_X\pi)(Y) - (\overset{g}{\nabla}_Y\pi)(X)\big)Z + \frac{n-1}{2(n+1)}\big((\overset{g}{\nabla}_X\pi)(Z)Y - (\overset{g}{\nabla}_Y\pi)(Z)X\big)\\ &+ \frac{(n-1)^2}{4(n+1)^2}\pi(Z)\big(\pi(Y)X - \pi(X)Y\big) - \frac{1}{4}\pi(Z)\big(\pi(Y)X + \pi(X)Y\big) + \frac{1}{2}\pi(X)\pi(Y)Z.\end{aligned}$$

Ако ову једначину контракујемо по векторима X, Y и Z, редом, добијамо

$$\overset{5}{Ric}(Y,Z) =\overset{g}{Ric}(Y,Z) + \frac{n-1}{2(n+1)}(\overset{g}{\nabla}_Z\pi)(Y) - \frac{n(n-1)}{2(n+1)}(\overset{g}{\nabla}_Y\pi)(Z) - \frac{n(n-1)}{(n+1)^2}\pi(Y)\pi(Z), \tag{2.5.25}$$

$$\begin{aligned} {}''\overset{5}{R}(X,Z) =& - \overset{g}{Ric}(X,Z) + \frac{n(n-1)}{2(n+1)}(\overset{g}{\nabla}_X\pi)(Z) - \frac{n-1}{2(n+1)}(\overset{g}{\nabla}_Z\pi)(X) \\ &- \frac{(n-1)(n^2+1)}{2(n+1)^2}\pi(X)\pi(Z) \end{aligned} \tag{2.5.26}$$

и

$${}'\overset{5}{R}(X,Y) = \frac{n-1}{2}(\overset{g}{\nabla}_X\pi)(Y) - \frac{n-1}{2}(\overset{g}{\nabla}_Y\pi)(X) + \frac{n-1}{2}\pi(X)\pi(Y), \tag{2.5.27}$$

где је ${}''\overset{5}{R}(X,Z) = \mathrm{trace}\{Y \to \overset{5}{R}(X,Y)Z\}$ и ${}'\overset{5}{R}(X,Y) = \mathrm{trace}\{Z \to \overset{5}{R}(X,Y)Z\}$. Ако узмемо да је $Y = X$ и $Z = Y$ у једначини (2.5.25), тада добијамо

$$\overset{5}{Ric}(X,Y) = \overset{g}{R}(X,Y) + \frac{n-1}{2(n+1)}(\overset{g}{\nabla}_Y\pi)(X) - \frac{n(n-1)}{2(n+1)}(\overset{g}{\nabla}_X\pi)(Y) - \frac{n(n-1)}{(n+1)^2}\pi(X)\pi(Y). \tag{2.5.28}$$

Са друге стране, узимајући $Z = Y$ у (2.5.26), налазимо да је

$$\begin{aligned} {}''\overset{5}{R}(X,Y) =& - \overset{g}{R}(X,Y) + \frac{n(n-1)}{2(n+1)}(\overset{g}{\nabla}_X\pi)(Y) - \frac{n-1}{2(n+1)}(\overset{g}{\nabla}_Y\pi)(X) \\ &- \frac{(n-1)(n^2+1)}{2(n+1)^2}\pi(X)\pi(Y). \end{aligned} \tag{2.5.29}$$

Сабирањем последње две релације добијамо

$$\frac{n-1}{2}\pi(X)\pi(Y) = -\overset{5}{Ric}(X,Y) - {}''\overset{5}{R}(X,Y). \tag{2.5.30}$$

Заменом (2.5.30) у једначинама (2.5.28) и (2.5.27) имамо наредне изразе

$$\begin{aligned} \frac{n^2+1}{(n+1)^2}\overset{5}{Ric}(X,Y) - \frac{2n}{(n+1)^2}{}''\overset{5}{R}(X,Y) &= \overset{g}{Ric}(X,Y) - \frac{n(n-1)}{2(n+1)}(\overset{g}{\nabla}_X\pi)(Y) + \frac{n-1}{2(n+1)}(\overset{g}{\nabla}_Y\pi)(X), \\ \overset{5}{Ric}(X,Y) + {}''\overset{5}{R}(X,Y) + {}'\overset{5}{R}(X,Y) &= \frac{n-1}{2}(\overset{g}{\nabla}_X\pi)(Y) - \frac{n-1}{2}(\overset{g}{\nabla}_Y\pi)(X). \end{aligned}$$

Комбинација претходне две једначине нам даје израз тензора $\overset{g}{\nabla}\pi$ који гласи

$$\begin{aligned} \frac{n-1}{2(n+1)}(\overset{g}{\nabla}_X\pi)(Y) =& \frac{1}{n-1}\overset{g}{Ric}(X,Y) - \frac{n^2+n+2}{(n^2-1)(n+1)}\overset{5}{Ric}(X,Y) \\ &- \frac{1}{n^2-1}{}'\overset{5}{R}(X,Y) + \frac{1}{(n+1)^2}{}''\overset{5}{R}(X,Y). \end{aligned} \tag{2.5.31}$$

Коначно, заменом (2.5.30) и (2.5.31) у (2.5.7), добијамо

$$\overset{5}{W}(X,Y)Z = \overset{g}{W}(X,Y)Z,$$

где је $\overset{5}{W}$ тензор дат једначином

$$\begin{aligned} \overset{5}{W}(X,Y)Z =& \overset{5}{R}(X,Y)Z + \frac{1}{n^2-1}\big(\overset{5}{Ric}(X,Z)Y - (n+2)\overset{5}{Ric}(Y,Z)X\big) \\ &+ \frac{1}{n^2-1}\big({}'\overset{5}{R}(X,Y) - {}'\overset{5}{R}(Y,X)\big)Z + \frac{1}{n^2-1}\big({}'\overset{5}{R}(X,Z)Y - {}'\overset{5}{R}(Y,Z)X\big) \\ &+ \frac{n^2+n+2}{(n^2-1)(n+1)}\overset{5}{Ric}(X,Y)Z + \frac{n^2+3n}{(n^2-1)(n+1)}{}''\overset{5}{R}(Y,X)Z \\ &- \frac{1}{n^2-1}\big(n\,{}''\overset{5}{R}(X,Z)Y + {}''\overset{5}{R}(Y,Z)X\big) + \frac{1}{(n+1)^2}\big(\overset{5}{Ric}(Y,X) - {}''\overset{5}{R}(X,Y)\big)Z. \end{aligned} \tag{2.5.32}$$

Коришћењем анти-симетризације једначина (2.5.27), (2.5.28) и (2.5.29), добијамо

$$\overset{5}{Ric}(X,Y)-\overset{5}{Ric}(Y,X)=-\frac{1}{2}\big({}'\overset{5}{R}(X,Y)-{}'\overset{5}{R}(Y,X)\big)=-{}''\overset{5}{R}(X,Y)+{}''\overset{5}{R}(Y,X),$$

одакле је

$$\overset{5}{Ric}(X,Y)-{}''\overset{5}{R}(Y,X)=\overset{5}{Ric}(Y,X)-{}''\overset{5}{R}(X,Y).$$

Ако последњу релацију убацимо у (2.5.32), тензор $\overset{5}{W}$ се може записати у следећој форми

$$\begin{aligned}\overset{5}{W}(X,Y)Z=&\overset{5}{R}(X,Y)Z+\frac{1}{n^2-1}\big(\overset{5}{Ric}(X,Z)Y-(n+2)\overset{5}{Ric}(Y,Z)X\big)\\&+\frac{1}{n^2-1}\big({}'\overset{5}{R}(X,Y)-{}'\overset{5}{R}(Y,X)\big)Z+\frac{1}{n^2-1}\big({}'\overset{5}{R}(X,Z)Y-{}'\overset{5}{R}(Y,Z)X\big)\\&-\frac{1}{n^2-1}\big(n\,{}''\overset{5}{R}(X,Z)Y+{}''\overset{5}{R}(Y,Z)X\big)+\frac{1}{n-1}\big(\overset{5}{Ric}(X,Y)+{}''\overset{5}{R}(Y,X)\big)Z.\end{aligned}\tag{2.5.33}$$

Претходно добијене резултате формулишемо у наредној теореми.

Теорема 2.5.10 *Нека је* $(\mathcal{M},g,\overset{1}{\nabla})$ *Риманова многострукост са пројективном полу-симетричном конексијом (2.5.1),* $\overset{5}{W}$ *тензор дат једначином (2.5.33) и* $\overset{g}{W}$ *Вејлов пројективни тензор кривине (1.7.5). Тада је:*

(i) $\overset{5}{W}=\overset{g}{W}$,

(ii) Ако тензори $\overset{5}{Ric}$, ${}'\overset{5}{R}$ *и* ${}''\overset{5}{R}$ *ишчезавају, тада је* $\overset{5}{W}=\overset{5}{R}$,

(iii) Ако је ковектор π *затворен тада тензор* $\overset{5}{W}$ *добија облик*

$$\begin{aligned}\overset{5}{W}(X,Y)Z=&\overset{5}{R}(X,Y)Z+\frac{1}{n^2-1}\big(\overset{5}{Ric}(X,Z)Y-(n+2)\overset{5}{Ric}(Y,Z)X\big)\\&+\frac{1}{n^2-1}\big({}'\overset{5}{R}(X,Z)Y-{}'\overset{5}{R}(Y,Z)X\big)-\frac{1}{n^2-1}\big(n\,{}''\overset{5}{R}(X,Z)Y+{}''\overset{5}{R}(Y,Z)X\big)\\&+\frac{1}{n-1}\big(\overset{5}{Ric}(X,Y)+{}''\overset{5}{R}(Y,X)\big)Z.\end{aligned}$$

Глава 3

Четврт-симетричне конексије

С. Голаб је дефинисао четврт-симетричну конексију 1975. год. у раду [46], као уопштење полу-симетричне конексије. Поред ковектора, ова конексија садржи и (1,1)-тензор, па се одмах показала интересантном за проучавање у многострукостима које се дефинишу преко (1,1)-тензора, као што су комплексне и контактне, и зато су се многи аутори бавили таквим конексијама у поменутим многострукостима. Дакле, конексија $\overset{1}{\nabla}$ која има тензор торзије облика

$$\overset{1}{T}(X,Y)=\pi(Y)\phi X-\pi(X)\phi Y,$$

назива се *четврт-симетрична конексија* [46], где је π произвољна 1-форма са придруженим вектором P, тј. $\pi(X)=g(X,P)$, а ϕ је произвољан (1,1)-тензор придружен (0,2)-тензору Φ, тј. $\Phi(X,Y)=g(\phi X,Y)$. Ако је $\phi X=X$, тада је конексија $\overset{1}{\nabla}$ полу-симетрична. Постоје различите варијанте четврт-симетричне конексије, а ми ћемо је проучавати у генералисаној Римановој многострукости $(\mathcal{M},G=g+F)$, и то ону чији тензор торзије садржи структурни тензор A који је придружен анти-симетричном тензору F. Убрзо након дефинисања четврт-симетричне конексије, овакав тип је проучаван у радовима [75, 133, 135].

Најпре ћемо проучавати четврт-симетричну метричку конексију у генералисаним Римановим многострукостима, одредићемо полазне резултате, које ћемо затим применити на Келерове и ко-Келерове многострукости. У Келеровој многострукости ћемо конструисати релације за Вејлов пројективни тензор кривине и холоморфно пројективни тензор кривине, а у ко-Келеровој многострукости ћемо пронаћи тензоре који се поклапају са Вејловим пројективним тензором кривине. Након тога ћемо дефинисати нову четврт-симетричну неметричку конексију у генералисаним Римановим многострукостима и проучавати неке њене особине. Резултати које ћемо представити у овој глави су публиковани у радовима [63, 67, 142, 143].

3.1 Четврт-симетрична метричка A-конексија у генералисаним Римановим многострукостима

Линеарну конексију $\overset{1}{\nabla}$ која чува основни тензор G, тј. конексију за коју важи $\overset{1}{\nabla}G=0$, ћемо називати *метричка A-конексија*, јер на основу Теореме 1.9.2, оваква конексија чува и симетрични део g и структурни тензор A, тј. важи

$$\overset{1}{\nabla}G=0\Leftrightarrow\overset{1}{\nabla}g=\overset{1}{\nabla}F=0\Leftrightarrow\overset{1}{\nabla}g=\overset{1}{\nabla}A=0. \tag{3.1.1}$$

Овде ћемо посматрати конексију $\overset{1}{\nabla}$ у генералисаној Римановој многострукости $(\mathcal{M},G=g+F)$ која чува основни тензор G са тензором торзије

$$\overset{1}{T}(X,Y)=\pi(Y)AX-\pi(X)AY, \tag{3.1.2}$$

где је π 1-форма придружена векторском пољу P, тј. $\pi(X) = g(X, P)$ и A је (1,1)-тензор придружен анти-симетричном делу F основног тензора G, тј. $F(X, Y) = g(AX, Y)$. Оваква конексија се зове *четврт-симетрична метричка A-конексија.* Пошто структурни (1,1)-тензор A већ постоји у генералисаним Римановим многострукостима, кажемо да је π *генератор* ове конексије. На основу једначине (3.1.2) се добија облик (0,3)-тензора торзије

$$\overset{1}{T}(X, Y, Z) = \pi(Y)F(X, Z) - \pi(X)F(Y, Z). \tag{3.1.3}$$

На основу Теореме 1.9.2 видимо да је линеарна конексија $\overset{1}{\nabla}$ која чува основни тензор G потпуно одређена својим тензором торзије $\overset{1}{T}$ и Леви-Чивита конексијом $\overset{g}{\nabla}$ симетричне метрике g. Сходно томе, дајемо наредно тврђење за четврт-симетричну метричку A-конексију чији је тензор торзије дат једначином (3.1.2), тј. (3.1.3).

Последица 3.1.1 *Нека је $(\mathcal{M}, G)$ генералисана Риманова многострукост и $\overset{g}{\nabla}$ Леви-Чивита конексија. Четврт-симетрична метричка A-конексија $\overset{1}{\nabla}$, са тензором торзије (3.1.2), је одређена једначином*

$$\overset{1}{\nabla}_X Y = \overset{g}{\nabla}_X Y - \pi(X)AY. \tag{3.1.4}$$

За коваријантни извод ковектора π, у односу на четврт-симетричну метричку A-конексију (3.1.4), важи следећа једначина

$$(\overset{1}{\nabla}_X \pi)(Y) = (\overset{g}{\nabla}_X \pi)(Y) + \pi(X)\pi(AY). \tag{3.1.5}$$

За коваријантни извод структурног тензора A имамо $(\overset{1}{\nabla}_X A)Y = (\overset{g}{\nabla}_X A)Y$ и на основу чињенице да четврт-симетрична метричка A-конексија $\overset{1}{\nabla}$ чува тензор A, тј. на основу једначине (3.1.1), следи да важи

$$\overset{1}{\nabla} A = \overset{g}{\nabla} A = 0. \tag{3.1.6}$$

Теорема 3.1.1 *У генералисаној Римановој многострукости $(\mathcal{M}, G, \overset{1}{\nabla})$ са четврт-симетричном метричком A-конексијом (3.1.4), структурни тензор A, који је придружен анти-симетричном тензору F, је паралелан у односу на Леви-Чивита конексију.*

Применом поступка из Секције 2.1 за тензор кривине $\overset{1}{R}$, можемо се уверити да тензор кривине $\overset{1}{R}$ четврт-симетричне метричке A-конексије и Риманов тензор кривине $\overset{g}{R}$ задовољавају следећу релацију

$$\overset{1}{R}(X, Y)Z = \overset{g}{R}(X, Y)Z - ((\overset{g}{\nabla}_X \pi)(Y) - (\overset{g}{\nabla}_Y \pi)(X))AZ. \tag{3.1.7}$$

Директно на основу претходне једначине, можемо донети следећи закључак.

Теорема 3.1.2 *Тензор кривине четврт-симетричне метричке A-конексије (3.1.4) је једнак Римановом тензору кривине Леви-Чивита конексије ако и само ако је ковектор π затворен.*

Последица 3.1.2 *Нека је $(\mathcal{M}, G, \overset{1}{\nabla})$ генералисана Риманова многострукост са четврт-симетричном метричком A-конексијом $\overset{1}{\nabla}$, датом са (3.1.4), и нека је $\overset{g}{\nabla}$ Леви-Чивита конексија. Риманов тензор кривине $\overset{g}{R}$ је инваријантан при трансформацији конексија $\overset{g}{\nabla} \to \overset{1}{\nabla}$ ако и само ако је ковектор π затворен.*

Напомена 3.1.1 *С обзиром на то да су Келерове и пара-Келерове многострукости примери генералисане Риманове многострукости, Теорема 3.1.2 представља уопштење Последице 2.1. из рада [75] и Теореме 6. из рада [98].*

Симетрична конексија $\overset{0}{\nabla}$ и дуална конексија $\overset{2}{\nabla}$ четврт-симетричне метричке A-конексије (3.1.4), применом једначина (1.5.1) и (1.5.2), добијају следећи облик

$$\overset{0}{\nabla}_X Y = \overset{g}{\nabla}_X Y - \frac{1}{2}\pi(X)AY - \frac{1}{2}\pi(Y)AX, \tag{3.1.8}$$

$$\overset{2}{\nabla}_X Y = \overset{g}{\nabla}_X Y - \pi(Y)AX. \tag{3.1.9}$$

Лако се показује да конексије $\overset{0}{\nabla}$ и $\overset{2}{\nabla}$, дате претходним једначинама, нису метричке, при чему задовољавају следеће релације

$$\begin{aligned}
(\overset{0}{\nabla}_X g)(Y,Z) &= \frac{1}{2}\pi(Y)F(X,Z) + \frac{1}{2}\pi(Z)F(X,Y),\\
(\overset{0}{\nabla}_X F)(Y,Z) &= -\frac{1}{2}\pi(Y)g(AX,AZ) + \frac{1}{2}\pi(Z)g(AX,AY),\\
(\overset{2}{\nabla}_X g)(Y,Z) &= \pi(Y)F(X,Z) + \pi(Z)F(X,Y),\\
(\overset{2}{\nabla}_X F)(Y,Z) &= -\pi(Y)g(AX,AZ) + \pi(Z)g(AX,AY).
\end{aligned}$$

Релације између тензора кривине $\overset{\theta}{R}$, $\theta = 0,2,...,5$, и Римановог тензора кривине $\overset{g}{R}$ су дате у наредној теореми.

Теорема 3.1.3 *Нека је $(\mathcal{M}, G, \overset{1}{\nabla})$ генералисана Риманова многострукост са четврт-симетричном метричком A-конексијом (3.1.4). Тензори кривине $\overset{\theta}{R}$, $\theta = 0,2,...,5$ и Риманов тензор кривине $\overset{g}{R}$ задовољавају следеће релације*

$$\begin{aligned}
\overset{0}{R}(X,Y)Z =& \overset{g}{R}(X,Y)Z - \frac{1}{2}(\overset{0}{D}(X,Y) - \overset{0}{D}(Y,X))AZ - \frac{1}{2}(\overset{0}{D}(X,Z)AY - \overset{0}{D}(Y,Z)AX)\\
&- \frac{1}{4}\pi(Z)(\pi(Y)A^2X - \pi(X)A^2Y),
\end{aligned} \tag{3.1.10}$$

$$\overset{2}{R}(X,Y)Z = \overset{g}{R}(X,Y)Z - \overset{2}{D}(X,Z)AY + \overset{2}{D}(Y,Z)AX, \tag{3.1.11}$$

$$\overset{3}{R}(X,Y)Z = \overset{g}{R}(X,Y)Z - \overset{2}{D}(X,Y)AZ + \overset{3}{D}(Y,Z)AX, \tag{3.1.12}$$

$$\overset{4}{R}(X,Y)Z = \overset{g}{R}(X,Y)Z - \overset{3}{D}(X,Y)AZ + \overset{3}{D}(Y,Z)AX - \pi(Z)(\pi(Y)A^2X - \pi(X)A^2Y), \tag{3.1.13}$$

$$\begin{aligned}
\overset{5}{R}(X,Y)Z =& \overset{g}{R}(X,Y)Z - \frac{1}{2}(\overset{2}{D}(X,Y) - \overset{3}{D}(Y,X))AZ - \frac{1}{2}(\overset{3}{D}(X,Z)AY - \overset{2}{D}(Y,Z)AX)\\
&+ \frac{1}{2}\pi(Y)(\pi(X)A^2Z - \pi(Z)A^2X),
\end{aligned} \tag{3.1.14}$$

при чему су $\overset{0}{D}$, $\overset{2}{D}$ и $\overset{3}{D}$ тензори типа (0,2) дати једначинама

$$\overset{0}{D}(X,Y) = (\overset{g}{\nabla}_X \pi)(Y) + \frac{1}{2}\pi(X)\pi(AY) + \frac{1}{2}\pi(Y)\pi(AX), \tag{3.1.15}$$

$$\overset{2}{D}(X,Y) = (\overset{g}{\nabla}_X \pi)(Y) + \pi(Y)\pi(AX), \tag{3.1.16}$$

$$\overset{3}{D}(X,Y) = (\overset{g}{\nabla}_X \pi)(Y) + \pi(X)\pi(AY) = (\overset{1}{\nabla}_X \pi)(Y). \tag{3.1.17}$$

Доказ: За четврт-симетричну метричку A-конексију (3.1.4) и тензор торзије $\overset{1}{T}$ важе наредне релације

$$(\overset{1}{\nabla}_X \overset{1}{T})(Y,Z) = AY(\overset{1}{\nabla}_X \pi)(Z) - AZ(\overset{1}{\nabla}_X \pi)(Y), \tag{3.1.18}$$

$$\overset{1}{T}(\overset{1}{T}(X,Y),Z) = \pi(Y)(\pi(Z)A^2X - \pi(AX)AZ) - \pi(X)(\pi(Z)A^2Y - \pi(AY)AZ), \tag{3.1.19}$$

$$\underset{XYZ}{\mathfrak{S}} \overset{1}{T}(\overset{1}{T}(X,Y),Z) = \underset{XYZ}{\mathfrak{S}} \pi(X)(\pi(AY)AZ - \pi(AZ)AY). \tag{3.1.20}$$

Коришћењем релација (1.6.2) - (1.6.6) и (3.1.5), (3.1.7), (3.1.18)-(3.1.20), након сређивања, лако добијамо релације (3.1.10)-(3.1.14). ☐

Претходна теорема, тј. тачније једначина (3.1.11), имплицира наредно тврђење.

Последица 3.1.3 *Нека је $(\mathcal{M}, G, \overset{1}{\nabla})$ генералисана Риманова многострукост са четврт-симетричном метричком A-конексијом (3.1.4), $\overset{g}{\nabla}$ Леви-Чивита конексија и $\overset{2}{\nabla}$ дуална конексија дата једначином (3.1.9). Риманов тензор кривине $\overset{g}{R}$ је инваријантан при трансформацији конексија $\overset{g}{\nabla} \to \overset{2}{\nabla}$ ако и само ако је $\overset{2}{D}(X,Z)AY = \overset{2}{D}(Y,Z)AX$, где је $\overset{2}{D}$ тензор дат једначином (3.1.16).*

Једначина (3.1.10) тензоре кривине нулте врсте се може записати у облику

$$\overset{0}{R}(X,Y)Z = \overset{g}{R}(X,Y)Z + \overset{0}{M}(X,Y)Z - \overset{0}{M}(Y,X)Z,$$

где је (1,3)-тензор $\overset{0}{M}$ дат једначином

$$\overset{0}{M}(X,Y)Z = -\frac{1}{2}\overset{0}{D}(X,Y)AZ - \frac{1}{2}\overset{0}{D}(X,Z)AY + \frac{1}{4}\pi(X)\pi(Z)A^2Y, \tag{3.1.21}$$

на основу чега можемо донети следећи закључак.

Последица 3.1.4 *Нека је $(\mathcal{M}, G, \overset{1}{\nabla})$ генералисана Риманова многострукост са четврт-симетричном метричком A-конексијом (3.1.4), $\overset{g}{\nabla}$ Леви-Чивита конексија и $\overset{0}{\nabla}$ симетрична конексија дата са (3.1.8). Риманов тензор кривине $\overset{g}{R}$ је инваријантан при трансформацији конексија $\overset{g}{\nabla} \to \overset{0}{\nabla}$ ако и само ако је тензор $\overset{0}{M}(X,Y)Z$ симетричан у односу на X и Y, где је $\overset{0}{M}$ дат једначином (3.1.21).*

Сада ћемо навести неколико идентитета за тензор торзије $\overset{1}{T}$.

Теорема 3.1.4 *Тензор торзије (3.1.2) четврт-симетричне конексије (3.1.4) у генералисаној Римановој многострукости задовољава следеће релације*

$$\underset{XYZ}{\mathfrak{S}} \overset{1}{T}(X,Y,Z) = -2 \underset{XYZ}{\mathfrak{S}} \pi(X)F(Y,Z), \tag{3.1.22}$$

$$2 \underset{XYZ}{\mathfrak{S}} \pi(X)F(AY,AZ) = - \underset{XYZ}{\mathfrak{S}} (\overset{1}{T}(AX,Y,AZ) + \overset{1}{T}(X,AY,AZ)), \tag{3.1.23}$$

$$\underset{XYZ}{\mathfrak{S}} \overset{1}{T}(\overset{1}{T}(X,Y),Z) = \underset{XYZ}{\mathfrak{S}} \pi(AX)\overset{1}{T}(Y,Z), \tag{3.1.24}$$

$$\underset{XYZ}{\mathfrak{S}} \overset{1}{T}(X,Y,AZ) = 0, \tag{3.1.25}$$

$$\underset{XYZ}{\mathfrak{S}} \overset{1}{T}(AX,AY,Z) = 0, \tag{3.1.26}$$

где симбол $\underset{XYZ}{\mathfrak{S}}$ означава циклично сумирање по векторима X, Y, Z.

Доказ: Доказаћемо релацију (3.1.25). Коришћењем једначина (3.1.3) и (1.9.1), добијамо

$$\begin{aligned}\underset{XYZ}{\mathfrak{S}}\overset{1}{T}(X,Y,AZ) =&\overset{1}{T}(X,Y,AZ)+\overset{1}{T}(Y,Z,AX)+\overset{1}{T}(Z,X,AY)\\ =&\pi(Y)F(X,AZ)-\pi(X)F(Y,AZ)+\pi(Z)F(Y,AX)-\pi(Y)F(Z,AX)\\ &+\pi(X)F(Z,AY)-\pi(Z)F(X,AY)\\ =&\pi(Y)g(AX,AZ)-\pi(X)g(AY,AZ)+\pi(Z)g(AY,AX)-\pi(Y)g(AZ,AX)\\ &+\pi(X)g(AZ,AY)-\pi(Z)g(AX,AY)=0.\end{aligned}$$

□

Напомена 3.1.2 *Сви идентитети из претходне теореме важе за било коју четврт-симетричну конексију са тензором торзије (3.1.2).*

Многострукост парне димензије са недегенерисаном затвореном 2-формом се назива *симплектичка*. На основу једначине (1.9.6) за диференцијал тензора F и на основу идентитета (3.1.25) добијамо

$$\mathrm{d}F(X,Y,Z)=-\underset{XYZ}{\mathfrak{S}}\overset{1}{T}(X,Y,AZ)=0, \tag{3.1.27}$$

одакле видимо да је тензор F затворен и сходно томе дајемо наредно тврђење.

Теорема 3.1.5 *Нека је $(\mathcal{M},G,\overset{1}{\nabla})$ генералисана Риманова многострукост са четврт-симетричном метричком A-конексијом (3.1.4). Ако је тензор F недегенерисан и ако је многострукост $\mathcal{M}$ парне димензије, тада пар $(\mathcal{M},F)$ представља симплектичку многострукост.*

Нијенхуисов тензор (или торзија) тензора A је тензор типа (1,2) и игра важну улогу у скоро комплексној и скоро пара-комплексној геометрији. Ишчезавање Нијенхуисовог тензора је еквивалентно са условом интеграбилности скоро комплексне структуре [79].

За линеарну конексију $\overset{1}{\nabla}$ која чува тензор A, тј. $\overset{1}{\nabla}A=0$, Нијенхуисов тензор тензора A се може приказати преко тензора торзије $\overset{1}{T}$ и самог тензора A следећом једначином (видети (2.18) у [55])

$$N(X,Y)=-\overset{1}{T}(AX,AY)-A^2\overset{1}{T}(X,Y)+A\overset{1}{T}(AX,Y)+A\overset{1}{T}(X,AY).$$

Узимајући у обзир облик тензора торзије (3.1.2) четврт-симетричне метричке A-конексије (3.1.4), лако долазимо до наредног тврђења.

Теорема 3.1.6 *Нијенхуисов тензор је једнак нули у генералисаној Римановој многострукости са четврт-симетричном метричком A-конексијом (3.1.4).*

3.2 Четврт-симетрична метричка A-конексија у Келеровој многострукости

У наставку ћемо се бавити применом четврт-симетричне метричке A-конексије на примере генералисане Риманове многострукости. Најпре ћемо ову конексију применити на скоро Хермитске многострукости и видећемо да ако допуштају поменуту конексију онда постају Келерове многострукости, због чега ћемо истраживање усмерити на Келерове многострукости.

Особине које има Риманов тензор кривине у Келеровим многострукостима су нам биле поводом да исте проучавамо и за линеарно независне тензоре кривине посматране четврт-симетричне конексије. Међутим, показаће се да оне зависе од генератора конексије, због чега су посматрани и хибридни тензори. Са друге стране, одредићемо и тензоре који не зависе од генератора π, од којих је један једнак Вејловом пројективном тензору кривине. Помоћу осталих можемо добити линеарне комбинације једнаке холоморфно пројективном тензору кривине или Вејловом пројективном тензору кривине, а један од њих се може представити преко збира последња два споменута тензора.

Холоморфно пројективни тензор кривине је инваријантан при холоморфно пројективном пресликавању, које представља природну генерализацију геодезијског пресликавања, и у Келеровој многострукости има следећи облик [121]

$$\begin{aligned}\overset{g}{P}(X,Y)Z =&\overset{g}{R}(X,Y)Z + \frac{1}{n+2}(\overset{g}{Ric}(X,Z)Y - \overset{g}{Ric}(Y,Z)X)\\ &- \frac{1}{n+2}(\overset{g}{Ric}(X,AZ)AY - \overset{g}{Ric}(Y,AZ)AX + 2\overset{g}{Ric}(X,AY)AZ).\end{aligned} \tag{3.2.1}$$

3.2.1 Скоро Хермитска многострукост са четврт-симетричном метричком A-конексијом

Као што смо и споменули раније, у зависности од особина тензора A, можемо посматрати разне примере генералисане Риманове многострукости, као што су скоро Хермитске, скоро пара-Хермитске, скоро контактне метричке, скоро пара-контактне метричке итд. (видети [55]). Најпре наводимо уобичајену дефиницију скоро Хермитске многострукости.

Дефиниција 3.2.1 *Скоро Хермитска многострукост* $(\mathcal{M}, g, A)$ је Риманова многострукост $(\mathcal{M}, g)$, парне димензије $n \geq 4$, снабдевена скоро комплексном структуром A која задовољава услове

$$A^2 = -I, \; g(AX, AY) = g(X, Y). \tag{3.2.2}$$

Фундаментална 2-форма F (тзв. *Келерова форма*) се дефинише једначином $F(X,Y) = g(AX,Y)$. Метрика g која задовољава претходне релације се назива *Хермитска метрика.* На основу претходног је јасно да скоро Хермитску многострукост $(\mathcal{M}, g, A)$ можемо посматрати као генералисану Риманову многострукост $(\mathcal{M}, G = g + F)$ која задовољава релације (3.2.2) (видети [55, 96]).

Следеће једначине такође важе у скоро Хермитској многострукости

$$F(AX, Y) = -F(X, AY) = -g(X, Y) \quad \text{и} \quad F(AX, AY) = F(X, Y). \tag{3.2.3}$$

Из једначина (1.9.1), (3.2.2), (3.2.3), закључујемо да основни тензор G има следеће особине у скоро Хермитској многострукости

$$G(AX, Y) = -G(X, AY) = -G(Y, X) \quad \text{и} \quad G(AX, AY) = G(X, Y). \tag{3.2.4}$$

Сада ћемо посматрати скоро Хермитске многострукости $(\mathcal{M}, g, A)$ са четврт-симетричном метричком A-конексијом (3.1.4). Примећујемо одмах да оваква конексија чува скоро Хермитску структуру (g, A), тј. важи $\overset{1}{\nabla} g = \overset{1}{\nabla} A = 0$, а конексија за коју то важи се назива *скоро Хермитска конексија* (на пример, видети [44]), што значи да четврт-симетрична метричка A-конексија спада у групу *скоро Хермитских конексија.*

Теорема 3.2.1 *Тензор торзије $\overset{1}{T}$ четврт-симетричне конексије (3.1.4) у скоро Хермитској многострукости задовољава следеће једначине*

$$\begin{aligned}A\overset{1}{T}(AX, AY) &= A\overset{1}{T}(X, Y) - \overset{1}{T}(AX, Y) - \overset{1}{T}(X, AY),\\ \overset{1}{T}(X, Y, Z) &= \overset{1}{T}(AX, AY, Z) + \overset{1}{T}(AX, Y, AZ) + \overset{1}{T}(X, AY, AZ),\\ \underset{XYZ}{\mathfrak{S}}\overset{1}{T}(X, Y, Z) &= \underset{XYZ}{\mathfrak{S}}(\overset{1}{T}(AX, Y, AZ) + \overset{1}{T}(X, AY, AZ)),\end{aligned}$$

где је са $\underset{XYZ}{\mathfrak{S}}$ означено циклично сумирање по векторским пољима X, Y, Z.

Доказ: Ове релације се могу доказати коришћењем особине фундаменталне 2-форме F у скоро Хермитским многострукостима, тј. коришћењем једначина (3.2.2) и (3.2.3). □

Скоро Хермитска многострукост се назива *Келерова* ако је $\overset{g}{\nabla}A = 0$. На основу једначине (3.1.6), видимо да је структурни тензор A паралелан у односу на Леви-Чивита конексију, па то имплицира наредно тврђење.

Теорема 3.2.2 *Скоро Хермитска многострукост $(\mathcal{M}, g, A, \overset{1}{\nabla})$ са четврт-симетричном метричком A-конексијом (3.1.4) је Келерова многострукост.*

У складу са претходном теоремом, следећа разматрања ће бити у Келеровим многострукостима. За ове многострукости, уместо израза „метричка A-конексија“, у радовима се користе изрази „метричка F-конексија“ или „метричка ϕ-конексија“, јер се у њима за (1,1) структурни тензор користе симболи F или ϕ.

Постоји много радова који се баве четврт-симетричном метричком конексијом у Келеровим многострукостима [75, 103, 135]. У раду [135], К. Јано и Т. Имаи су доказали да је Келерова многострукост са четврт-симетричном метричком A-конексијом равна ако и само ако нестаје тензор кривине ове конексије, тј. $\overset{1}{R} = 0$.

Напомена 3.2.1 *У раду [133], К. Јано је посматрао четврт-симетричну метричку конексију и доказао следеће (Теорема 4.2. у [133]): „Да би коваријантни извод комплексне структуре Хермитске многострукости у односу на четврт-симетричну метричку конексију нестао, потребно је и довољно да Хермитска многострукост буде Келерова“. У поређењу са Теоремом 3.2.2 видимо да се ради о другачијем приступу, јер смо ми кренули од скоро Хермитске многострукости са четврт-симетричном метричком A-конексијом.*

3.2.2 Особине тензора кривине које зависе од генератора четврт-симетричне конексије у Келеровој многострукости

У Келеровим многострукостима $(\mathcal{M}, g, A)$, Риманов тензор кривине $\overset{g}{R}$ и структурни тензор A задовољавају следеће особине (на пример, видети стр. 136 у [70])

$$\overset{g}{R}(X,Y)AZ = A\overset{g}{R}(X,Y)Z, \tag{3.2.5}$$

$$\overset{g}{\mathcal{R}}(X,Y,AZ,AW) = \overset{g}{\mathcal{R}}(AX,AY,Z,W), \tag{3.2.6}$$

$$\overset{g}{\mathcal{R}}(X,AY,AZ,W) = \overset{g}{\mathcal{R}}(AX,Y,Z,AW), \tag{3.2.7}$$

$$\overset{g}{\mathcal{R}}(AX,AY,AZ,AW) = \overset{g}{\mathcal{R}}(X,Y,Z,W), \tag{3.2.8}$$

$$\overset{g}{\mathcal{R}}(X,Y,Z,AW) = -\overset{g}{\mathcal{R}}(X,Y,AZ,W). \tag{3.2.9}$$

Мотивисани овим особинама Римановог тензора кривине, испитаћемо и особине линеарно независних тензора кривине четврт-симетричне метричке A-конексије у Келеровим многострукостима. Видећемо да неке од њих зависе од генератора поменуте конексије, па ћемо у ту сврху увести појам хибридног тензора.

Ако је (0,2)-тензор B *хибридан*, тада важи (видети [80] или стр. 31 у [126])

$$B(AX,Y) = -B(X,AY).$$

Одавде следи да за хибридне тензоре у Келеровим многострукостима важи и следећа једначина

$$B(AX,AY) = B(X,Y).$$

На пример, у овим многострукостима, тензори g и F су хибридни (стр. 192 у [131]), одакле следи да је и основни тензор G хибридан (ово је показано једначинама (3.2.2)-(3.2.4)).

Такође, у Келеровим многострукостима је хибридан и Ричијев тензор $\overset{g}{Ric}$ (стр. 68 у [131]), тј. задовољена је релација

$$\overset{g}{Ric}(X, AY) = -\overset{g}{Ric}(AX, Y). \tag{3.2.10}$$

У наредној теореми наводимо резултате који се користе при испитивању особина тензора кривине.

Теорема 3.2.3 *Нека је* $(\mathcal{M}, g, A, \overset{1}{\nabla})$ *Келерова многострукост са четврт-симетричном метричком А-конексијом.*

(1) Ако је $\overset{g}{\nabla}\pi$ *хибридан тензор, онда је такође и* $\overset{1}{D}$ *хибридан, тј. важи*

$$\overset{1}{D}(AX, Y) = -\overset{1}{D}(X, AY),\ \overset{1}{D}(AX, AY) = \overset{1}{D}(X, Y), \tag{3.2.11}$$

где је тензор $\overset{1}{D}$ *дат једначином*

$$\overset{1}{D}(X, Y) = (\overset{g}{\nabla}_X\pi)(Y) - (\overset{g}{\nabla}_Y\pi)(X) = \mathrm{d}\pi(X, Y). \tag{3.2.12}$$

(2) Ако су $\overset{g}{\nabla}\pi$ *и* $\pi \otimes \pi$ *хибридни тензори, тада су и* $\overset{\theta}{D}$ *хибридни,* $\theta = 0, 2, 3$*, тј. важи*

$$\overset{\theta}{D}(AX, Y) = -\overset{\theta}{D}(X, AY),\ \overset{\theta}{D}(AX, AY) = \overset{\theta}{D}(X, Y),\ \theta = 0, 2, 3, \tag{3.2.13}$$

где су (0,2)-тензори $\overset{\theta}{D}$ *дати једначинама (3.1.15), (3.1.16), (3.1.17).*

Доказ: Доказаћемо једначине (3.2.13) за $\theta = 2$. На основу (3.1.16), за Келерову многострукост, имамо

$$\overset{2}{D}(AX, Y) + \overset{2}{D}(X, AY) = (\overset{g}{\nabla}_{AX}\pi)(Y) + (\overset{g}{\nabla}_X\pi)(AY) + \pi(AX)\pi(AY) - \pi(X)\pi(Y). \tag{3.2.14}$$

Ако су тензори $\overset{g}{\nabla}\pi$ и $\pi \otimes \pi$ хибридни, тада важи

$$(\overset{g}{\nabla}_{AX}\pi)(Y) = -(\overset{g}{\nabla}_X\pi)(AY),\ \pi(AX)\pi(Y) = -\pi(X)\pi(AY) \tag{3.2.15}$$

и

$$(\overset{g}{\nabla}_{AX}\pi)(AY) = (\overset{g}{\nabla}_X\pi)(Y),\ \pi(AX)\pi(AY) = \pi(X)\pi(Y). \tag{3.2.16}$$

Применом једначина (3.2.15) и (3.2.16) у (3.2.14), добијамо

$$\overset{2}{D}(AX, Y) + \overset{2}{D}(X, AY) = 0.$$

Ако у претходном изразу заменимо вектор X са AX и користимо $A^2 = -I$, тада добијамо другу једначину у (3.2.13). □

Сада ћемо испитати особине тензора кривине које зависе од генератора четврт-симетричне конексије (3.1.4), тачније од тензора $\overset{g}{\nabla}\pi$ и $\pi \otimes \pi$. Особине тензора кривине прве врсте се издвајају од осталих, па зато наводимо прво особине тензора кривине прве врсте.

Теорема 3.2.4 *Нека је* $(\mathcal{M}, g, A, \overset{1}{\nabla})$ *Келерова многострукост са четврт-симетричном метричком А-конексијом (3.1.4).*

(1) Ако је $\overset{g}{\nabla}\pi$ хибридан тензор, тада тензор кривине прве врсте и структурни тензор A задовољавају следеће релације

$$\begin{aligned}\overset{1}{\mathcal{R}}(X,Y,AZ,AW)&=\overset{1}{\mathcal{R}}(AX,AY,Z,W),\\ \overset{1}{\mathcal{R}}(X,AY,AZ,W)&=\overset{1}{\mathcal{R}}(AX,Y,Z,AW),\\ \overset{1}{\mathcal{R}}(AX,AY,AZ,AW)&=\overset{1}{\mathcal{R}}(X,Y,Z,W).\end{aligned}$$

(2) Тензор кривине прве врсте и структурни тензор A задовољавају следеће релације

$$\begin{aligned}\overset{1}{R}(X,Y)AZ&=A\overset{1}{R}(X,Y)Z,\\ \overset{1}{\mathcal{R}}(X,Y,Z,AW)&=-\overset{1}{\mathcal{R}}(X,Y,AZ,W).\end{aligned}$$

Доказ: На основу једначине (3.1.7), одређујемо (0,4)-тензор кривине прве врсте

$$\overset{1}{\mathcal{R}}(X,Y,Z,W)=\overset{g}{\mathcal{R}}(X,Y,Z,W)-\overset{1}{D}(X,Y)F(Z,W),$$

где је $\overset{1}{D}$ тензор дат једначином (3.2.12). Одавде, имамо

$$\begin{aligned}\overset{1}{\mathcal{R}}(X,Y,AZ,AW)&=\overset{g}{\mathcal{R}}(X,Y,AZ,AW)-\overset{1}{D}(X,Y)F(AZ,AW)\\ &=\overset{g}{\mathcal{R}}(X,Y,AZ,AW)-\overset{1}{D}(X,Y)F(Z,W),\end{aligned}$$

при чему смо користили једначину (3.2.3). Са друге стране, имамо

$$\overset{1}{\mathcal{R}}(AX,AY,Z,W)=\overset{g}{\mathcal{R}}(AX,AY,Z,W)-\overset{1}{D}(AX,AY)F(Z,W).$$

Након одузимања претходне две једначине и коришћењем особине Римановог тензора кривине $\overset{g}{R}$, тј. једначине (3.2.6), добијамо

$$\overset{1}{\mathcal{R}}(X,Y,AZ,AW)-\overset{1}{\mathcal{R}}(AX,AY,Z,W)=(\overset{1}{D}(AX,AY)-\overset{1}{D}(X,Y))F(Z,W).$$

Ако је $\overset{g}{\nabla}\pi$ хибридан тензор, на основу једнчине (3.2.11), видимо да важи

$$\overset{1}{\mathcal{R}}(X,Y,AZ,AW)=\overset{1}{\mathcal{R}}(AX,AY,Z,W).$$

Слично се доказују и остале релације, при чему се релације под (2) могу доказати и преко услова интеграбилности једначине $\overset{1}{\nabla}A=0$, тј. применом одговарајућег Ричијевог идентитета. ☐

За остале линеарно независне тензоре кривине, важи наредна теорема, која се може доказати слично претходном, уз коришћење једначине (3.2.13) и особина Римановог тензора кривине у Келеровим многострукостима, тј. једначина (3.2.6)-(3.2.8).

Теорема 3.2.5 *Нека је $(\mathcal{M},g,A,\overset{1}{\nabla})$ Келерова многострукост са четврт-симетричном метричком A-конексијом (3.1.4). Ако су $\overset{g}{\nabla}\pi$ и $\pi\otimes\pi$ хибридни тензори, тада (0,4)-тензори кривине $\overset{\theta}{\mathcal{R}}$, $\theta=0,2,\dots,5$, и структурни тензор A задовољавају следеће релације*

$$\begin{aligned}\overset{\theta}{\mathcal{R}}(X,Y,AZ,AW)&=\overset{\theta}{\mathcal{R}}(AX,AY,Z,W),\\ \overset{\theta}{\mathcal{R}}(X,AY,AZ,W)&=\overset{\theta}{\mathcal{R}}(AX,Y,Z,AW),\\ \overset{\theta}{\mathcal{R}}(AX,AY,AZ,AW)&=\overset{\theta}{\mathcal{R}}(X,Y,Z,W).\end{aligned}$$

3.2.3 Тензори који не зависе од генератора четврт-симетричне конексије у Келеровој многострукости

За разлику од претходне секције, овде ћемо елиминисати генератор четврт-симетричне конексије (3.1.4) из једначина свих линеарно независних тензора кривине и на тај начин ћемо конструисати тензоре који не зависе од избора генератора ове конексије и видећемо са којим познатим тензорима су једнаки.

Теорема 3.2.6 *Нека је* $(\mathcal{M}, g, A, \overset{1}{\nabla})$ *Келерова многострукост са четврт-симетричном метричком A-конексијом (3.1.4). Тензори*

$$\overset{1}{V}(X,Y)Z = \overset{1}{R}(X,Y)Z + \overset{1}{Ric}(Y,AX)AZ, \tag{3.2.17}$$

$$\overset{2}{V}(X,Y)Z = \overset{2}{R}(X,Y)Z + \overset{2}{Ric}(AX,Z)AY - \overset{2}{Ric}(AY,Z)AX, \tag{3.2.18}$$

$$\overset{3}{V}(X,Y)Z = \overset{3}{R}(X,Y)Z + \overset{3}{Ric}(Y,AX)AZ + {}'\overset{3}{R}(AZ,Y)AX, \tag{3.2.19}$$

$$\begin{aligned}\overset{4}{V}(X,Y)Z =& \overset{4}{R}(X,Y)Z - {}'\overset{4}{R}(AY,X)AZ + {}'\overset{4}{R}(AZ,Y)AX \\ & - \frac{1}{n-1}(\overset{4}{Ric}(Y,Z)X - \overset{4}{Ric}(X,Z)Y - {}'\overset{4}{R}(AY,AZ)X + {}'\overset{4}{R}(AX,AZ)Y),\end{aligned} \tag{3.2.20}$$

$$\begin{aligned}\overset{5}{V}(X,Y)Z =& \overset{5}{R}(X,Y)Z + \frac{1}{n-1}(\overset{5}{Ric}(X,Y)Z - \overset{5}{Ric}(Y,Z)X) \\ & - \frac{1}{2(n-1)}(\overset{1}{Ric}(X,Y)Z - \overset{1}{Ric}(Y,Z)X + {}'\overset{3}{R}(AY,AX)Z - {}'\overset{3}{R}(AZ,AY)X) \\ & + \frac{1}{2}(\overset{1}{Ric}(Y,AX)AZ - \overset{3}{Ric}(Z,AY)AX - {}'\overset{3}{R}(AZ,X)AY),\end{aligned} \tag{3.2.21}$$

$$\begin{aligned}\overset{0}{V}(X,Y)Z =& \overset{0}{R}(X,Y)Z + \frac{1}{n-1}(\overset{0}{Ric}(X,Y)Z - \overset{0}{Ric}(Y,Z)X) \\ & - \frac{1}{2(n-1)}(\overset{1}{Ric}(X,Z)Y - \overset{1}{Ric}(Y,Z)X) - \frac{1}{4}({}'\overset{3}{R}(AZ,X)AY - {}'\overset{3}{R}(AZ,Y)AX) \\ & - \frac{1}{4(n-1)}(\overset{3}{Ric}(Z,X)Y - \overset{3}{Ric}(Z,Y)X + {}'\overset{3}{R}(AZ,AX)Y - {}'\overset{3}{R}(AZ,AY)X) \\ & + \frac{1}{4}(2\overset{1}{Ric}(Y,AX)AZ + \overset{3}{Ric}(Z,AX)AY - \overset{3}{Ric}(Z,AY)AX),\end{aligned} \tag{3.2.22}$$

не зависе од генератора π *и задовољавају следеће идентитете*

$$\overset{1}{V}(X,Y)Z = \overset{g}{R}(X,Y)Z + \overset{g}{Ric}(Y,AX)AZ, \tag{3.2.23}$$

$$\overset{2}{V}(X,Y)Z = \overset{g}{R}(X,Y)Z + \overset{g}{Ric}(AX,Z)AY - \overset{g}{Ric}(AY,Z)AX, \tag{3.2.24}$$

$$\overset{3}{V}(X,Y)Z = \overset{g}{R}(X,Y)Z + \overset{g}{Ric}(Y,AX)AZ, \tag{3.2.25}$$

$$\overset{4}{V}(X,Y)Z = \overset{g}{W}(X,Y)Z, \tag{3.2.26}$$

$$\begin{aligned}\overset{5}{V}(X,Y)Z =& \overset{g}{R}(X,Y)Z + \frac{1}{2(n-1)}(\overset{g}{Ric}(X,Y)Z - \overset{g}{Ric}(Y,Z)X) \\ & + \frac{1}{2}(\overset{g}{Ric}(AX,Y)AZ - \overset{g}{Ric}(AY,Z)AX),\end{aligned} \tag{3.2.27}$$

$$\begin{aligned}\overset{0}{V}(X,Y)Z =& \overset{g}{R}(X,Y)Z + \frac{1}{4(n-1)}(\overset{g}{Ric}(X,Z)Y - \overset{g}{Ric}(Y,Z)X) \\ & + \frac{1}{4}(2\overset{g}{Ric}(AX,Y)AZ + \overset{g}{Ric}(AX,Z)AY - \overset{g}{Ric}(AY,Z)AX).\end{aligned} \tag{3.2.28}$$

Доказ: Једначина тензора кривине четврте врсте $\overset{4}{R}$ у Келеровој многострукости са четврт-симетричном конексијом (3.1.4) има облик

$$\overset{4}{R}(X,Y)Z = \overset{g}{R}(X,Y)Z - \overset{3}{D}(X,Y)AZ + \overset{3}{D}(Y,Z)AX + \pi(Z)(\pi(Y)X - \pi(X)Y), \tag{3.2.29}$$

где је тензор $\overset{3}{D}$ дат једначином (3.1.17). Ако претходни тензор кривине контрахујемо по вектору X, тада добијамо релацију између Ричијевог тензора четврте врсте и Ричијевог тензора метрике g

$$\overset{4}{Ric}(Y,Z) = \overset{g}{Ric}(Y,Z) - \overset{3}{D}(AZ,Y) + (n-1)\pi(Y)\pi(Z), \tag{3.2.30}$$

где смо узели у обзир да је тензор A без трага. Са друге стране, контракцијом једначине (3.2.29) по вектору Z, имамо

$$'\overset{4}{R}(X,Y) = \overset{3}{D}(Y,AX), \tag{3.2.31}$$

одакле добијамо

$$\overset{3}{D}(Y,X) = -'\overset{4}{R}(AX,Y), \tag{3.2.32}$$

где је $'\overset{4}{R}(X,Y) = \mathrm{trace}\{Z \to \overset{4}{R}(X,Y)Z\}$. Из (3.2.30) и (3.2.32), одређујемо

$$\pi(Y)\pi(Z) = \frac{1}{n-1}(\overset{4}{Ric}(Y,Z) - \overset{g}{Ric}(Y,Z) - '\overset{4}{R}(AY,AZ)). \tag{3.2.33}$$

Заменом једначина (3.2.32) и (3.2.33) у (3.2.29), после сређивања, добијамо

$$\begin{aligned}
&\overset{4}{R}(X,Y)Z - '\overset{4}{R}(AY,X)AZ + '\overset{4}{R}(AZ,Y)AX \\
&\qquad - \frac{1}{n-1}(\overset{4}{Ric}(Y,Z)X - \overset{4}{Ric}(X,Z)Y - '\overset{4}{R}(AY,AZ)X + '\overset{4}{R}(AX,AZ)Y) \\
&\qquad = \overset{g}{R}(X,Y)Z + \frac{1}{n-1}(\overset{g}{Ric}(X,Z)Y - \overset{g}{Ric}(Y,Z)X) = \overset{g}{W}(X,Y)Z,
\end{aligned}$$

где смо са леве стране добили тензор $\overset{4}{V}$, а са десне стране једнакости је Вејлов пројективни тензор који зависи само од Леви-Чивита конексије и овим смо завршили доказ за тензор $\overset{4}{V}$. Слично се доказује и за остале тензоре, при чему се за $\overset{0}{V}$ и $\overset{5}{V}$ користе резултати који су добијени при одређивању тензора $\overset{1}{V}$ и $\overset{3}{V}$, а за цео поступак доказа може се погледати рад [143]. □

На основу претходних релација имамо следеће последице.

Последица 3.2.1 *Нека је* $(\mathcal{M}, g, A, \overset{1}{\nabla})$ *Келерова многострукост са четврт-симетричном метричком А-конексијом (3.1.4). Посматрана многострукост је пројективно равна ако и само ако ишчезава тензор* $\overset{4}{V}$*, дат једначином (3.2.20).*

Последица 3.2.2 *Нека је* $(\mathcal{M}, g, A, \overset{1}{\nabla})$ *Келерова многострукост са четврт-симетричном метричком А-конексијом (3.1.4). Ако Ричијев тензор* $\overset{4}{Ric}$ *и тензор* $'\overset{4}{R}$ *ишчезавају, тада је тензор кривине четврте врсте једнак Вејловом пројективном тензору кривине, тј.* $\overset{4}{R} = \overset{g}{W}$.

На основу релација (3.2.17) и (3.2.23), односно (3.2.18) и (3.2.24) закључујемо да важе наредна тврђења.

Теорема 3.2.7 *Нека је* $(\mathcal{M}, g, A, \overset{1}{\nabla})$ *Келерова многострукост са четврт-симетричном метричком А-конексијом (3.1.4). Тензор*

$$\underset{1}{\overset{g}{V}}(X,Y)Z = \overset{g}{R}(X,Y)Z + \overset{g}{Ric}(Y,AX)AZ$$

је инваријантан при трансформацији конексија $\overset{g}{\nabla} \to \overset{1}{\nabla}$.

Теорема 3.2.8 *Нека је* $(\mathcal{M}, g, A, \overset{1}{\nabla})$ *Келерова многострукост са четврт-симетричном метричком А-конексијом (3.1.4). Тензор*

$$\underset{2}{\overset{g}{V}}(X,Y)Z = \overset{g}{R}(X,Y)Z + \overset{g}{Ric}(AX,Z)AY - \overset{g}{Ric}(AY,Z)AX$$

је инваријантан при трансформацији конексија $\overset{g}{\nabla} \to \overset{2}{\nabla}$.

3.2.4 Неки идентитети добијени на основу новодобијених $\overset{\theta}{V}$ тензора

На основу претходних резултата видимо да је једино тензор $\overset{4}{V}$ једнак већ познатом Вејловом пројективном тензору кривине. Комбинацијом осталих тензора $\overset{\theta}{V}$, $\theta = 0,1,2,3,5$, одредићемо неке идентите за Вејлов пројективни тензор кривине и холоморфно пројективни тензор кривине, на основу којих можемо да представимо и њихову линеарну зависност. Најпре ћемо представити Вејлов пројективни тензор кривине као линеарну комбинацију тензора $\overset{\theta}{V}$.

Теорема 3.2.9 *Нека је* $(\mathcal{M}, g, A, \overset{1}{\nabla})$ *Келерова многострукост са четврт-симетричном метричком А-конексијом (3.1.4). Тада важе следећи идентитети*

$$\begin{aligned} 4\overset{0}{V}(X,Y)Z - 2\overset{1}{V}(X,Y)Z - \overset{2}{V}(X,Y)Z &= \overset{g}{W}(X,Y)Z, \\ 2\overset{5}{V}(X,Y)Z - \overset{1}{V}(X,Y)Z + \overset{1}{V}(Y,Z)X &= \overset{g}{W}(X,Z)Y, \end{aligned}$$

где су $\overset{\theta}{V}$, $\theta = 0,1,2,5$, *тензори дати једначинама (3.2.22), (3.2.17), (3.2.18), (3.2.21), редом, а* $\overset{g}{W}$ *је Вејлов пројективни тензор кривине.*

Доказ: Помоћу једначина (3.2.23) и (3.2.27), долазимо до следеће релације

$$2\overset{5}{V}(X,Y)Z - \overset{1}{V}(X,Y)Z + \overset{1}{V}(Y,Z)X = \overset{g}{R}(X,Y)Z + \overset{g}{R}(Y,Z)X + \frac{1}{n-1}(\overset{g}{Ric}(X,Y)Z - \overset{g}{Ric}(Y,Z)X).$$

Коришћењем првог Бјанкијевог идентитета и особине анти-симетричности Римановог тензора кривине $\overset{g}{R}$, добијамо

$$\begin{aligned} 2\overset{5}{V}(X,Y)Z - \overset{1}{V}(X,Y)Z + \overset{1}{V}(Y,Z)X &= \overset{g}{R}(X,Z)Y + \frac{1}{n-1}(\overset{g}{Ric}(X,Y)Z - \overset{g}{Ric}(Z,Y)X) \\ &= \overset{g}{W}(X,Z)Y. \end{aligned}$$

□

Ако узмемо у обзир хибридност Ричијевог тензора $\overset{g}{Ric}$ у Келеровој многострукости, тј. једначину (3.2.10), тада из (3.2.28), добијамо

$$\overset{0}{V}(X,Y)Z = \frac{n+2}{4}\overset{g}{P}(X,Y)Z - \frac{n-2}{4}\overset{g}{W}(X,Y)Z, \tag{3.2.34}$$

где је $\overset{g}{P}$ холоморфно пројективни тензор кривине (3.2.1). Претходна једначина директно имплицира наредно тврђење.

Теорема 3.2.10 *Нека је* $(\mathcal{M}, g, A, \overset{1}{\nabla})$ *Келерова многострукост са четврт-симетричном метричком A-конексијом (3.1.4). Ако тензор* $\overset{0}{V}$*, дат једначином (3.2.22), нестаје, тада важи релација*

$$\overset{g}{P} = \frac{n-2}{n+2}\overset{g}{W}.$$

Из једначина (3.2.23) и (3.2.24), добијамо идентитет

$$2\overset{1}{V}(X,Y)Z + \overset{2}{V}(X,Y)Z = (n+2)\overset{g}{P}(X,Y)Z - (n-1)\overset{g}{W}(X,Y)Z.$$

Коришћењем једначина (3.2.26) и (3.2.34) и Теореме 3.2.9, холоморфно пројективни тензор кривине можемо представити као линеарну комбинацију тензора $\overset{\theta}{V}$, $\theta = 0, 1, \dots, 5$.

Последица 3.2.3 *Нека је* $(\mathcal{M}, g, A, \overset{1}{\nabla})$ *Келерова многострукост са четврт-симетричном метричком A-конексијом (3.1.4). Тада важе следеће релације*

$$\begin{aligned}
\overset{g}{P}(X,Y)Z =& \frac{4}{n+2}\overset{0}{V}(X,Y)Z + \frac{n-2}{n+2}\overset{4}{V}(X,Y)Z,\\
\overset{g}{P}(X,Y)Z =& \frac{4(n-1)}{n+2}\overset{0}{V}(X,Y)Z - \frac{2(n-2)}{n+2}\overset{1}{V}(X,Y)Z - \frac{n-2}{n+2}\overset{2}{V}(X,Y)Z,\\
\overset{g}{P}(X,Y)Z =& \frac{4}{n+2}\overset{0}{V}(X,Y)Z + \frac{n-2}{n+2}(2\overset{5}{V}(X,Z)Y - \overset{1}{V}(X,Z)Y + \overset{1}{V}(Z,Y)X).
\end{aligned}$$

Напомена 3.2.2 *М. Прврановић је у раду [97] за Келерове многострукости одредила* други холоморфно пројективни тензор кривине *(једначином (22) у том раду), па се на исти начин и за њега могу одредити претходни идентитети.*

3.3 Четврт-симетрична метричка *A*-конексија у ко-Келеровој многострукости

Овде ћемо испитати примену четврт-симетричне метричке *A*-конексије на скоро контактне метричке многострукости. Доказаћемо да претходно поменута многострукост са четврт-симетричном метричком *A*-конексијом постаје ко-Келерова (тј. косимплектичка).

Одмах на почетку напомињемо да у литератури постоји разлика у коришћењу термина „косимплектичке многострукости“. Наиме, прву дефиницију за *косимплектичке многострукости* је дао П. Либерман [61], за скоро контактне метричке многострукости са затвореном 2-формом и затвореном 1-формом (на пример, оваква дефиниција се користи у радовима [13, 57, 59]). За многострукости са овим особинама Д. Блер користи назив *скоро косимплектичке*, а ако је притом задовољен и услов нормалности, онда за такву многострукост користи назив косимплектичка. 2008. године је доказано да Блерове косимплектичке многострукости представљају аналогије Келеровим многострукостима у непарној димензији и употребљен је назив *ко-Келерове* многострукости [59]. Након тога је почео да се користи и назив *скоро ко-Келерове* многострукости уместо Блерове скоро косимплектичке. Са уважавањем Блерове терминологије, која је у широкој употреби, овде ћемо користити називе скоро ко-Келерове и ко-Келерове многострукости.

У доступној литератури није проучавана четврт-симетрична метричка *A*-конексија (3.1.4) у ко-Келеровој многострукости. Један од разлога је што се у овим многострукостима поклапају тензори кривине четврт-симетричне метричке конексије (3.1.4) и Леви-Чивита конексије, па су и све остале геометријске структуре које се формирају преко Римановог тензора кривине инваријантне при оваквој трансформацији конексија. Алтернатива је била да се проучавају многострукости са слабијим условом, што је урађено у [138]. У том раду су проучаване α-косимплектичке многострукости са четврт-симетричном метричком конексијом (3.1.4). Ако је $\alpha = 0$ имамо ко-Келерове многострукости, а за $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ имамо

α-Кенмоцуове многострукости. Такође, ако је карактеристичан вектор ξ пројективан, тада α-косимплектичка многострукост постаје ко-Келерова [137].

У раду [67] смо коришћењем линеарно независних тензора кривине посматрали четврт-симетричну метричку A-конексију у ко-Келеровој многострукости и доказали смо да су три од њих различити од Римановог тензора кривине Леви-Чивита конексије, и штавише, увек су различити од нуле, чиме смо оправдали овакав приступ. Затим смо, коришћењем та три тензора кривине, конструисали тензоре коинциденте Вејловом пројективном тензору кривине у ко-Келеровој многострукости и на тај начин смо одредили услове да поменута многострукост буде пројективно равна. Мотивисани чињеницом да одговарајући Ричијеви тензори за поменута три тензора кривине такође не могу бити једнаки нули, задали смо им слабије услове и тако дефинисали специјалне ко-Келерове многострукости са четврт-симетричном метричком A-конексијом, за које ћемо показати да се поклапају са η-Ајнштајновим многострукостима.

3.3.1 Скоро контактна метричка многострукост са четврт-симетричном метричком A-конексијом

Скоро контактна метричка многострукост $(\mathcal{M}, g, A, \eta, \xi)$ је n-димензионална диференцијабилна многострукост $\mathcal{M}$ (где је $n = 2k+1 \geq 3$, $k \in \mathbb{N}$) снабдевена скоро контактном структуром A и карактеристичним вектором ξ, дуалним са η у односу на метрику g, $\eta(\xi) = 1$, $\eta(X) = g(X, \xi)$, са следећим условима

$$A^2 = -I + \eta \otimes \xi, \quad A\xi = 0, \quad \eta \circ A = 0 \tag{3.3.1}$$

и

$$g(AX, AY) = g(X, Y) - \eta(X)\eta(Y). \tag{3.3.2}$$

За симетричну метрику g која задовољава претходни услов се каже да је *компатибилна* са скоро контактном структуром. Фундаментална 2-форма F, дефинисана једначином (1.9.1), је дегенерисана и ранга $2k$, тј. важи $F(X, \xi) = 0$. Са тачке гледишта из генералисане Риманове многострукости, јасно је да скоро контактна многострукост представља пример генералисане Риманове многострукости $(\mathcal{M}, G = g + F)$ снабдевене каракеристичним вектором ξ и његовим дуалним ковектором η, тако да g и A задовољавају претходне релације, при чему је $F(X, Y) = g(AX, Y)$.

Коришћењем (3.3.1) и (3.3.2), једноставно се може показати да основни тензор G и фундаментална 2-форма F задовољавају следеће релације са скоро контактном структуром

$$\begin{aligned}
G(X, \xi) &= \eta(X), \quad G(\xi, \xi) = 1, \\
F(AX, Y) &= -F(X, AY), \quad F(AX, AY) = F(X, Y), \\
G(AX, Y) &= -G(X, AY), \quad G(AX, AY) = G(X, Y) - \eta(X)\eta(Y).
\end{aligned}$$

Скоро контактна метричка многострукост је *нормална* ако је одговарајућа комплексна структура на $\mathcal{M} \times \mathbb{R}$ интеграбилна, што је еквивалентно услову $N^{ac} = N + \mathrm{d}\eta \otimes \xi = 0$, где N означава Нијенхуисов тензор структурног тензора A, док симбол d означава спољашни диференцијал. За скоро контактну метричку многострукост се каже да је *скоро ко-Келерова* (тј. *скоро косимплектичка*) ако су затворене 2-форма F и 1-форма η, тј. ако важи $\mathrm{d}F = 0$ и $\mathrm{d}\eta = 0$ [48]. Ако је скоро ко-Келерова многострукост нормална, тада се назива *ко-Келерова* (или *косимплектичка*) многострукост [48, 59]. Доказано је да скоро контактна метричка многострукост постаје ко-Келерова ако и само ако је $\overset{g}{\nabla} A = 0$ (нпр. видети стр. 95 у [8]).

Због терминологије у скоро контактним метричким многостукостима, у овом делу рада ћемо уместо ковектора π користити ковектор η и уместо вектора P вектор ξ, односно проучаваћемо четврт-симетричну метричку A-конексију $\overset{1}{\nabla}$ која има тензор торзије облика

$$\overset{1}{T}(X, Y) = \eta(Y)AX - \eta(X)AY.$$

и таква конексија се у овом случају записује у облику

$$\overset{1}{\nabla}_X Y = \overset{g}{\nabla}_X Y - \eta(X)AY \tag{3.3.3}$$

при чему важе једначине (3.1.1) и (3.1.6). Симетрична конексија $\overset{0}{\nabla}$ и дуална конексија $\overset{2}{\nabla}$ четврт-симетричне метричке A-конексије (3.3.3) имају следеће облике

$$\overset{0}{\nabla}_X Y = \overset{g}{\nabla}_X Y - \frac{1}{2}\eta(X)AY - \frac{1}{2}\eta(Y)AX, \tag{3.3.4}$$

$$\overset{2}{\nabla}_X Y = \overset{g}{\nabla}_X Y - \eta(Y)AX. \tag{3.3.5}$$

У раду [55] је доказано да за метричку A-конексију, тј. за конексију $\overset{1}{\nabla}$ која чува основни тензор G, на скоро контактним метричким многостукостима важи $\overset{1}{\nabla}\eta = \overset{1}{\nabla}\xi = 0$, па се за такву конексију може користити и назив *метричка* (ξ, A)*-конексија*. Узимајући у обзир и једначину (3.1.1), следи да је тензор торзије $\overset{1}{T}$ у овим многостукостима паралелан у односу на конексију $\overset{1}{\nabla}$, тј. $\overset{1}{\nabla}\overset{1}{T} = 0$. У раду [112], су проучаване особине тензора торзије $\overset{1}{T}$ конексије (3.3.3) у поменутим многострукостима.

На основу једначине (3.1.6), видимо да је структурни тензор A паралелан у односу на Леви-Чивита конексију, што имплицира наредно тврђење.

Теорема 3.3.1 *Скоро контактна метричка многострукост* $(\mathcal{M}, g, A, \eta, \xi, \overset{1}{\nabla})$ *са четврт-симетричном метричком A-конексијом (3.3.3) је ко-Келерова (косимплектичка) многострукост.*

У складу са претходном теоремом, у наставку ћемо се бавити ко-Келеровим многострукостима $(\mathcal{M}, g, A, \eta, \xi, \overset{1}{\nabla})$ са четврт-симетричном метричком (ξ, A)-конексијом (3.3.3).

3.3.2 Особине тензора кривине четврт-симетричне конексије у ко-Келеровој многострукости

У ко-Келеровој многострукости ковектор η и вектор ξ су паралелни у односу на Леви-Чивита конексију [48], тј. важи $\overset{g}{\nabla}\eta = \overset{g}{\nabla}\xi = 0$. На основу тога, могу се доказати неке од следећих особина које има Риманов тензор кривине $\overset{g}{R}$ у ко-Келеровој многострукости [42, 83]

$$\overset{g}{R}(X,Y)AZ = A\overset{g}{R}(X,Y)Z, \ \ \overset{g}{R}(AX,AY)Z = \overset{g}{R}(X,Y)Z, \tag{3.3.6}$$

$$\eta(\overset{g}{R}(X,Y)Z) = 0, \ \ \overset{g}{R}(X,Y)\xi = \overset{g}{R}(X,\xi)Z = 0, \tag{3.3.7}$$

$$\overset{g}{Ric}(AX,AY) = \overset{g}{Ric}(X,Y), \ \ \overset{g}{Ric}(X,\xi) = 0, \ \ \overset{g}{Q}\xi = 0. \tag{3.3.8}$$

Поред тога, Ричијев оператор $\overset{g}{Q}$ комутира са структурним тензором A, тј. задовољава једначину $A\overset{g}{Q} = \overset{g}{Q}A$ [42]. У наставку ћемо проучавати особине линеарно независних тензора кривине $\overset{\theta}{R}$, $\theta = 0, 1, \ldots, 5$, у односу на четврт-симетричну метричку (ξ, A)-конексију (3.3.3). Посматрајући особине ко-Келерове многострукости (тачније, једначине (3.3.1) и $\overset{g}{\nabla}\eta = 0$), тензори кривине $\overset{\theta}{R}$, $\theta = 0, 1, \ldots, 5$, дати једначинама (3.1.7), (3.1.10)-(3.1.14), добијају следеће облике

$$\overset{\gamma}{R}(X,Y)Z = \overset{g}{R}(X,Y)Z, \ \gamma = 1,2,3, \tag{3.3.9}$$

$$\overset{0}{R}(X,Y)Z = \overset{g}{R}(X,Y)Z + \frac{1}{4}\eta(Z)(\eta(Y)X - \eta(X)Y), \tag{3.3.10}$$

$$\overset{4}{R}(X,Y)Z = \overset{g}{R}(X,Y)Z + \eta(Z)(\eta(Y)X - \eta(X)Y), \tag{3.3.11}$$

$$\overset{5}{R}(X,Y)Z = \overset{g}{R}(X,Y)Z + \frac{1}{2}\eta(Y)(\eta(Z)X - \eta(X)Z). \tag{3.3.12}$$

На основу претходних једначина видимо да су тензори кривине $\overset{1}{R}$ и $\overset{2}{R}$ коинцидентни са Римановим тензором кривине $\overset{g}{R}$, што значи да се $\overset{g}{R}$ не мења при трансформацији Леви-Чивита конексије на четврт-симетричну метричку (ξ, A)-конексију или на њену дуалну конексију, што формално записујемо следећом теоремом.

Теорема 3.3.2 *Нека је* $(\mathcal{M}, g, A, \eta, \xi, \overset{1}{\nabla})$ *ко-Келерова многострукост,* $\overset{g}{\nabla}$ *Леви-Чивита конексија,* $\overset{1}{\nabla}$ *четврт-симетрична метричка* (ξ, A)*-конексија (3.3.3) и* $\overset{2}{\nabla}$ *њена дуална конексија (3.3.5). Риманов тензор кривине* $\overset{g}{R}$ *је инваријантан при трансформацији конексија* $\overset{g}{\nabla} \to \overset{1}{\nabla}$ *и* $\overset{g}{\nabla} \to \overset{2}{\nabla}$.

Са друге стране, једначина (3.3.10) нам показује да је Риманов тензор кривине различит од тензора кривине симетричне конексије $\overset{0}{\nabla}$, што је био поводом да видимо шта се дешава при трансформацији конексије $\overset{g}{\nabla} \to \overset{0}{\nabla}$ и у вези са тим доказујемо наредно тврђење.

Теорема 3.3.3 *Нека је* $(\mathcal{M}, g, A, \eta, \xi, \overset{1}{\nabla})$ *ко-Келерова многострукост са четврт-симетричном метричком* (ξ, A)*-конексијом (3.3.3),* $\overset{g}{\nabla}$ *Леви-Чивита конексија и* $\overset{0}{\nabla}$ *симетрична конексија (3.3.4). Риманов тензор кривине* $\overset{g}{R}$ *не може бити инваријантан при трансформацији конексије* $\overset{g}{\nabla} \to \overset{0}{\nabla}$.

Доказ: Ако претпоставимо да је $\overset{g}{R}$ инваријантан при трансформацији $\overset{g}{\nabla} \to \overset{0}{\nabla}$, тада важи $\overset{0}{R} = \overset{g}{R}$. Даље, на основу једначине (3.3.10), имамо да је $\eta(Y)X - \eta(X)Y = 0$, одакле, након контракције, добијамо $(n-1)\eta(Y) = 0$, што је немогуће. ☐

Једначине (3.3.11) и (3.3.12) имплицирају наредно тврђење, које се може доказати на сличан начин као и претходно.

Теорема 3.3.4 *Нека је* $(\mathcal{M}, g, A, \eta, \xi, \overset{1}{\nabla})$ *ко-Келерова многострукост са четврт-симетричном метричком* (ξ, A)*-конексијом (3.3.3). Тензори кривине* $\overset{4}{R}$ *и* $\overset{5}{R}$*, дати једначинама (3.3.11) и (3.3.12), су различити од Римановог тензора кривине* $\overset{g}{R}$.

Штавише, коришћењем датих једначина за тензоре кривине $\overset{0}{R}$, $\overset{4}{R}$ и $\overset{5}{R}$, као и особина Римановог тензора кривине $\overset{g}{R}$, можемо доказати да ова три тензора не могу бити једнаки нули.

Теорема 3.3.5 *Нека је* $(\mathcal{M}, g, A, \eta, \xi, \overset{1}{\nabla})$ *ко-Келерова многострукост са четврт-симетричном метричком* (ξ, A)*-конексијом (3.3.3). Тензори кривине* $\overset{0}{R}$*,* $\overset{4}{R}$ *и* $\overset{5}{R}$*, дати једначинама (3.3.10)–(3.3.12), су различити од нуле.*

Доказ: Ако претпоставимо да је $\overset{0}{R} = 0$, тада на основу једначине (3.3.10), имамо да је

$$\overset{g}{R}(X,Y)Z = \frac{1}{4}\eta(Z)(\eta(X)Y - \eta(Y)X).$$

Ако искористимо особину Римановог тензора кривине $\overset{g}{R}(X,Y)\xi = 0$, тада из претходне једначине следи $\eta(X)Y - \eta(Y)X = 0$, што је немогуће. Сличан је и доказ за остала два тензора кривине. ☐

Дакле, и поред тога што се тензор кривине конексије $\overset{1}{\nabla}$ поклапа са Римановим тензором кривине Леви-Чивита конексије $\overset{g}{\nabla}$, претходном теоремом смо доказали да у ко-Келеровој многострукости са четврт-симетричном метричком (ξ, A)-конексијом (3.3.3) увек можемо посматрати три тензора кривине која су различита од Римановог тензора кривине $\overset{g}{\nabla}$ и увек су различита од нуле.

На основу једначина (3.3.9)–(3.3.12), видимо да су сви тензори кривине анти-симетрични по векторима X и Y, осим $\overset{5}{R}$. Са друге стране, сви тензори кривине $\overset{0}{R}, \overset{1}{R}, \ldots, \overset{5}{R}$ имају особину цикличне симетричности. Пошто су тензори кривине $\overset{1}{R}$, $\overset{2}{R}$ и $\overset{3}{R}$ једнаки са $\overset{g}{R}$, јасно је да имају исте особине, па у наставку нећемо посматрати та три тензора, већ само $\overset{0}{R}$, $\overset{4}{R}$ и $\overset{5}{R}$. Коришћењем особина које задовољава Риманов тензор кривине $\overset{g}{R}$, лако се могу доказати наредне релације

$$\eta(\overset{\theta}{R}(X,Y)Z) = 0, \quad \overset{\theta}{R}(AX,AY)Z = \overset{g}{R}(X,Y)Z, \quad \theta = 0,4,5,$$
$$\overset{0}{R}(X,Y)AZ = \overset{4}{R}(X,Y)AZ = \overset{g}{R}(X,Y)AZ, \quad \overset{5}{R}(X,AY)Z = \overset{g}{R}(X,AY)Z$$

и

$$\begin{aligned}
A\overset{0}{R}(X,Y)Z &= \overset{0}{R}(X,Y)AZ + \frac{1}{4}\eta(Z)\overset{1}{T}(X,Y),\\
A\overset{4}{R}(X,Y)Z &= \overset{4}{R}(X,Y)AZ + \eta(Z)\overset{1}{T}(X,Y),\\
A\overset{5}{R}(X,Y)Z &= \overset{5}{R}(X,Y)AZ + \frac{1}{2}\eta(Y)\eta(Z)AX.
\end{aligned}$$

Тензори кривине $\overset{0}{R}$, $\overset{4}{R}$, $\overset{5}{R}$ и карактеристично векторско поље ξ задовољавају једначине

$$\begin{aligned}
4\overset{0}{R}(X,Y)\xi &= \overset{4}{R}(X,Y)\xi = 2\overset{5}{R}(X,\xi)Y = \eta(Y)X - \eta(X)Y,\\
4\overset{0}{R}(X,\xi)Y &= \overset{4}{R}(X,\xi)Y = 2\overset{5}{R}(X,Y)\xi = -\eta(Y)A^2X,\\
\overset{0}{R}(\xi,\xi)X &= \overset{4}{R}(\xi,\xi)X = \overset{5}{R}(\xi,X)\xi = 0.
\end{aligned}$$

Контракцијом по вектору X у једначинама (3.3.10)–(3.3.12), добијамо одговарајуће Ричијеве тензоре

$$\overset{0}{Ric} = \overset{g}{Ric} + \frac{n-1}{4}\eta\otimes\eta, \tag{3.3.13}$$

$$\overset{4}{Ric} = \overset{g}{Ric} + (n-1)\eta\otimes\eta, \tag{3.3.14}$$

$$\overset{5}{Ric} = \overset{g}{Ric} + \frac{n-1}{2}\eta\otimes\eta. \tag{3.3.15}$$

Видимо да су сви Ричијеви тензори симетрични и имају следеће особине

$$\overset{\theta}{Ric}(AX,AY) = \overset{g}{Ric}(X,Y), \quad \theta = 0,4,5, \tag{3.3.16}$$

$$4\overset{0}{Ric}(X,\xi) = \overset{4}{Ric}(X,\xi) = 2\overset{5}{Ric}(X,\xi) = (n-1)\eta(X), \tag{3.3.17}$$

$$4\overset{0}{Ric}(\xi,\xi) = \overset{4}{Ric}(\xi,\xi) = 2\overset{5}{Ric}(\xi,\xi) = n-1. \tag{3.3.18}$$

Ако претпоставимо да је, рецимо, $\overset{5}{Ric} = 0$, тада следи да је $2\overset{g}{Ric} + (n-1)\eta\otimes\eta = 0$. Коришћењем особине Ричијевог тензора, $\overset{g}{Ric}(X,\xi) = 0$, из претходне једначине се добија $\eta = 0$, што је немогуће. На овај начин можемо доказати наредно тврђење.

Теорема 3.3.6 *Нека је* $(\mathcal{M}, g, A, \eta, \xi, \overset{1}{\nabla})$ *ко-Келерова многострукост са четврт-симетричном метричком* (ξ, A)*-конексијом (3.3.3). Ричијеви тензори* $\overset{0}{Ric}$, $\overset{4}{Ric}$ *и* $\overset{5}{Ric}$*, дати једначинама (3.3.13)–(3.3.15), су различити од нуле.*

Сада ћемо посматрати Ричијеве операторе $\overset{\theta}{Q}$, $\theta = 0, 4, 5$.

Теорема 3.3.7 *Нека је* $(\mathcal{M}, g, A, \eta, \xi, \overset{1}{\nabla})$ *ко-Келерова многострукост са четврт-симетричном метричком* (ξ, A)*-конексијом (3.3.3). Ричијеви оператори* $\overset{\theta}{Q}$*, дефинисани једначнинама* $\overset{\theta}{Ric}(X, Y) = g(\overset{\theta}{Q}X, Y)$, $\theta = 0, 4, 5$*, комутирају са структурним тензором* A*.*

Доказ: На основу једначина Ричијевих тензора (3.3.13)–(3.3.15), добијамо одговарајуће Ричијеве операторе

$$\overset{0}{Q} = \overset{g}{Q} + \frac{n-1}{4}\eta \otimes \xi, \quad \overset{4}{Q} = \overset{g}{Q} + (n-1)\eta \otimes \xi, \quad \overset{5}{Q} = \overset{g}{Q} + \frac{n-1}{2}\eta \otimes \xi. \tag{3.3.19}$$

Узимајући у обзир (3.3.1), имамо

$$A\overset{\theta}{Q} = A\overset{g}{Q} \quad \text{и} \quad \overset{\theta}{Q}A = \overset{g}{Q}A, \quad \theta = 0, 4, 5.$$

С обзиром на то да Ричијев оператор $\overset{g}{Q}$ комутира са A, следи да комутирају и Ричијеви оператори $\overset{\theta}{Q}$ са A. □

Из релација (3.3.19) се добијају одговарајући скалари, који задовољавају следеће једначине

$$4(\overset{0}{r} - \overset{g}{r}) = \overset{4}{r} - \overset{g}{r} = 2(\overset{5}{r} - \overset{g}{r}) = n - 1 \tag{3.3.20}$$

и са овим смо доказали наредну теорему.

Теорема 3.3.8 *Нека је* $(\mathcal{M}, g, A, \eta, \xi, \overset{1}{\nabla})$ *ко-Келерова многострукост са четврт-симетричном метричком* (ξ, A)*-конексијом (3.3.3). Тада је разлика* $\overset{\theta}{r} - \overset{g}{r}$ *константна, где* $\overset{\theta}{r}$ *и* $\overset{g}{r}$ *означавају скаларе кривине,* $\theta = 0, 4, 5$*.*

3.3.3 Пројективно равна ко-Келерова многострукост

У овој секцији ћемо проучавати Вејлов пројективни тензор кривине Леви-Чивита конексије на ко-Келеровој многострукости. Наиме, коришћењем тензора кривине четврт-симетричне метричке (ξ, A)-конексије (3.3.3), тачније елиминацијом ковектора η из једначина тензора кривине $\overset{0}{R}$, $\overset{4}{R}$ и $\overset{5}{R}$, конструисаћемо тензоре који су коинцидентни са Вејловим пројективним тензором кривине.

Теорема 3.3.9 *Нека је* $(\mathcal{M}, g, A, \eta, \xi, \overset{1}{\nabla})$ *ко-Келерова многострукост са четврт-симетричном метричком* (ξ, A)*-конексијом (3.3.3). Тада важе следеће једначине*

$$\overset{\theta}{W}(X, Y)Z = \overset{g}{W}(X, Y)Z, \quad \theta = 0, 4, \tag{3.3.21}$$

$$\overset{5}{W}(X, Y)Z = \overset{g}{W}(X, Z)Y + \overset{g}{R}(Z, Y)X, \tag{3.3.22}$$

где је $\overset{g}{W}$ *Вејлов пројективни тензор кривине (1.7.5), а* $\overset{0}{W}$, $\overset{4}{W}$ *и* $\overset{5}{W}$ *су тензори дати једначинама*

$$\overset{\theta}{W}(X, Y)Z = \overset{\theta}{R}(X, Y)Z + \frac{1}{n-1}(\overset{\theta}{Ric}(X, Z)Y - \overset{\theta}{Ric}(Y, Z)X), \quad \theta = 0, 4, \tag{3.3.23}$$

$$\overset{5}{W}(X, Y)Z = \overset{5}{R}(X, Y)Z + \frac{1}{n-1}(\overset{5}{Ric}(X, Y)Z - \overset{5}{Ric}(Z, Y)X). \tag{3.3.24}$$

Доказ: Доказаћемо једнакост за тензор $\overset{5}{W}$. Из једначине (3.3.15), имамо

$$\frac{1}{2}\eta\otimes\eta=\frac{1}{n-1}(\overset{5}{Ric}-\overset{g}{Ric}).$$

Заменом претходног израза у (3.3.12), тензор кривине пете врсте добија облик

$$\overset{5}{R}(X,Y)Z=\overset{g}{R}(X,Y)Z+\frac{1}{n-1}(\overset{5}{Ric}(Y,Z)X-\overset{g}{Ric}(Y,Z)X-\overset{5}{Ric}(X,Y)Z+\overset{g}{Ric}(X,Y)Z),$$

и након сређивања, добијамо

$$\begin{aligned}\overset{5}{W}(X,Y)Z&=\overset{g}{R}(X,Y)Z+\frac{1}{n-1}(\overset{g}{Ric}(X,Y)Z-\overset{g}{Ric}(Z,Y)X)\\&=\overset{g}{R}(X,Z)Y+\frac{1}{n-1}(\overset{g}{Ric}(X,Y)Z-\overset{g}{Ric}(Z,Y)X)-\overset{g}{R}(X,Z)Y+\overset{g}{R}(X,Y)Z\\&=\overset{g}{W}(X,Z)Y+\overset{g}{R}(Z,X)Y+\overset{g}{R}(X,Y)Z=\overset{g}{W}(X,Z)Y+\overset{g}{R}(Z,Y)X,\end{aligned}$$

где је $\overset{5}{W}$ тензор дат једначином (3.3.24), при чему смо у рачуну користили и особине антисиметричности и цикличне симетричности Римановог тензора кривине $\overset{g}{R}$. □

Тензор $\overset{0}{W}$ је пројективни тензор кривине симетричне конексије $\overset{0}{\nabla}$, и пошто је једнак са Вејловим пројективним тензором кривине, можемо формулисати наредно тврђење.

Теорема 3.3.10 *Нека је* $(\mathcal{M},g,A,\eta,\xi,\overset{1}{\nabla})$ *ко-Келерова многострукост са четврт-симетричном метричком* (ξ,A)*-конексијом (3.3.3), нека је* $\overset{g}{\nabla}$ *Леви–Чивита конексија и нека је* $\overset{0}{\nabla}$ *симетрична конексија (3.3.4). Вејлов пројективни тензор кривине* $\overset{g}{W}$ *је инваријантан при трансформацији конексије* $\overset{g}{\nabla}\to\overset{0}{\nabla}$.

Поред тога, пошто је Риманов тензор кривине $\overset{g}{R}$ коинцидентан са $\overset{1}{R}$ и $\overset{2}{R}$, то значи да се и сви геометријски објекти који садрже Риманов тензор кривине и његове деривате не мењају при трансформацији Леви-Чивита конексије на четврт-симетричну метричку (ξ,A)-конексију и на њену дуалну конексију, па је јасно да је Вејлов пројективни тензор кривине инваријантан и при трансформацијама $\overset{g}{\nabla}\to\overset{1}{\nabla}$ и $\overset{g}{\nabla}\to\overset{2}{\nabla}$.

С обзиром на то да смо помоћу четврт-симетричне конексије конструисали Вејлов пројективни тензор кривине $\overset{g}{W}$ у ко-Келеровој многострукости, сада ћемо испитати шта се дешава ако је многострукост пројективно равна. Стога, ако претпоставимо да је $\overset{g}{W}=0$, тада важи

$$\overset{g}{R}(X,Y)Z=\frac{1}{n-1}(\overset{g}{Ric}(Y,Z)X-\overset{g}{Ric}(X,Z)Y).\tag{3.3.25}$$

На основу особине Римановог тензора кривине $\overset{g}{R}$ и Ричијевог тензора $\overset{g}{Ric}$ у ко-Келеровој многострукости, тј. коришћењем једначина (3.3.7) и (3.3.8), имамо

$$0=\overset{g}{R}(X,\xi)Z=\frac{1}{n-1}(\overset{g}{Ric}(\xi,Z)X-\overset{g}{Ric}(X,Z)\xi)=-\frac{1}{n-1}\overset{g}{Ric}(X,Z)\xi,$$

одакле добијамо да је многострукост Ричи равна, тј. $\overset{g}{Ric}=0$. Штавише, заменом ове једнакости у (3.3.25), добијамо $\overset{g}{R}=0$. На овај начин смо доказали наредно тврђење.

Теорема 3.3.11 *Ко-Келерова многострукост је пројективно равна ако и само ако је равна.*

Напомена 3.3.1 *Теорема 3.3.11 се може посматрати као последица тврђења из радова* [7,134]. *Наиме, многуструкост је пројективно равана ако и само ако је константне кривине (видети стр. 84–85 у* [134]*), а ко-Келерова многострукост константне кривине је равна* [7,48]. *Стога, можемо закључити да је пројективно равна ко-Келерова многострукост заправо равна. Овде смо навели и експлицитан доказ овог тврђења.*

Посматрањем претходних резултата за четврт-симетричну метричку (ξ, A)-конексију (3.3.3), сада можемо дати наредно тврђење.

Последица 3.3.1 *Нека је* $(\mathcal{M}, g, A, \eta, \xi, \overset{1}{\nabla})$ *ко-Келерова многострукост са четврт-симетричном метричком* (ξ, A)*-конексијом (3.3.3). Тада је посматрана многострукост пројективно равна ако и само ако ишчезава било који од тензора* $\overset{\theta}{W}$, $\theta = 0, 4, 5$, *који су дати једначинама (3.3.23) и (3.3.24).*

Доказ: Тврђење је јасно за тензоре $\overset{0}{W}$ и $\overset{4}{W}$, јер су коинцидентни са $\overset{g}{W}$. Сада ћемо доказати тврђење за тензор $\overset{5}{W}$. Ако претпоставимо да је посматрана многострукост пројективно равна, тада је такође и равна, па важи $\overset{g}{W} = \overset{g}{R} = 0$. Даље, из једначине (3.3.22), добијамо $\overset{5}{W} = 0$.

Са друге стране, ако је $\overset{5}{W} = 0$, тада из једначине (3.3.22), имамо $\overset{g}{W}(X, Z)Y + \overset{g}{R}(Z, Y)X = 0$, одакле следи да је

$$\overset{g}{R}(X, Y)Z = \frac{1}{n-1}(\overset{g}{Ric}(Z, Y)X - \overset{g}{Ric}(X, Y)Z). \tag{3.3.26}$$

Узимајући у обзир идентитете (3.3.7) и (3.3.8), добијамо

$$0 = \overset{g}{R}(X, Y)\xi = \frac{1}{n-1}(\overset{g}{Ric}(\xi, Y)X - \overset{g}{Ric}(X, Y)\xi) = -\frac{1}{n-1}\overset{g}{Ric}(X, Y)\xi,$$

одакле следи да је $\overset{g}{Ric} = 0$. Заменом последње једнакости у (3.3.26), добијамо да је многострукост равна, што имплицира и да је пројективно равна. Овим смо комплетирали доказ. □

3.3.4 η-Ајнштајнове ко-Келерове многострукости

Ко-Келерова многострукост је η-*Ајнштајнова* ако Ричијев тензор има облик

$$\overset{g}{Ric} = ag + b\eta \otimes \eta, \tag{3.3.27}$$

где су a и b диференцијабилне функције. Ако искористимо другу особину Ричијевог тензора из (3.3.8), тада на основу претходне једначине имамо да важи $a + b = 0$, па Ричијев тензор добија облик $\overset{g}{Ric} = a(g - \eta \otimes \eta)$. Контракцијом ове последње једнакости, добијамо везу између скалара кривине и скалара a, тј. једначину $\overset{g}{r} = a(n-1)$. Стога, η-Ајнштајнова ко-Келерова многострукост се карактерише следећим обликом Ричијевог тензора

$$\overset{g}{Ric} = \frac{\overset{g}{r}}{n-1}(g - \eta \otimes \eta). \tag{3.3.28}$$

Видимо да је η-Ајнштајнова ко-Келерова многострукост Ричи равна ако и само ако је $\overset{g}{r} = 0$. У раду [83] је показано да је скалар кривине $\overset{g}{r}$ константан у случају када је η-Ајнштајнова ко-Келерова многострукост димензије бар 5. Пример η-Ајнштајнова ко-Келерове многострукости је ко-Келерова многострукост константне ϕ-секционе кривине c, чији је Ричијев тензор дат једначином $\overset{g}{Ric} = \frac{c(k+1)}{2}(g - \eta \otimes \eta)$ (једначина (2.4) у [62]). Поред тога, свака тродимензионална ко-Келерова многострукост је η-Ајнштајнова [127] и квази константне кривине [20]. За $b = 0$ у једначини (3.3.27), имамо Ајнштајнову многострукост. Свака Ајнштајнова ко-Келерова многострукост је Ричи равна [25].

Пошто Ричијеви тензори $\overset{0}{Ric}$, $\overset{4}{Ric}$ и $\overset{5}{Ric}$, дати једначинама (3.3.13)–(3.3.15), не могу бити једнаки нули, сада ћемо им задати слабије услове. Узимајући у обзир да су ови тензори симетрични, следећом дефиницијом уводимо специјалне класе посматране многострукости.

Дефиниција 3.3.1 Нека је $(\mathcal{M}, g, A, \eta, \xi, \overset{1}{\nabla})$ ко-Келерова многострукост са четврт-симетричном метричком (ξ, A)-конексијом (3.3.3). Многострукост је *η-Ајнштајнова θ врсте*, $\theta = 0, 4, 5$ ако важи

$$\overset{\theta}{Ric} = \overset{\theta}{a} g + \overset{\theta}{b} \eta \otimes \eta, \quad \theta = 0, 4, 5,$$

где су $\overset{\theta}{a}$ и $\overset{\theta}{b}$ диференцијабилне функције.

Контракцијом претходне једначине, добијамо одговарајуће скаларе кривине

$$\overset{\theta}{r} = \overset{\theta}{a} n + \overset{\theta}{b}, \quad \theta = 0, 4, 5.$$

На основу особине Ричијевог тензора нулте врсте $\overset{0}{Ric}$ (видети једначину (3.3.18)), имамо $4(\overset{0}{a} + \overset{0}{b}) = n - 1$. Решавањем система једначина

$$\overset{0}{r} = \overset{0}{a} n + \overset{0}{b}, \quad 4(\overset{0}{a} + \overset{0}{b}) = n - 1,$$

добијамо изразе за скаларе $\overset{0}{a}$ и $\overset{0}{b}$

$$\overset{0}{a} = \frac{4\overset{0}{r} - n + 1}{4(n-1)}, \quad \overset{0}{b} = \frac{n(n-1) - 4\overset{0}{r}}{4(n-1)}.$$

Слично се одређују и изрази за скаларе $\overset{4}{a}$, $\overset{4}{b}$, $\overset{5}{a}$ и $\overset{5}{b}$

$$\overset{4}{a} = \frac{\overset{4}{r} - n + 1}{n-1}, \quad \overset{4}{b} = \frac{n(n-1) - \overset{4}{r}}{n-1},$$
$$\overset{5}{a} = \frac{2\overset{5}{r} - n + 1}{2(n-1)}, \quad \overset{5}{b} = \frac{n(n-1) - 2\overset{5}{r}}{2(n-1)}.$$

Последица претходних резултата је да η-Ајштајнова ко-Келерова многострукост θ врсте $\theta = 0, 4, 5$, добија облик

$$\overset{0}{Ric} = \frac{4\overset{0}{r} - n + 1}{4(n-1)} g + \frac{n(n-1) - 4\overset{0}{r}}{4(n-1)} \eta \otimes \eta,$$
$$\overset{4}{Ric} = \frac{\overset{4}{r} - n + 1}{n-1} g + \frac{n(n-1) - \overset{4}{r}}{n-1} \eta \otimes \eta,$$
$$\overset{5}{Ric} = \frac{2\overset{5}{r} - n + 1}{2(n-1)} g + \frac{n(n-1) - 2\overset{5}{r}}{2(n-1)} \eta \otimes \eta.$$

Коришћењем једначине (3.3.20), η-Ајштајнова ко-Келерова многострукост θ врсте $\theta = 0, 4, 5$, се може представити и у зависности од скалара кривине $\overset{g}{r}$ следећим једначинама

$$\overset{0}{Ric} = \frac{\overset{g}{r}}{n-1} g + \frac{(n-1)^2 - 4\overset{g}{r}}{4(n-1)} \eta \otimes \eta, \tag{3.3.29}$$
$$\overset{4}{Ric} = \frac{\overset{g}{r}}{n-1} g + \frac{(n-1)^2 - \overset{g}{r}}{n-1} \eta \otimes \eta, \tag{3.3.30}$$
$$\overset{5}{Ric} = \frac{\overset{g}{r}}{n-1} g + \frac{(n-1)^2 - 2\overset{g}{r}}{2(n-1)} \eta \otimes \eta. \tag{3.3.31}$$

Ове релације се могу искористити за доказивање наредне теореме.

Теорема 3.3.12 *Нека је* $(\mathcal{M}, g, A, \eta, \xi, \overset{1}{\nabla})$ *ко-Келерова многострукост са четврт-симетричном метричком* (ξ, A)*-конексијом (3.3.3). Многострукост је* η*-Ајнштајнова ако и само ако је* η*-Ајнштајнова* θ *врсте,* $\theta = 0, 4, 5$.

Доказ: Доказаћемо теорему за случај $\theta = 0$. Ако је многострукост η-Ајнштајнова, тада заменом једначине (3.3.28) у (3.3.13), добијамо израз (3.3.29) и стога је многострукост η-Ајнштајнова нулте врсте.

Са друге стране, ако је многострукост η-Ајнштајнова нулте врсте, тада из (3.3.13) и (3.3.29), имамо

$$\frac{\overset{g}{r}}{n-1}g + \frac{(n-1)^2 - 4\overset{g}{r}}{4(n-1)}\eta \otimes \eta = \overset{g}{Ric} + \frac{n-1}{4}\eta \otimes \eta,$$

одакле добијамо

$$\overset{g}{Ric} = \frac{\overset{g}{r}}{n-1}(g - \eta \otimes \eta),$$

што значи да је ко-Келерова многострукост η-Ајнштајнова у односу на метрику g. ☐

3.4 Четврт-симетрична неметричка конексија у генералисаним Римановим многострукостима

Услов метричности код конексије је врло јак, па са овим условом, за конкретан облик тензора торзије добијамо једну метричку конексију. Са искључењем услова метричности, можемо задавати разне облике за коваријанти извод метричког тензора g и на тај начин да, у зависности од тензора торзије, одредимо разне облике неметричких конексија.

Овде ћемо проучавати четврт-симетричну конексију без услова метричности, тј. полазимо од услова да је $\overset{1}{\nabla} g \neq 0$. Постоји неколико четврт-симетричних неметричких конексија, које су проучаване на разним многострукостима [16, 51, 58, 84, 119, 120, 139], а ми ћемо сада дефинисати нову четврт-симетричну неметричку конексију и проучавати је у генералисаним Римановим многострукостима.

У раду [14] је дефинисана полу-симетрична неметричка конексија дата једначином

$$\overset{1}{\nabla}_X Y = \overset{g}{\nabla}_X Y + a\pi(Y)X + b\pi(X)Y.$$

Ово нас је мотивисало да у генералисаним Римановим многострукостима посматрамо нову четврт-симетричну конексију у следећем облику

$$\overset{1}{\nabla}_X Y = \overset{g}{\nabla}_X Y + a\pi(Y)AX + b\pi(X)AY, \tag{3.4.1}$$

чији је тензор торзије дат једначином

$$\overset{1}{T}(X, Y) = (a - b)(\pi(Y)AX - \pi(X)AY),$$

где су a и b различити реални бројеви (тј. $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq b$), а A је (1,1)-тензор придружен антисиметричном тензору F. Коваријантни извод $\overset{1}{\nabla}$ метричког тензора g задовољава следећу једначину

$$\begin{aligned}(\overset{1}{\nabla}_X g)(Y, Z) &= Xg(Y, Z) - g(\overset{1}{\nabla}_X Y, Z) - g(Y, \overset{1}{\nabla}_X Z)\\ &= -a(\pi(Y)F(X, Z) + \pi(Z)F(X, Y)).\end{aligned}$$

Дакле, за $a = 0$ и $b \neq 0$, четврт-симетрична конексија (3.4.1) је метричка (у претходном делу смо проучавали конексију (3.1.4), која се добија за $b = -1$). За $a \neq 0$ конексија (3.4.1) је неметричка (на пример, таква је конексија (3.1.9) која се добија за $a = -1$, $b = 0$ и она је проучавана у радовима [5, 37]). У наставку ћемо проучавати неметричку конексију (3.4.1), где су оба коефицијента a и b различита од нуле.

3.4.1 Егзистенција четврт-симетричне неметричке конексије

У следећој теореми ћемо доказати егзистенцију четврт-симетричне конексије (3.4.1) са коефицијентима $a = -b = \frac{1}{2}$, тј. показаћемо да је задовољена једначина (1.9.2). Аналогно се може показати егзистенција конексије (3.4.1) за произвољне коефицијенте $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq b$, али због једноставнијег рачуна смо изабрали $a = -b = \frac{1}{2}$.

Теорема 3.4.1 *Нека је $(\mathcal{M}, G)$ генералисана Риманова многострукост и $\overset{g}{\nabla}$ Леви-Чивита конексија. Тада постоји јединствена линеарна конексија $\overset{1}{\nabla}$ дата једначином*

$$\overset{1}{\nabla}_X Y = \overset{g}{\nabla}_X Y + \frac{1}{2}\pi(Y)AX - \frac{1}{2}\pi(X)AY, \tag{3.4.2}$$

чији тензор торзије има облик

$$\overset{1}{T}(X,Y) = \pi(Y)AX - \pi(X)AY, \tag{3.4.3}$$

и која задовољава услов

$$(\overset{1}{\nabla}_X g)(Y,Z) = -\frac{1}{2}(\pi(Y)F(X,Z) + \pi(Z)F(X,Y)), \tag{3.4.4}$$

где је π 1-форма придружена вектору P, тј. $\pi(X) = g(X,P)$ и A је (1,1)-тензор придружен анти-симетричном делу F основног тензора G, тј. $F(X,Y) = g(AX,Y)$.

Доказ: Линеарна конексија $\overset{1}{\nabla}$ се може написати у облику

$$\overset{1}{\nabla}_X Y = \overset{g}{\nabla}_X Y + H(X,Y),$$

односно

$$g(\overset{1}{\nabla}_X Y, Z) = g(\overset{g}{\nabla}_X Y, Z) + H(X,Y,Z),$$

и на основу једначине (1.9.2) имамо

$$\begin{aligned} H(X,Y,Z) := g(H(X,Y),Z) =& \frac{1}{2}(\overset{1}{T}(X,Y,Z) + \overset{1}{T}(Z,X,Y) - \overset{1}{T}(Y,Z,X)) \\ &- \frac{1}{2}((\overset{1}{\nabla}_X g)(Y,Z) + (\overset{1}{\nabla}_Y g)(Z,X) - (\overset{1}{\nabla}_Z g)(Y,X)). \end{aligned}$$

Сада ћемо одредити тензор H тако да буде задовољена претходна једначина. Услов (3.4.4) имплицира следеће релације

$$\begin{aligned} (\overset{1}{\nabla}_Y g)(Z,X) &= -\frac{1}{2}(\pi(Z)F(Y,X) + \pi(X)F(Y,Z)), \\ (\overset{1}{\nabla}_Z g)(Y,X) &= -\frac{1}{2}(\pi(Y)F(Z,X) + \pi(X)F(Z,Y)). \end{aligned}$$

Из (3.4.3), следи

$$\overset{1}{T}(X,Y,Z) = \pi(Y)F(X,Z) - \pi(X)F(Y,Z),$$

и даље

$$\begin{aligned}\overset{1}{T}(Z,X,Y) =&\pi(X)F(Z,Y)-\pi(Z)F(X,Y),\\ \overset{1}{T}(Y,Z,X) =&\pi(Z)F(Y,X)-\pi(Y)F(Z,X).\end{aligned}$$

Комбинацијом претходних шест једначина и једначине (3.4.4), имамо

$$H(X,Y,Z)=\frac{1}{2}\pi(Y)F(X,Z)-\frac{1}{2}\pi(X)F(Y,Z),$$

одакле је

$$H(X,Y)=\frac{1}{2}\pi(Y)AX-\frac{1}{2}\pi(X)AY,$$

чиме смо доказали теорему. ☐

Према (3.4.3) и (3.4.4), конексија $\overset{1}{\nabla}$ дата једначином (3.4.2) је *четврт-симетрична неметричка конексија*. Ковектор π је *генератор* ове конексије.

Напомена 3.4.1 *У раду* [139] *је посматрана четврт-симетрична неметричка конексија у облику*

$$\overset{1}{\nabla}_XY=\overset{g}{\nabla}_XY+\frac{1}{2}\pi(Y)\phi X-\frac{1}{2}\pi(X)\phi Y,$$

где је ϕ произвољан (1,1)-тензор, док смо ми користили (1,1)-тензор A, који је придружен анти-симетричном тензору F. Занимљиво код ове конексије и код конексије (3.4.2) је што се могу записати у облику $\overset{1}{\nabla}=\overset{g}{\nabla}+\frac{1}{2}\overset{1}{T}$, а такве конексије имају исте геодезијске линије као и Леви-Чивита конексија.

За коваријанти извод анти-симетричног тензора F имамо

$$\begin{aligned}(\overset{1}{\nabla}_XF)(Y,Z) =&XF(Y,Z)-F(\overset{1}{\nabla}_XY,Z)-F(Y,\overset{1}{\nabla}_XZ)\\ =&(\overset{g}{\nabla}_XF)(Y,Z)-\frac{1}{2}F(\pi(Y)AX-\pi(X)AY)-\frac{1}{2}F(Y,\pi(Z)AX-\pi(X)AZ),\end{aligned}$$

тј.

$$(\overset{1}{\nabla}_XF)(Y,Z)=(\overset{g}{\nabla}_XF)(Y,Z)+\frac{1}{2}(\pi(Y)g(AX,AZ)-\pi(Z)g(AX,AY)), \tag{3.4.5}$$

одакле видимо да конексија (3.4.2) не чува тензор F. Сабирањем једначина (3.4.4) и (3.4.5), добијамо коваријантни извод основног тензора G

$$\begin{aligned}(\overset{1}{\nabla}_XG)(Y,Z) &= (\overset{1}{\nabla}_Xg)(Y,Z)+(\overset{1}{\nabla}_XF)(Y,Z)\\ &= (\overset{g}{\nabla}_XF)(Y,Z)+\frac{1}{2}(\pi(Y)(g(AX,AZ)-F(X,Z))-\pi(Z)(g(AX,AY)+F(X,Y))).\end{aligned}$$

Коваријантни извод тензора A је дат једначином

$$\begin{aligned}(\overset{1}{\nabla}_XA)Y &= \overset{1}{\nabla}_XAY-A(\overset{1}{\nabla}_XY)\\ &= \overset{g}{\nabla}_XAY+\frac{1}{2}\pi(AY)AX-\frac{1}{2}\pi(X)A^2Y-A(\overset{g}{\nabla}_XY+\frac{1}{2}\pi(Y)AX-\frac{1}{2}\pi(X)AY),\end{aligned}$$

одакле, након сређивања, добијамо

$$(\overset{1}{\nabla}_XA)Y=(\overset{g}{\nabla}_XA)Y+\frac{1}{2}(\pi(AY)AX-\pi(Y)A^2X).$$

За коваријанти извод ковектора π у односу на четврт-симетричну неметричку конексију (3.4.2), важи следећа једнакост

$$(\overset{1}{\nabla}_X\pi)(Y)=(\overset{g}{\nabla}_X\pi)(Y)+\frac{1}{2}\pi(X)\pi(AY)-\frac{1}{2}\pi(AX)\pi(Y), \tag{3.4.6}$$

која нам може послужити за доказивање наредног тврђења.

Теорема 3.4.2 *Нека је* $(\mathcal{M}, G, \overset{1}{\nabla})$ *генералисана Риманова многострукост са четврт-симетричном неметричком конексијом* (3.4.2). *Потребан и довољан услов да вектор* P *буде Килингов је да (0,2)-тензор* $\overset{1}{\nabla}\pi$ *буде анти-симетричан, тј. да важи једнакост*

$$(\overset{1}{\nabla}_X\pi)(Y) + (\overset{1}{\nabla}_Y\pi)(X) = 0.$$

Доказ: Лиов извод метрике g у односу на Леви-Чивита конексију је дат добро познатом једначином

$$(\mathcal{L}_P g)(X,Y) = g(\overset{g}{\nabla}_X P, Y) + g(X, \overset{g}{\nabla}_Y P)$$

односно

$$(\mathcal{L}_P g)(X,Y) = (\overset{g}{\nabla}_X\pi)(Y) + (\overset{g}{\nabla}_Y\pi)(X).$$

На основу (3.4.6), добијамо

$$(\mathcal{L}_P g)(X,Y) = (\overset{1}{\nabla}_X\pi)(Y) + (\overset{1}{\nabla}_Y\pi)(X),$$

одакле се јасно види тврђење ове теореме. □

Теорема 3.4.3 *Нека је* $(\mathcal{M}, G, \overset{1}{\nabla})$ *генералисана Риманова многострукост са четврт-симетричном неметричком конексијом* (3.4.2). *Тада важи следећа релација*

$$(\overset{1}{\mathcal{L}}_P g)(X,Y) = (\mathcal{L}_P g)(X,Y) + \pi(X)\pi(AY) + \pi(AX)\pi(Y),$$

где $\overset{1}{\mathcal{L}}$ *и* $\mathcal{L}$ *означавају Лиове изводе по конексијама* $\overset{1}{\nabla}$ *и* $\overset{g}{\nabla}$, *редом.*

Доказ: Лиов извод метрике g у односу на конексију $\overset{1}{\nabla}$ је дат једначином

$$\begin{aligned}(\overset{1}{\mathcal{L}}_P g)(X,Y) &= Pg(X,Y) - g(\overset{1}{\mathcal{L}}_P X, Y) - g(X, \overset{1}{\mathcal{L}}_P Y)\\ &= Pg(X,Y) - g(\overset{1}{\nabla}_P X - \overset{1}{\nabla}_X P, Y) - g(X, \overset{1}{\nabla}_P Y - \overset{1}{\nabla}_Y P)\\ &= (\overset{1}{\nabla}_P g)(X,Y) + g(\overset{1}{\nabla}_X P, Y) + g(X, \overset{1}{\nabla}_Y P).\end{aligned}$$

Коришћењем (3.4.4), за коваријантни извод метрике g по $\overset{1}{\nabla}$ у правцу вектор P имамо једначину

$$(\overset{1}{\nabla}_P g)(X,Y) = \frac{1}{2}(\pi(X)\pi(AY) + \pi(AX)\pi(Y)).$$

Претходне две једначине и (3.4.2), дају следећу релацију

$$\begin{aligned}(\overset{1}{\mathcal{L}}_P g)(X,Y) &= g(\overset{g}{\nabla}_X P, Y) + g(X, \overset{g}{\nabla}_Y P) + \pi(X)\pi(AY) + \pi(AX)\pi(Y)\\ &= (\mathcal{L}_P g)(X,Y) + \pi(X)\pi(AY) + \pi(AX)\pi(Y).\end{aligned}$$

□

Наредно тврђење је директна последица претходног.

Последица 3.4.1 *Нека је* $(\mathcal{M}, G, \overset{1}{\nabla})$ *генералисана Риманова многострукост са четврт-симетричном неметричком конексијом* (3.4.2). *Ако је вектор* P *Килингов тада важи*

$$(\overset{1}{\mathcal{L}}_P g)(X,Y) = \pi(X)\pi(AY) + \pi(AX)\pi(Y).$$

Дуална конексија $\overset{2}{\nabla}$ четврт-симетричне неметричке конексије (3.4.2) се може одредити преко једначине (1.5.1) и она има облик

$$\overset{2}{\nabla}_X Y = \overset{g}{\nabla}_X Y - \frac{1}{2}\pi(Y)AX + \frac{1}{2}\pi(X)AY. \tag{3.4.7}$$

Конексија $\overset{2}{\nabla}$ је такође неметричка и задовољава следеће релације

$$\begin{aligned}
(\overset{2}{\nabla}_X g)(Y,Z) &= \frac{1}{2}(\pi(Y)F(X,Z) + \pi(Z)F(X,Y)),\\
(\overset{2}{\nabla}_X F)(Y,Z) &= (\overset{g}{\nabla}_X F)(Y,Z) - \frac{1}{2}(\pi(Y)g(AX,AZ) - \pi(Z)g(AX,AY)),\\
(\overset{2}{\nabla}_X G)(Y,Z) &= (\overset{g}{\nabla}_X F)(Y,Z) - \frac{1}{2}(\pi(Y)(g(AX,AZ) - F(X,Z)) - \pi(Z)(g(AX,AY) + F(X,Y))),\\
(\overset{2}{\nabla}_X A)Y &= (\overset{g}{\nabla}_X A)Y - \frac{1}{2}(\pi(AY)AX - \pi(Y)A^2X).
\end{aligned}$$

На основу једначина (1.5.2) и (3.4.7), закључујемо да се симетрича конексија $\overset{0}{\nabla}$ четврт-симетричне неметричке конексије (3.4.2) поклапа са Леви-Чивита конексијом $\overset{g}{\nabla}$, тј. важи

$$\overset{0}{\nabla}_X Y = \overset{g}{\nabla}_X Y. \tag{3.4.8}$$

Нека је $\overset{1}{\mathrm{d}}F$ диференцијал анти-симетричног тензора F у односу на четврт-симетричну неметричку конексију $\overset{1}{\nabla}$, тј.

$$\overset{1}{\mathrm{d}}F(X,Y,Z) = (\overset{1}{\nabla}_X F)(Y,Z) + (\overset{1}{\nabla}_Y F)(Z,X) + (\overset{1}{\nabla}_Z F)(X,Y).$$

Цикличним сумирањем израза (3.4.5) добијамо[1]

$$\begin{aligned}
\overset{1}{\mathrm{d}}F(X,Y,Z) &= (\overset{1}{\nabla}_X F)(Y,Z) + (\overset{1}{\nabla}_Y F)(Z,X) + (\overset{1}{\nabla}_Z F)(X,Y)\\
&= (\overset{g}{\nabla}_X F)(Y,Z) + (\overset{g}{\nabla}_Y F)(Z,X) + (\overset{g}{\nabla}_Z F)(X,Y) = \mathrm{d}F(X,Y,Z).
\end{aligned} \tag{3.4.9}$$

Теорема 3.4.4 *Нека је* $(\mathcal{M}, G, \overset{1}{\nabla})$ *генералисана Риманова многострукост са четврт-симетричном неметричком конексијом (3.4.2). Диференцијал 2-форме* F *у односу на Леви-Чивита конексију* $\overset{g}{\nabla}$ *се поклапа са диференцијалом у односу на четврт-симетричну неметричку конексију* $\overset{1}{\nabla}$.

Другим речима, 2-форма F је затворена у односу на Леви-Чивита конексију ако и само ако је затворена у односу на четврт-симетричну неметричку конексију (3.4.2). Ово имплицира тврђење везано са симплектичке многострукости.

Последица 3.4.2 *Нека је* $(\mathcal{M}, G, \overset{1}{\nabla})$ *генералисана Риманова многострукост са четврт-симетричном неметричком конексијом (3.4.2) и нека је* F *недегенерисана 2-форма. Ако је многострукост* $\mathcal{M}$ *парне димензије, тада пар* $(\mathcal{M}, F)$ *представља симплектичку многострукост ако и само ако је 2-форма* F *затворена у односу на четврт-симетричну неметричку конексију (3.4.2).*

---

[1] Једначина (3.4.9) се може доказати и коришћењем (1.9.4) и (3.1.25).

У генералисаној Римановој многострукости, Нијенхуисов тензор се може представити на следећи начин (видети једначину (2.17) у [55])

$$N(X,Y) = \overset{1}{N}(X,Y) - \overset{1}{T}(AX,AY) - A^2\overset{1}{T}(X,Y) + A\overset{1}{T}(AX,Y) + A\overset{1}{T}(X,AY), \tag{3.4.10}$$

где је са $\overset{1}{N}$ означен (1,2)-тензор дат једначином

$$\overset{1}{N}(X,Y) = (\overset{1}{\nabla}_{AX}A)Y - (\overset{1}{\nabla}_{AY}A)X - A(\overset{1}{\nabla}_X A)Y + A(\overset{1}{\nabla}_Y A)X. \tag{3.4.11}$$

Пошто за тензор торзије (3.4.3) важи

$$-\overset{1}{T}(AX,AY) - A^2\overset{1}{T}(X,Y) + A\overset{1}{T}(AX,Y) + A\overset{1}{T}(X,AY) = 0,$$

из једнакости (3.4.10), следи

$$N(X,Y) = \overset{1}{N}(X,Y).$$

Са овим смо доказали наредну теорему.

Теорема 3.4.5 *У генералисаној Римановој многострукости са четврт-симетричном неметричком конексијом (3.4.2), Нијенхуисов тензор N се поклапа са тензором $\overset{1}{N}$, који је дат једначином (3.4.11).*

3.4.2 Особине тензора кривине

У овој секцији ћемо се бавити линеарно независним тензорима кривине и њиховим особинама. Тензор кривине $\overset{1}{R}$ четврт-симетричне неметричке конексије $\overset{1}{\nabla}$, дате једначином (3.4.2), се одређује поступком приказаним у Секцијама 2.1 и 3.1, и може се изразити следећом релацијом

$$\begin{aligned}\overset{1}{R}(X,Y)Z = \overset{g}{R}(X,Y)Z &+ \frac{1}{2}\overset{1}{\alpha}(X,Z)AY - \frac{1}{2}\overset{1}{\alpha}(Y,Z)AX - \frac{1}{2}\overset{1}{\beta}(X,Y)AZ\\ &- \frac{1}{2}\overset{1}{\gamma}(X,Z)\pi(Y) + \frac{1}{2}\overset{1}{\gamma}(Y,Z)\pi(X) + \frac{1}{2}\overset{1}{\delta}(X,Y)\pi(Z),\end{aligned} \tag{3.4.12}$$

где су $\overset{1}{\alpha}$, $\overset{1}{\beta}$ тензори типа (0,2) и $\overset{1}{\gamma}$, $\overset{1}{\delta}$ су тензори типа (1,2) дати једначинама

$$\overset{1}{\alpha}(X,Y) = (\overset{g}{\nabla}_X\pi)(Y) + \frac{1}{2}\pi(X)\pi(AY) - \frac{1}{2}\pi(AX)\pi(Y) = (\overset{1}{\nabla}_X\pi)(Y), \tag{3.4.13}$$

$$\overset{1}{\beta}(X,Y) = (\overset{g}{\nabla}_X\pi)(Y) - (\overset{g}{\nabla}_Y\pi)(X), \tag{3.4.14}$$

$$\overset{1}{\gamma}(X,Y) = (\overset{g}{\nabla}_X A)Y - \frac{1}{2}\pi(Y)A^2X, \tag{3.4.15}$$

$$\overset{1}{\delta}(X,Y) = (\overset{g}{\nabla}_X A)Y - (\overset{g}{\nabla}_Y A)X. \tag{3.4.16}$$

Према једначини (3.4.8), тензор кривине $\overset{0}{R}$ симетричне конексије $\overset{0}{\nabla}$ се поклапа са Римановим тензором Леви-Чивита конексије $\overset{g}{\nabla}$, тј. $\overset{0}{R} = \overset{g}{R}$. Релације између осталих линеарно независних тензора кривине и Римановог тензора кривине су представљене у наредној теореми.

Теорема 3.4.6 *Нека је* $(\mathcal{M}, G, \overset{1}{\nabla})$ *генералисана Риманова многострукост са четврт-симетричном неметричком конексијом (3.4.2). Тензори кривине* $\overset{\theta}{R}$, $\theta = 2, 3, 4, 5$ *и Риманов тензор кривине* $\overset{g}{R}$ *задовољавају следеће релације*

$$\begin{aligned}\overset{2}{R}(X,Y)Z =&\overset{g}{R}(X,Y)Z - \frac{1}{2}\overset{2}{\alpha}(X,Z)AY + \frac{1}{2}\overset{2}{\alpha}(Y,Z)AX + \frac{1}{2}\overset{1}{\beta}(X,Y)AZ + \frac{1}{2}\overset{2}{\gamma}(X,Z)\pi(Y)\\ &- \frac{1}{2}\overset{2}{\gamma}(Y,Z)\pi(X) - \frac{1}{2}\overset{1}{\delta}(X,Y)\pi(Z),\end{aligned}\tag{3.4.17}$$

$$\begin{aligned}\overset{3}{R}(X,Y)Z =&\overset{g}{R}(X,Y)Z + \frac{1}{2}\overset{2}{\alpha}(X,Z)AY + \frac{1}{2}\overset{1}{\alpha}(Y,Z)AX - \frac{1}{2}(\overset{2}{\alpha}(X,Y) + \overset{1}{\alpha}(Y,X))AZ\\ &- \frac{1}{2}\overset{1}{\gamma}(X,Z)\pi(Y) - \frac{1}{2}\overset{1}{\gamma}(Y,Z)\pi(X) + \frac{1}{2}(\overset{1}{\delta}(X,Y) + 2\overset{1}{\gamma}(Y,X))\pi(Z),\end{aligned}\tag{3.4.18}$$

$$\begin{aligned}\overset{4}{R}(X,Y)Z =&\overset{g}{R}(X,Y)Z + \frac{1}{2}\overset{2}{\alpha}(X,Z)AY + \frac{1}{2}\overset{1}{\alpha}(Y,Z)AX - \frac{1}{2}(\overset{1}{\alpha}(X,Y) + \overset{2}{\alpha}(Y,X))AZ\\ &- \frac{1}{2}\overset{1}{\gamma}(X,Z)\pi(Y) - \frac{1}{2}\overset{1}{\gamma}(Y,Z)\pi(X) + \frac{1}{2}(\overset{1}{\delta}(X,Y) + 2\overset{1}{\gamma}(Y,X))\pi(Z)\\ &- \pi(Z)(\pi(Y)A^2X - \pi(X)A^2Y),\end{aligned}\tag{3.4.19}$$

$$\begin{aligned}\overset{5}{R}(X,Y)Z =&\overset{g}{R}(X,Y)Z + \frac{1}{4}\pi(X)(\pi(Y)A^2Z - \pi(AZ)AY) + \frac{1}{4}\pi(Y)(\pi(X)A^2Z - \pi(AZ)AX)\\ &- \frac{1}{4}\pi(Z)(\pi(X)A^2Y + \pi(Y)A^2X - \pi(AX)AY - \pi(AY)AX),\end{aligned}\tag{3.4.20}$$

где су $\overset{1}{\alpha}$, $\overset{1}{\beta}$, $\overset{1}{\gamma}$, $\overset{1}{\delta}$ *дати са (3.4.13), (3.4.14), (3.4.15), (3.4.16), редом, а тензори* $\overset{2}{\alpha}$, $\overset{2}{\gamma}$ *су дати једначинама*

$$\overset{2}{\alpha}(X,Y) = (\overset{g}{\nabla}_X\pi)(Y) - \frac{1}{2}\pi(X)\pi(AY) + \frac{1}{2}\pi(AX)\pi(Y),\tag{3.4.21}$$

$$\overset{2}{\gamma}(X,Y) = (\overset{g}{\nabla}_X A)Y + \frac{1}{2}\pi(Y)A^2X.\tag{3.4.22}$$

Доказ: Доказаћемо релацију за тензор кривине $\overset{3}{R}$. Веза између тензора кривине $\overset{3}{R}$ и $\overset{1}{R}$ дата је једначином (1.6.4). За коваријантни извод тензора торзије $\overset{1}{T}$ важи

$$\begin{aligned}(\overset{1}{\nabla}_X\overset{1}{T})(Y,Z) &= AY(\overset{1}{\nabla}_X\pi)(Z) + \pi(Z)(\overset{1}{\nabla}_X A)Y - AZ(\overset{1}{\nabla}_X\pi)(Y) - \pi(Y)(\overset{1}{\nabla}_X A)Z\\ &= \overset{1}{\alpha}(X,Z)AY - \overset{1}{\alpha}(X,Y)AZ + \pi(Z)\overset{1}{\gamma}(X,Y) - \pi(Y)\overset{1}{\gamma}(X,Z)\\ &\quad + \frac{1}{2}(\pi(AY)\pi(Z) - \pi(Y)\pi(AZ))AX,\end{aligned}$$

где су $\overset{1}{\alpha}$ и $\overset{1}{\gamma}$ дати са (3.4.13) и (3.4.15). Комбинујући претходну једначину са (1.6.4) и (3.4.12), добијамо (3.4.18). □

У наставку ћемо проучавати трансформације Леви-Чивита конексије $\overset{g}{\nabla}$ на конексије $\overset{1}{\nabla}$ и $\overset{2}{\nabla}$, при чему ћемо одредити услове да Риманов тензор кривине буде инваријантан при таквим трансформацијама.

Ако (1,3)-тензор $\overset{1}{M}$ дефинишемо једначином

$$\overset{1}{M}(X,Y)Z = \overset{1}{\alpha}(X,Z)AY - \overset{1}{\gamma}(X,Z)\pi(Y) - (\overset{g}{\nabla}_X\pi)(Y)AZ + \pi(Z)(\overset{g}{\nabla}_X A)Y,\tag{3.4.23}$$

где су $\overset{1}{\alpha}$ и $\overset{1}{\gamma}$ дати са (3.4.13) и (3.4.15), тада тензор кривине $\overset{1}{R}$ добија облик

$$\overset{1}{R}(X,Y)Z = \overset{g}{R}(X,Y)Z + \frac{1}{2}\overset{1}{M}(X,Y)Z - \frac{1}{2}\overset{1}{M}(Y,X)Z,$$

одакле видимо да је тензор $\overset{1}{R}$ једнак са $\overset{g}{R}$ ако и само ако је тензор $\overset{1}{M}(X,Y)Z$ симетричан по векторима X и Y.

Теорема 3.4.7 *Риманов тензор кривине $\overset{g}{R}$ је инваријантан при трансфомацији конексије $\overset{g}{\nabla} \to \overset{1}{\nabla}$ ако и само ако је тензор $\overset{1}{M}(X,Y)Z$ симетричан по векторима X и Y, где је $\overset{1}{M}$ дат једначином (3.4.23), $\overset{g}{\nabla}$ означава Леви-Чивита конексију и $\overset{1}{\nabla}$ означава четврт-симетричну неметричку конексију (3.4.2).*

Слично, може се доказати и наредна теорема.

Теорема 3.4.8 *Ако је $\overset{g}{\nabla}$ Леви-Чивита конексија и $\overset{2}{\nabla}$ четврт-симетрична неметричка конексија (3.4.7), тада је Риманов тензор кривине $\overset{g}{R}$ инваријантан при трансфомацији конексије $\overset{g}{\nabla} \to \overset{2}{\nabla}$ ако и само ако је тензор $\overset{2}{M}(X,Y)Z$ симетричан по векторима X и Y, где је тензор $\overset{2}{M}$ дат једначином*

$$\overset{2}{M}(X,Y)Z = \overset{2}{\alpha}(X,Z)AY - \overset{2}{\gamma}(X,Z)\pi(Y) - (\overset{g}{\nabla}_X\pi)(Y)AZ + \pi(Z)(\overset{g}{\nabla}_X A)Y, \tag{3.4.24}$$

при чему су $\overset{2}{\alpha}$ и $\overset{2}{\gamma}$ дати са (3.4.21) и (3.4.22).

У наредној теореми представљамо анти-симетричне особине тензора кривине.

Теорема 3.4.9 *Нека је $(\mathcal{M}, G, \overset{1}{\nabla})$ генералисана Риманова многострукост са четврт-симетричном неметричком конексијом (3.4.2). Тензори кривине $\overset{\theta}{R}(X,Y)Z$, $\theta = 1,\dots,5$ задовољавају следеће идентитете*

$$\begin{aligned}
&\overset{\alpha}{R}(X,Y)Z = -\overset{\alpha}{R}(Y,X)Z,\ \alpha = 1,2,\\
&\overset{\beta}{R}(X,Y)Z = -\overset{\beta}{R}(Y,X)Z + (\overset{g}{\nabla}_Y\pi)(Z)AX + (\overset{g}{\nabla}_X\pi)(Z)AY - ((\overset{g}{\nabla}_X\pi)(Y) + (\overset{g}{\nabla}_Y\pi)(X))AZ\\
&\qquad - \pi(X)(\overset{g}{\nabla}_Y A)Z - \pi(Y)(\overset{g}{\nabla}_X A)Z + \pi(Z)((\overset{g}{\nabla}_X A)Y + (\overset{g}{\nabla}_Y A)X),\ \beta = 3,4,\\
&\overset{5}{R}(X,Y)Z = -\overset{5}{R}(Y,X)Z + \frac{1}{2}\pi(X)(\pi(Y)A^2Z - \pi(AZ)AY) + \frac{1}{2}\pi(Y)(\pi(X)A^2Z - \pi(AZ)AX)\\
&\qquad - \frac{1}{2}\pi(Z)(\pi(X)A^2Y + \pi(Y)A^2X - \pi(AX)AY - \pi(AY)AX).
\end{aligned}$$

Доказ: На пример, ако саберемо (3.4.20) са једначином

$$\begin{aligned}
\overset{5}{R}(Y,X)Z =& \overset{g}{R}(Y,X)Z + \frac{1}{4}\pi(Y)(\pi(X)A^2Z - \pi(AZ)AX) + \frac{1}{4}\pi(X)(\pi(Y)A^2Z - \pi(AZ)AY)\\
&- \frac{1}{4}\pi(Z)(\pi(Y)A^2X + \pi(X)A^2Y - \pi(AY)AX - \pi(AX)AY),
\end{aligned} \tag{3.4.25}$$

добијамо

$$\begin{aligned}
\overset{5}{R}(X,Y)Z + \overset{5}{R}(Y,X)Z =& \frac{1}{2}\pi(X)(\pi(Y)A^2Z - \pi(AZ)AY) + \frac{1}{2}\pi(Y)(\pi(X)A^2Z - \pi(AZ)AX)\\
&- \frac{1}{2}\pi(Z)(\pi(X)A^2Y + \pi(Y)A^2X - \pi(AX)AY - \pi(AY)AX),
\end{aligned}$$

где смо искористили и особину анти-симетричности тензора $\overset{g}{R}$. □

На основу релација (3.4.20) и (3.4.25), закључујемо да за тензор кривине пете врсте $\overset{5}{R}$ важи

$$\overset{5}{R}(X,Y)Z - \overset{5}{R}(Y,X)Z = 2\overset{g}{R}(X,Y)Z.$$

Ако циклично сумирамо једначине (3.4.12), (3.4.17)-(3.4.20), добићемо прве Бјанкијеве идентитете за тензоре кривине $\overset{\theta}{R}$, $\theta = 1,\dots,5$.

Теорема 3.4.10 *Нека је $(\mathcal{M}, G, \overset{1}{\nabla})$ генералисана Риманова многострукост са четврт-симетричном неметричком конексијом (3.4.2). Тензори кривине $\overset{\theta}{R}$, $\theta = 1, \ldots, 5$ задовољавају следеће идентитете*

$$\begin{aligned}
\underset{XYZ}{\mathfrak{S}} \overset{1}{R}(X,Y)Z =& \underset{XYZ}{\mathfrak{S}} \big(\pi(X)((\overset{g}{\nabla}_Y A)Z - (\overset{g}{\nabla}_Z A)Y) - ((\overset{g}{\nabla}_X \pi)(Y) - (\overset{g}{\nabla}_Y \pi)(X))AZ \\
& - \frac{1}{2}(\pi(X)\pi(AY) - \pi(AX)\pi(Y))AZ\big), \\
\underset{XYZ}{\mathfrak{S}} \overset{2}{R}(X,Y)Z =& \underset{XYZ}{\mathfrak{S}} \big(((\overset{g}{\nabla}_X \pi)(Y) - (\overset{g}{\nabla}_Y \pi)(X))AZ - \pi(X)((\overset{g}{\nabla}_Y A)Z - (\overset{g}{\nabla}_Z A)Y) \\
& - \frac{1}{2}(\pi(X)\pi(AY) - \pi(AX)\pi(Y))AZ\big), \\
\underset{XYZ}{\mathfrak{S}} \overset{3}{R}(X,Y)Z =& \underset{XYZ}{\mathfrak{S}} (\pi(X)\pi(AY) - \pi(AX)\pi(Y))AZ, \\
\underset{XYZ}{\mathfrak{S}} \overset{\theta}{R}(X,Y)Z =& 0, \ \theta = 4, 5.
\end{aligned}$$

Ако су тензори кривине конексије $\overset{1}{\nabla}$ и $\overset{2}{\nabla}$ једнаки, тј. ако важи $\overset{1}{R}(X,Y)Z = \overset{2}{R}(X,Y)Z$, тада за конексију $\overset{1}{\nabla}$ кажемо да је *дуално симетрична*.

Теорема 3.4.11 *Четврт-симетрична неметричка конексија (3.4.2) је дуално симетрична ако и само ако је (1,3)-тензор $S(X,Y)Z$ симетричан по векторима X и Y, где је*

$$S(X,Y)Z = \pi(X)(\overset{g}{\nabla}_Y A)Z + \pi(Z)(\overset{g}{\nabla}_X A)Y + (\overset{g}{\nabla}_X \pi)(Z)AY - (\overset{g}{\nabla}_X \pi)(Y)AZ. \tag{3.4.26}$$

Доказ: На основу једначина (3.4.12) и (3.4.17), лако се одређује релација између тензора кривине $\overset{1}{R}$ и $\overset{2}{R}$

$$\begin{aligned}
\overset{2}{R}(X,Y)Z = \overset{1}{R}(X,Y)Z - (\overset{g}{\nabla}_X \pi)(Z)AY + (\overset{g}{\nabla}_Y \pi)(Z)AX + \overset{1}{\beta}(X,Y)AZ \\
+ \pi(Y)(\overset{g}{\nabla}_X A)Z - \pi(X)(\overset{g}{\nabla}_Y A)Z - \overset{1}{\delta}(X,Y)\pi(Z).
\end{aligned}$$

Одавде видимо да је конексија $\overset{1}{\nabla}$ дуално симетрична ако и само ако важи

$$\pi(X)(\overset{g}{\nabla}_Y A)Z - \pi(Y)(\overset{g}{\nabla}_X A)Z + \overset{1}{\delta}(X,Y)\pi(Z) + (\overset{g}{\nabla}_X \pi)(Z)AY - (\overset{g}{\nabla}_Y \pi)(Z)AX - \overset{1}{\beta}(X,Y)AZ = 0,$$

односно

$$S(X,Y)Z = S(Y,X)Z,$$

где је тензор S дат једначином (3.4.26). □

Глава 4

Ајзенхартова конексија

Аналогно Леви-Чивита конексији, чији су коефицијенти Кристофелови симболи, Ајзенхарт је у раду [41] дефинисао конексију преко генералисаних Кристофелових симбола несиметричног основног тензора у генералисаним Римановим многострукостима. Такву конексију ћемо звати *Ајзенхартова конексија* и она спада у конексије са тотално анти-симетричним тензором торзије, које су врло значајне у теоријама струна, теорији гравитације и нелинеарним σ-моделима. У генералисаним Римановим многострукостима конексије са тотално анти-симетричним тензором торзије су проучаване у радовима [55, 56], при чему је посебно посвећена пажња таквим конексијама са *Ајнштајновим метричким условом*.

Резултати које ћемо дати у овој глави, представљају наставак истраживања о конформним пресликавањима генералисаних Риманових многострукости са Ајзенхартовом конексијом, односно полазимо од постојећих резултата и на основу њих одређујемо нове. Конформна пресликавања ових многострукости су са различитим приступима посматрана у неколико радова [77, 86, 114, 122, 124], а ми ћемо наставити са проучавањем конформних пресликавања која чувају тензор торзије, са тзв. ЕТ-конформним пресликавањима [114]. Најпре ћемо искористити њихове познате инваријантне тензоре за декомпозицију тензора кривине, у којој ће се појавити нови тензори који су Ајнштајновог типа [66]. Видећемо да су неки од њих инваријантни за ЕТ-конциркуларно пресликавање, а испитаћемо и њихову улогу при ЕТ-конформном пресликавању и на тај начин ћемо одредити услов да оно буде ЕТ-конциркуларно.

Иако се конформна пресликавања дефинишу помоћу диференцијабилне функције, она у општем случају не чувају хармоничност функције, због чега ћемо увести ЕТ-конхармонијска пресликавања као ЕТ-конформна пресликавања која чувају хармоничност функције и одредићемо њихове инваријантне тензоре.

4.1 Генералисане Риманове многострукости са Ајзенхартовом конексијом

У овој глави ћемо се бавити генералисаним Римановим многострукостима са Ајзенхартовом конексијом [41], које ћемо означити са $\mathbb{GR}_n$. Коефицијенти Ајзенхартове конексије су генералисани Кристофелови симболи друге врсте, а ова конексија се дефинише релацијом

$$g(\nabla_X Y, Z) = \frac{1}{2}(XG(Y,Z) + YG(Z,X) - ZG(Y,X))$$

и може се представити на следећи начин

$$g(\nabla_X Y, Z) = g(\overset{g}{\nabla}_X Y, Z) + \frac{1}{2}T(X,Y,Z),$$

односно

$$\nabla_X Y = \overset{g}{\nabla}_X Y + \frac{1}{2}T(X,Y), \tag{4.1.1}$$

где је T тензор торзије ове конексије, при чему је $T = \mathrm{d}F$, што значи да има тотално-анти-симетричан тензор торзије. Ова конексија је и метричка[1], тј. важи $\nabla g = 0$. Видимо да је симетрична конексија Ајзенхартове конексије (4.1.1) Леви-Чивита конексија, па се тензор кривине симетричне конексије поклапа са Римановим тензором кривине Леви-Чивита конексије. Зато ћемо у овом делу рада посматрати следећих пет тензора кривине [141]

$$\begin{aligned}
\overset{1}{K}(X,Y)Z &= \overset{g}{R}(X,Y)Z + \frac{1}{2}(\overset{g}{\nabla}_X T)(Y,Z) - \frac{1}{2}(\overset{g}{\nabla}_Y T)(X,Z) + \frac{1}{4}T(X,T(Y,Z)) - \frac{1}{4}T(Y,T(X,Z)), && (4.1.2)\\
\overset{2}{K}(X,Y)Z &= \overset{g}{R}(X,Y)Z - \frac{1}{4}T(X,T(Y,Z)) + \frac{1}{4}T(Y,T(X,Z)), && (4.1.3)\\
\overset{3}{K}(X,Y)Z &= \overset{g}{R}(X,Y)Z + \frac{1}{2}(\overset{g}{\nabla}_X T)(Y,Z) + \frac{1}{2}(\overset{g}{\nabla}_Y T)(X,Z) - \frac{1}{4}T(X,T(Y,Z)) + \frac{1}{4}T(Y,T(X,Z)) && \\
&\quad + \frac{1}{2}T(T(X,Y),Z), && (4.1.4)\\
\overset{4}{K}(X,Y)Z &= \overset{g}{R}(X,Y)Z - \frac{1}{4}T(X,T(Y,Z)) - \frac{1}{4}T(Y,T(X,Z)), && (4.1.5)\\
\overset{5}{K}(X,Y)Z &= \overset{g}{R}(X,Y)Z + \frac{1}{8}T(T(X,Y),Z). && (4.1.6)
\end{aligned}$$

Са $\overset{\theta}{\mathcal{K}}$ ћемо означавати (0,4)-тензоре кривине, тј. $\overset{\theta}{\mathcal{K}}(X,Y,Z,W) = g(\overset{\theta}{K}(X,Y)Z,W)$, $\theta = 1,2,\dots,5$. Ако уведемо ознаку

$$T^2(Y,Z) = \mathrm{trace}\{X \to T(Y,T(X,Z))\}$$

и ако одговарајуће Ричијеве тензоре за тензоре кривине $\overset{\theta}{K}$, $\theta = 1,2,\dots,5$, означимо са $\overset{\theta}{S}$, тада контракцијом по X у једначинама (4.1.2)-(4.1.6) добијамо

$$\begin{aligned}
\overset{1}{S}(Y,Z) &= \overset{g}{Ric}(Y,Z) + \frac{1}{2}(\mathrm{div}T)(Y,Z) - \frac{1}{4}T^2(Y,Z), && (4.1.7)\\
\overset{2}{S}(Y,Z) &= \overset{g}{Ric}(Y,Z) + \frac{1}{4}T^2(Y,Z), && (4.1.8)\\
\overset{3}{S}(Y,Z) &= \overset{g}{Ric}(Y,Z) + \frac{1}{2}(\mathrm{div}T)(Y,Z) - \frac{1}{4}T^2(Y,Z), && (4.1.9)\\
\overset{4}{S}(Y,Z) &= \overset{g}{Ric}(Y,Z) - \frac{1}{4}T^2(Y,Z), && (4.1.10)\\
\overset{5}{S}(Y,Z) &= \overset{g}{Ric}(Y,Z) - \frac{1}{8}T^2(Y,Z), && (4.1.11)
\end{aligned}$$

где смо узели у обзир да је $\mathrm{trace}\{X \to T(X,Y)\} = 0$ (видети једначину (14) у [41]). Пошто је T^2 симетричан тензор, на основу претходних једначина се јасно види да су Ричијеви тензори $\overset{2}{S}$, $\overset{4}{S}$ и $\overset{5}{S}$ симетрични. Такође, видимо да је $\overset{1}{S} = \overset{3}{S}$. Одговарајуће Ричијеве операторе $\overset{\theta}{\mathsf{K}}$ ћемо дефинисати једначином $\overset{\theta}{S}(X,Y) = g(\overset{\theta}{\mathsf{K}}X,Y)$, а скаларе кривине ћемо означавати са $\overset{\theta}{k}$, $\theta = 1,2,\dots,5$.

Напомена 4.1.1 *У поређењу са линеарно независним тензорима кривине које смо проучавали у претходним главама, једино се тензори* $\overset{1}{K}$ *и* $\overset{3}{K}$ *поклапају са* $\overset{1}{R}$ *и* $\overset{3}{R}$*, редом, док су остали различити.*

Напомена 4.1.2 *С обзиром на то да је тензор торзије Ајзенхартове конексије тотално анти-симетричан, тј. 3-форма, у једначинама (4.1.7) и (4.1.9) се уместо дивергенције може користити* кодиференцијал*, али то овде нећемо чинити, јер би захтевало увођење додатних појмова.*

---

[1] Метричност важи и за њену дуалну конексију, што је одлика конексија са тотално анти-симетричним тензором торзије (видети [87]).

4.2 Еквиторзионо конформна пресликавања

За неко пресликавање између две многострукости кажемо да *чува* неки геометријски објекат ако је он инваријантан при том пресликавању. Пресликавање које чува угао између кривих се назива *конформно*. Конформно пресликавање између две генералисане Риманове многострукости $\mathbb{GR}_n = (\mathcal{M}, G)$ и $\mathbb{G}\overline{\mathbb{R}}_n = (\overline{\mathcal{M}}, \overline{G})$ се карактерише једначином

$$\overline{g} = e^{2\varphi} g, \tag{4.2.1}$$

при чему претпостављамо да ово пресликавање чува структурни тензор A, тј. претпостављамо да при конформном пресликавању $f : \mathbb{GR}_n \to \mathbb{G}\overline{\mathbb{R}}_n$ важи $\overline{A} = A$, где се надвучени симболи односе на многострукост $\mathbb{G}\overline{\mathbb{R}}_n$. На основу претходне две једнакости следи

$$\overline{F} = e^{2\varphi} F,$$

па сабирањем ове једначине са (4.2.1) добијамо релацију између основних тензора многострукости $\mathbb{GR}_n$ и $\mathbb{G}\overline{\mathbb{R}}_n$. Формално, конформно пресликавање у генералисаној Римановој многострукости уводимо наредном дефиницијом.

Дефиниција 4.2.1 [113] Пресликавање $f : \mathbb{GR}_n \to \mathbb{G}\overline{\mathbb{R}}_n$ је *конформно* ако за основне тензоре G и $\overline{G}$ многострукости $\mathbb{GR}_n$ и $\mathbb{G}\overline{\mathbb{R}}_n$, редом, важи услов

$$\overline{G} = e^{2\varphi} G \tag{4.2.2}$$

где је φ произвољна функција тачке $x = (x^1, x^2, \dots, x^n)$, а многострукости $\mathbb{GR}_n$ и $\mathbb{G}\overline{\mathbb{R}}_n$ се посматрају у заједничком при пресликавању систему координата x^i.

Објашњење о заједничком координатном систему при пресликавању може се наћи, на пример, у [70] или [141]. Надаље ће се сви надвучени симболи односити на многострукост $\mathbb{G}\overline{\mathbb{R}}_n$. При овом пресликавању, конексије многострукости $\mathbb{GR}_n$ и $\mathbb{G}\overline{\mathbb{R}}_n$ задовољавају релацију

$$\overline{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + \psi(X)Y + \psi(Y)X - g(X,Y)U + \Theta(X,Y)$$

где је U градијентни вектор дефинисан са $U = \mathrm{grad}\varphi$, а ψ је његов придружени ковектор, тј. $\psi(X) = g(X, U)$, односно $\psi = \mathrm{d}\varphi$, који задовољава једначину

$$\psi = \frac{1}{2n}(\overline{\lambda} - \lambda), \tag{4.2.3}$$

где је $\overline{\lambda} = \mathrm{d}\ln|\overline{g}|$, за $\overline{g} = \det(\overline{g}_{ij}) \neq 0$, $\lambda = \mathrm{d}\ln|\underline{g}|$, за $\underline{g} = \det(g_{ij}) \neq 0$, и Θ је анти-симетричан тензор који се може представити једначином

$$\Theta(X,Y) = \frac{1}{2}(T(X,Y) - \overline{T}(X,Y)).$$

Придружене векторе за $\overline{\lambda}$ и λ ћемо означити са $\overline{L}$ и L, при чему је јасно да су они градијентни, тј. важи $\overline{L} = \mathrm{grad}\ \ln|\overline{g}|$ и $L = \mathrm{grad}\ \ln|\underline{g}|$.

У [113] је дефинисана специјална класа конформног пресликавања које чува тензор торзије генералисаних Риманових многострукости.

Дефиниција 4.2.2 [113] Конформно пресликавање $f : \mathbb{GR}_n \to \mathbb{G}\overline{\mathbb{R}}_n$ је *еквиторзионо конформно пресликавање* ако су тензори торзије многострукости $\mathbb{GR}_n$ и $\mathbb{G}\overline{\mathbb{R}}_n$ једнаки у одговарајућим тачкама у заједничком координатном систему.

На основу последње једначине видимо да при еквиторзионо конформном пресликавању (краће, ЕТ-конформном пресликавању) важи $\Theta = 0$, па су конексије генералисаних Риманових многострукости $\mathbb{GR}_n$ и $\mathbb{G}\overline{\mathbb{R}}_n$ повезане једначином

$$\overline{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + \psi(X)Y + \psi(Y)X - g(X,Y)U. \tag{4.2.4}$$

Ову конексију $\overline{\nabla}$ ћемо звати *ЕТ-конформна конексија.* Полазећи од једначина линеарно независних тензора кривине $\overset{\theta}{K}$, $\theta = 1, 2, ..., 5$, датих са (4.1.2)-(4.1.6), могу се одредити тензори који су инваријантни при ЕТ-конформном пресликавању генералисаних Риманових многострукости, тј. при трансформацији конексија $\nabla \to \overline{\nabla}$. Ови тензори се називају *ЕТ-конформни тензори кривине θ врсте* и имају следеће облике [141]

$$\begin{aligned}\overset{1}{C}(X,Y)Z =&\overset{1}{K}(X,Y)Z - \frac{1}{n-2}(\overset{1}{S}(Y,Z)X - \overset{1}{S}(X,Z)Y + g(Y,Z)\overset{1}{\mathsf{K}}X - g(X,Z)\overset{1}{\mathsf{K}}Y)\\ &+ \frac{\overset{1}{k}}{(n-1)(n-2)}(g(Y,Z)X - g(X,Z)Y) + \frac{1}{2n}(T(X,Y,Z)L - \lambda(Z)T(X,Y))\\ &+ \frac{1}{2n(n-2)}(\lambda(T(X,Z))Y - \lambda(T(Y,Z))X + g(Y,Z)T(X,L) - g(X,Z)T(Y,L)),\end{aligned} \tag{4.2.5}$$

$$\begin{aligned}\overset{3}{C}(X,Y)Z =&\overset{3}{K}(X,Y)Z - \frac{1}{n-2}(\overset{3}{S}(Y,Z)X - \overset{3}{S}(X,Z)Y + g(Y,Z)\overset{3}{\mathsf{K}}X - g(X,Z)\overset{3}{\mathsf{K}}Y)\\ &+ \frac{\overset{3}{k}}{(n-1)(n-2)}(g(Y,Z)X - g(X,Z)Y) + \frac{1}{2n}(g(X,Y)T(Z,L) - g(Y,Z)T(X,L))\\ &+ \frac{1}{2n(n-2)}(\lambda(T(X,Z))Y - \lambda(T(Y,Z))X + g(Y,Z)T(X,L) - g(X,Z)T(Y,L))\\ &+ \frac{1}{2n}(\lambda(X)T(Y,Z) + \lambda(Y)T(X,Z) - \lambda(T(X,Z))Y),\end{aligned} \tag{4.2.6}$$

$$\begin{aligned}\overset{\beta}{C}(X,Y)Z =&\overset{\beta}{K}(X,Y)Z - \frac{1}{n-2}(\overset{\beta}{S}(Y,Z)X - \overset{\beta}{S}(X,Z)Y + g(Y,Z)\overset{\beta}{\mathsf{K}}X - g(X,Z)\overset{\beta}{\mathsf{K}}Y)\\ &+ \frac{\overset{\beta}{k}}{(n-1)(n-2)}(g(Y,Z)X - g(X,Z)Y), \quad \beta = 2, 4, 5.\end{aligned} \tag{4.2.7}$$

Са $\overset{\theta}{\mathcal{C}}$ ћемо означавати ЕТ-конформне тензоре кривине типа (0,4), $\theta = 1, 2, \ldots, 5$.

4.3 Тензори Ајнштајновог типа

У раду [45] је представљена декомпозиција Римановог тензора кривине $\overset{g}{\mathcal{R}}$ у четfreeродимензионалној Римановој многострукости у следећем облику

$$\overset{g}{\mathcal{R}}(X,Y,Z,W) = (\overset{g}{\mathcal{C}} + \overset{g}{\mathcal{E}} + \mathcal{G})(X,Y,Z,W), \tag{4.3.1}$$

где је $\overset{g}{\mathcal{C}}$ конформни тензор кривине (1.7.2), $\overset{g}{\mathcal{E}}$ је Ајнштајнов тензор кривине дат једначином

$$\overset{g}{\mathcal{E}}(X,Y,Z,W) = \frac{1}{2}(\overset{g}{\mathsf{E}}(Y,Z)g(X,W) - \overset{g}{\mathsf{E}}(X,Z)g(Y,W) + g(Y,Z)\overset{g}{\mathsf{E}}(X,W) - g(X,Z)\overset{g}{\mathsf{E}}(Y,W)),$$

$$\overset{g}{\mathsf{E}}(Y,Z) = \overset{g}{Ric}(Y,Z) - \frac{\overset{g}{r}}{4}g(Y,Z),$$

а тензор $\mathcal{G}$ је дат једначином

$$\mathcal{G}(X,Y,Z,W) = \frac{\overset{g}{r}}{12}(g(Y,Z)g(X,W) - g(X,Z)g(Y,W)).$$

У овом делу рада ћемо се бавити декомпозицијом линеарно независних тензора кривине (4.1.2)-(4.1.6) генералисане Риманове многострукости са Ајзенхартовом конексијом, односно проучаваћемо релације аналогне декомпозицији (4.3.1). Видећемо да поред већ познатих ЕТ-конформних тензора кривине, у декомпозицији учествују и неки други тензори. На тај начин ћемо добити тензоре који су аналогни тензору $\overset{g}{\mathcal{E}}$.

Теорема 4.3.1 *Тензори кривине* $\overset{\theta}{\mathcal{K}}$ *и ЕТ-конформни тензори кривине* $\overset{\theta}{\mathcal{C}}$, $\theta = 1, 2, \dots, 5$, *задовољавају релације*

$$\overset{\theta}{\mathcal{K}}(X,Y,Z,W) = (\overset{\theta}{\mathcal{C}} + \overset{\theta}{\mathcal{E}} + \overset{\theta}{\mathcal{G}})(X,Y,Z,W), \quad \theta = 1, 2, \dots, 5, \tag{4.3.2}$$

где је

$$\overset{\theta}{\mathcal{E}}(X,Y,Z,W) = \frac{1}{n-2}(\overset{\theta}{\mathsf{E}}(Y,Z)g(X,W) - \overset{\theta}{\mathsf{E}}(X,Z)g(Y,W) + g(Y,Z)\overset{\theta}{\mathsf{E}}(X,W) - g(X,Z)\overset{\theta}{\mathsf{E}}(Y,W)), \tag{4.3.3}$$

$$\begin{aligned}\overset{1}{\mathcal{G}}(X,Y,Z,W) =& \frac{\overset{1}{k}}{n(n-1)}(g(Y,Z)g(X,W) - g(X,Z)g(Y,W)) - \frac{1}{2n}(-\lambda(Z)T(X,Y,W) + \lambda(W)T(X,Y,Z))\\ &- \frac{1}{2n(n-2)}(g(Y,W)T(X,Z,L) - g(X,W)T(Y,Z,L) - g(Y,Z)T(X,W,L) + g(X,Z)T(Y,W,L)),\end{aligned} \tag{4.3.4}$$

$$\begin{aligned}\overset{3}{\mathcal{G}}(X,Y,Z,W) =& \frac{\overset{3}{k}}{n(n-1)}(g(Y,Z)g(X,W) - g(X,Z)g(Y,W)) - \frac{1}{2n}(\lambda(X)T(Y,Z,W) + \lambda(Y)T(X,Z,W))\\ &- \frac{1}{2n(n-2)}(g(Y,W)T(X,Z,L) - g(X,W)T(Y,Z,L) - g(Y,Z)T(X,W,L) + g(X,Z)T(Y,W,L))\\ &+ \frac{1}{2n}(g(Y,W)\lambda(T(X,Z)) - g(Y,Z)\lambda(T(X,W)) + g(X,Y)\lambda(T(Z,W))),\end{aligned} \tag{4.3.5}$$

$$\overset{\beta}{\mathcal{G}}(X,Y,Z,W) = \frac{\overset{\beta}{k}}{n(n-1)}(g(Y,Z)g(X,W) - g(X,Z)g(Y,W)), \quad \beta = 2, 4, 5, \tag{4.3.6}$$

$$\overset{\theta}{\mathsf{E}}(Y,Z) = \overset{\theta}{S}(Y,Z) - \frac{\overset{\theta}{k}}{n}g(Y,Z). \tag{4.3.7}$$

Доказ: За декомпозицију тензора кривине прве врсте $\overset{1}{\mathcal{K}}$, крећемо од ЕТ-конформног тензора кривине прве врсте, тј. од његове једначине (4.2.5). Одредимо одговарајући ЕТ-конформни тензор кривине типа (0,4), одакле након сређивања овог тензора добијамо релацију (4.3.2), при чему се узима у обзир и особина тоталне анти-симетричности тензора торзије. ☐

Сада се природно намеће дефиниција добијених тензора.

Дефиниција 4.3.1 Тензори $\overset{\theta}{\mathcal{E}}$, $\theta = 1, 2, \dots, 5$, дати са (4.3.3) се називају *тензори кривине Ајнштајновог типа θ врсте.* Тензори $\overset{\theta}{\mathsf{E}}$, $\theta = 1, 2, \dots, 5$, дати са (4.3.7) се називају *тензори Ајнштајновог типа θ врсте.*

На основу једначина (4.1.7) и (4.1.9), имамо наредно тврђење и његову последицу.

Теорема 4.3.2 *Тензор Ајнштајновог типа прве врсте* $\overset{1}{\mathsf{E}}$ *генералисане Риманове многострукости са Ајзенхартовом конексијом једнак је са тензором Ајнштајновог типа треће врсте* $\overset{3}{\mathsf{E}}$.

Последица 4.3.1 *Тензор кривине Ајнштајновог типа прве врсте* $\overset{1}{\mathcal{E}}$ *генералисане Риманове многострукости са Ајзенхартовом конексијом једнак је са тензором кривине Ајнштајновог типа треће врсте* $\overset{3}{\mathcal{E}}$.

У складу са претходним тврђењима, у даљем проучавању нећемо посебно разматрати тензоре $\overset{3}{\mathcal{E}}$ и $\overset{3}{\mathsf{E}}$.

Напомена 4.3.1 *Тензори Ајнштајновог типа (4.3.7), за другу групу линеарно независних тензора кривине, су одређени и у раду [86], као инваријанте при конциркуларном пресликавању генералисане Риманове многострукости са Ајзенхартовом конексијом, при чему је конформно пресликавање у том раду дефинисано само преко услова (4.2.1).*

Напомена 4.3.2 *У многобројној литератури, назив Ајнштајнов тензор у (псеудо-)Римановој многострукости се користи за тензор који је дат једначином*

$$\mathsf{E} = \overset{g}{Ric} - \frac{\overset{g}{r}}{2} g.$$

Аналогије овог тензора у генералисаној Римановој многострукости са Ајзенхартовом конексијом су одређене у радовима [115, 116].

4.4 Особине тензора Ајнштајновог типа

Сада ћемо проучавати особине претходно одређених тензора кривине и тензора Ајнштајновог типа у генералисаној Римановој многострукости са Ајзенхартовом конексијом.

Одговарајући (1,1)-тензори за тензоре Ајнштајновог типа $\overset{\theta}{\mathsf{E}}$ су дати једначинама

$$\overset{\theta}{\mathsf{E}} X = \overset{\theta}{\mathsf{K}} X - \frac{\overset{\theta}{k}}{n} X, \quad \theta = 1, 2, ..., 5.$$

Контракцијом претходне једначине закључујемо да су тензори Ајнштајновог типа $\overset{\theta}{\mathsf{E}}$ без трага. Са друге стране, (1,3)-тензори кривине Ајнштајновог типа $\overset{\theta}{E}$ имају следећи облик

$$\overset{\theta}{E}(X,Y)Z = \frac{1}{n-2}(\overset{\theta}{\mathsf{E}}(Y,Z)X - \overset{\theta}{\mathsf{E}}(X,Z)Y + g(Y,Z)\overset{\theta}{\mathsf{E}}X - g(X,Z)\overset{\theta}{\mathsf{E}}Y), \quad \theta = 1, 2, ..., 5, \tag{4.4.1}$$

одакле, контракцијом по X, добијамо

$$\mathrm{trace}\{X \to \overset{\theta}{E}(X,Y)Z\} = \overset{\theta}{\mathsf{E}}(Y,Z).$$

Претходна једначина нам показује да се тензори $\overset{\theta}{\mathsf{E}}$ добијају и помоћу тензора кривине Ајнштајновог типа $\overset{\theta}{E}$, одакле следи да су и они такође без трага.

У наставку су особине анти-симетричности и цикличне симетричности тензора кривине Ајнштајновог типа.

Теорема 4.4.1 *Тензор кривине Ајнштајновог типа прве врсте задовољава следеће релације*

$$\overset{1}{\mathcal{E}}(X,Y,Z,W) = -\overset{1}{\mathcal{E}}(X,Y,W,Z) = -\overset{1}{\mathcal{E}}(Y,X,Z,W), \tag{4.4.2}$$

$$\begin{aligned} \overset{1}{\mathcal{E}}(X,Y,Z,W) =& \overset{1}{\mathcal{E}}(Z,W,X,Y) - \frac{1}{n-2}((\mathrm{div}T)(X,Z)g(Y,W) - (\mathrm{div}T)(Y,Z)g(X,W)) \\ &+ \frac{1}{n-2}((\mathrm{div}T)(X,W)g(Y,Z) - (\mathrm{div}T)(Y,W)g(X,Z)), \end{aligned} \tag{4.4.3}$$

$$\underset{XYZ}{\mathfrak{S}} \overset{1}{\mathcal{E}}(X,Y,Z,W) = \frac{1}{n-2} \underset{XYZ}{\mathfrak{S}} (\mathrm{div}T)(X,Y)g(Z,W), \tag{4.4.4}$$

где је са $\underset{XYZ}{\mathfrak{S}}$ *означено циклично сумирање по векторима* X, Y *и* Z.

Доказ: Једначина (4.4.2) се доказује заменом позиције сабирака у једначини тензора кривине Ајнштајновог типа прве врсте. Пошто је

$$\overset{1}{S}(X,Y) = \overset{1}{S}(Y,X) + (\mathrm{div}T)(X,Y),$$

следи да важи и

$$\overset{1}{\mathsf{E}}(X,Y) = \overset{1}{\mathsf{E}}(Y,X) + (\mathrm{div}T)(X,Y). \tag{4.4.5}$$

Коришћењем претходне релације, из (4.3.3) се лако добија (4.4.3). Даље, ако извршимо циклично сумирање у једначини (4.3.3) и користимо (4.4.5), тада добијамо (4.4.4). □

За остале тензоре важи следећа теорема, коју наводимо без доказа, јер се доказује слично претходном.

Теорема 4.4.2 *Тензори кривине Ајнштајновог типа друге, четврте и пете врсте имају следеће особине*

$$\begin{aligned}
&\overset{\beta}{\mathcal{E}}(X,Y,Z,W)=-\overset{\beta}{\mathcal{E}}(X,Y,W,Z)=-\overset{\beta}{\mathcal{E}}(Y,X,Z,W),\\
&\overset{\beta}{\mathcal{E}}(X,Y,Z,W)=\overset{\beta}{\mathcal{E}}(Z,W,X,Y),\ \ \beta=2,4,5,\\
\underset{\sigma\mu\nu}{\mathfrak{S}}\,&\overset{\beta}{\mathcal{E}}(X,Y,Z,W)=0,\ \ \sigma,\mu,\nu\in\{X,Y,Z,W\}.
\end{aligned}$$

Видимо да (0,4)-тензори $\overset{\beta}{\mathcal{E}}$, $\beta=2,4,5$, имају особине анти-симетричности, симетричност по паровима вектора и цикличну симетричност, што значи да важи следеће тврђење.

Последица 4.4.1 *Тензори кривине Ајнштајновог типа* $\overset{2}{\mathcal{E}}$, $\overset{4}{\mathcal{E}}$ *и* $\overset{5}{\mathcal{E}}$ *су алгебарски тензори кривине.*

Из особине симетричности Ричијевих тензора $\overset{\beta}{S}$, $\beta=2,4,5$, следи симетричност тензора Ајнштајновог типа $\overset{\beta}{\mathsf{E}}$, $\beta=2,4,5$.

Последица 4.4.2 *Тензори Ајнштајновог типа* $\overset{2}{\mathsf{E}}$, $\overset{4}{\mathsf{E}}$ *и* $\overset{5}{\mathsf{E}}$, *дати са* (4.3.7), *су симетрични.*

Напомена 4.4.1 *Примећујемо да у свим тензорима* $\overset{\theta}{\mathcal{G}}$ *учествује тензор*

$$g(Y,Z)g(X,W)-g(X,Z)g(Y,W).$$

Он се краће може записати у облику $\frac{1}{2}g\wedge g$, *тј. представља најједноставнији Кулкарни-Номизу тензор и има особине алгебарског тензора кривине. Такође, имајући на уму да су тензори* $\overset{\beta}{\mathsf{E}}$ *симетрични, и тензори* $\overset{\beta}{\mathcal{E}}$ *се могу представити преко Кулкарни-Номизу производа на следећи начин*

$$\overset{\beta}{\mathcal{E}}=\frac{1}{n-2}g\wedge\overset{\beta}{\mathsf{E}},\ \ \beta=2,4,5.$$

4.5 Еквиторзионо конциркуларна пресликавања

Као што смо раније већ споменули, у општем случају, конформна пресликавања не чувају геодезијске кругове. Због тога је К. Јано [129] увео специјалну класу конформних пресликавања која чувају геодезијске кругове и назвао их конциркуларна пресликавања. У генералисаној Римановој многострукости ова пресликавања се уводе следећом дефиницијом.

Дефиниција 4.5.1 [141] Конформно пресликавање $f:\mathbb{GR}_n\to\mathbb{G}\overline{\mathbb{R}}_n$ је *конциркуларно* ако важи следећи услов

$$(\overset{g}{\nabla}_X\psi)(Y)-\psi(X)\psi(Y)=\omega g(X,Y),$$

где је ψ градијентни ковектор дат једначином (4.2.3), а ω је скалар.

Ми ћемо посматрати конциркуларна пресликавања при којима се не мења тензор торзије.

Дефиниција 4.5.2 [141] Конциркуларно пресликавање $f:\mathbb{GR}_n\to\mathbb{G}\overline{\mathbb{R}}_n$ је *еквиторзионо конциркуларно пресликавање* ако су тензори торзије многострукости $\mathbb{GR}_n$ и $\mathbb{G}\overline{\mathbb{R}}_n$ једнаки у одговарајућим тачкама.

Исто као и код ЕТ-конформних пресликавања, и овде ћемо користити скраћени назив ЕТ-конциркуларно пресликвање. Претходна дефиниција се може записати у следећем еквивалентном облику.

Дефиниција 4.5.3 ЕТ-конформно пресликавање $f:\mathbb{GR}_n\to\mathbb{G}\overline{\mathbb{R}}_n$ је ЕТ-конциркуларно пресликавање ако важи следећи услов

$$(\overset{g}{\nabla}_X\psi)(Y)-\psi(X)\psi(Y)=\omega g(X,Y),$$

где је ψ градијентни ковектор дат једначином (4.2.3), а ω је скалар.

ЕТ-конформну конексију $\overline{\nabla}$ која задовољава претходни услов ћемо звати *ЕТ-конциркуларна конексија.* У [141] су помоћу линеарно независних тензора кривине $\overset{\theta}{K}$, $\theta=1,2,\dots,5$, одређени линеарно независни тензори који су инваријантни при ЕТ-конциркуларном пресликавању генералисане Риманове многострукости $\mathbb{GR}_n$.

Теорема 4.5.1 [141] *ЕТ-конциркуларни тензори кривине θ врсте $\overset{\theta}{Z}$, $\theta=1,2,...,5$, који су дати једначинама*

$$\begin{aligned}\overset{1}{Z}(X,Y)Z=&\overset{1}{K}(X,Y)Z+\frac{\overset{1}{k}}{n(n-1)}(g(X,Z)Y-g(Y,Z)X)-\frac{1}{4n}(\lambda(T(Y,Z))X+2\lambda(Z)T(X,Y))\\&+\frac{1}{4n}(\lambda(T(X,Z))Y+2T(X,Y,Z)L-g(X,Z)T(Y,L)+g(Y,Z)T(X,L)),\end{aligned}\tag{4.5.1}$$

$$\begin{aligned}\overset{3}{Z}(X,Y)Z=&\overset{3}{K}(X,Y)Z+\frac{\overset{3}{k}}{n(n-1)}(g(X,Z)Y-g(Y,Z)X)+\frac{1}{2n}(\lambda(X)T(Y,Z)+\lambda(Y)T(X,Z))\\&-\frac{1}{4n}(T(Y,Z,L)X+T(X,Z,L)Y+g(X,Z)T(Y,L)+2g(X,Y)T(L,Z)+g(Y,Z)T(X,L)),\end{aligned}\tag{4.5.2}$$

$$\overset{\beta}{Z}(X,Y)Z=\overset{\beta}{K}(X,Y)Z+\frac{\overset{\beta}{k}}{n(n-1)}(g(X,Z)Y-g(Y,Z)X),\ \ \beta=2,4,5,\tag{4.5.3}$$

су инваријантни при трансформацији конексија $\nabla\to\overline{\nabla}$, где је $\overline{\nabla}$ ЕТ-конциркуларна конексија.

Напомена 4.5.1 *Услов конциркуларног пресликавања се може представити и у облику*

$$\mathrm{Hess}\varphi-\mathrm{d}\varphi\otimes\mathrm{d}\varphi=\omega g,$$

где Hess *означава Хесијан функције, тј. двоструки коваријантни извод функције.*

4.6 Нове инваријанте за ЕТ-конциркуларно пресликавање

На основу ЕТ-конциркуларних тензора кривине показаћемо да су неки тензори Ајнштајновог типа инваријантни за ЕТ-конциркуларно пресликавање, док остали представљају компоненту инваријантних објеката за поменуто пресликавање.

Теорема 4.6.1 *Тензори*

$$\overset{\alpha}{\mathsf{Z}}(X,Y)=\overset{\alpha}{\mathsf{E}}(X,Y)-\frac{n-4}{4n}\lambda(T(X,Y))\ \ \text{и}\ \ \overset{\beta}{\mathsf{E}}(X,Y),\ \ \alpha=1,3,\ \ \beta=2,4,5,\tag{4.6.1}$$

су инваријантни при трансформацији $\nabla\to\overline{\nabla}$, где је $\overline{\nabla}$ ЕТ-конциркуларна конексија, а $\overset{\theta}{\mathsf{E}}$ су тензори Ајнштајновог типа θ врсте, $\theta=1,2,\dots,5$, дати са (4.3.7).

Доказ: Контракцијом по X у једначини (4.5.1) добијамо

$$\overset{1}{\mathsf{Z}}(Y,Z)=\overset{1}{S}(Y,Z)-\frac{\overset{1}{k}}{n}g(Y,Z)+\frac{1}{4n}\left((3-n)\lambda(T(Y,Z))-T(Y,L,Z)\right),$$

где је $\overset{1}{\mathsf{Z}}(Y,Z) = \mathrm{trace}\{X \to \overset{1}{Z}(X,Y)Z\}$, Ако сада искористимо тоталну анти-симетричност тензора торзије посматране конексије, тј. $T(X,Y,Z) = -T(X,Z,Y)$, тада добијамо

$$\overset{1}{\mathsf{Z}}(Y,Z) = \overset{1}{\mathsf{E}}(Y,Z) - \frac{n-4}{4n}\lambda(T(Y,Z)). \tag{4.6.2}$$

На основу чињенице да је ЕТ-конциркуларни тензор кривине прве врсте $\overset{1}{Z}$ инваријантан при трансформацији $\nabla \to \overline{\nabla}$, где је ∇ Ајзенхартова конексија, а $\overline{\nabla}$ ЕТ-конциркуларна конексија, имамо једначину

$$\overset{1}{\overline{Z}}(X,Y)Z = \overset{1}{Z}(X,Y)Z,$$

одакле након контракције по X, добијамо

$$\overset{1}{\overline{\mathsf{Z}}}(Y,Z) = \overset{1}{\mathsf{Z}}(Y,Z),$$

где је (0,2)-тензор $\overset{1}{\mathsf{Z}}$ дат једначином (4.6.2), док тензор $\overset{1}{\overline{\mathsf{Z}}}$ има исти такав облик, али у зависности од елемената многострукости $\mathbb{G}\overline{\mathbb{R}}_n$. Дакле, заиста је тензор $\overset{1}{\mathsf{Z}}$ инваријантан при трансформацији $\nabla \to \overline{\nabla}$.

Слично, тензори Ајнштајновог типа $\overset{\beta}{\mathsf{E}}$, $\beta = 2,4,5$, се добијају контракцијом одговарајућих ЕТ-конциркуларних тензора кривине $\overset{\beta}{Z}$, тј. важи

$$\overset{\beta}{\mathsf{E}}(Y,Z) = \mathrm{trace}\{X \to \overset{\beta}{Z}(X,Y)Z\},$$

док се тензор $\overset{3}{\mathsf{Z}}$ добија контракцијом ЕТ-конциркуларног тензора кривине треће врсте $\overset{3}{Z}$. $\square$

На основу једнакости тензора Ајнштајновог типа прве и треће врсте, директно добијамо наредну последицу.

Последица 4.6.1 *Тензори* $\overset{1}{\mathsf{Z}}$ *и* $\overset{3}{\mathsf{Z}}$*, дати једначином (4.6.1), су једнаки.*

С обзиром на то да су тензори Ајнштајновог типа без трага и да је контракција тензора торзије T једнака нули, закључујемо да су и тензори $\overset{1}{\mathsf{Z}}$ и $\overset{3}{\mathsf{Z}}$ такође без трага, што имплицира да су сви ЕТ-конциркуларни тензори без трага.

Пошто се тензори Ајнштајновог типа (4.3.7) добијају и контракцијом тензора кривине Ајнштајновог типа, који су дати једначином (4.4.1), природно је да испитамо и њихову улогу при ЕТ-конциркуларном пресликавању.

Теорема 4.6.2 *Тензори кривине Ајнштајновог типа* $\overset{\beta}{E}(X,Y)Z$*,* $\beta = 2,4,5$*, су инваријантни при трансформацији конексија* $\nabla \to \overline{\nabla}$*, где је* $\overline{\nabla}$ *ЕТ-конциркуларна конексија.*

Доказ: Према претходној теореми, при трансформацији $\nabla \to \overline{\nabla}$ важи

$$\overset{\beta}{\overline{\mathsf{E}}} = \overset{\beta}{\mathsf{E}}, \quad \beta = 2,4,5, \tag{4.6.3}$$

одакле следи да за њихове придружене (1,1)-тензоре важи једнакост

$$\overset{\beta}{\overline{\mathsf{E}}} = e^{-2\varphi}\overset{\beta}{\mathsf{E}}, \tag{4.6.4}$$

где је $\overset{\beta}{\overline{\mathsf{E}}}(X,Y)=\overline{g}(\overset{\beta}{\overline{\mathtt{E}}}X,Y)$ и $\overset{\beta}{\mathsf{E}}(X,Y)=g(\overset{\beta}{\mathtt{E}}X,Y)$. Тензори кривине Ајнштајновог типа $\overset{\beta}{\overline{E}}(X,Y)Z$ многострукости $\mathbb{G}\overline{\mathbb{R}}_n$, $\beta=2,4,5$, су дати једначином

$$\overset{\beta}{\overline{E}}(X,Y)Z=\frac{1}{n-2}(\overset{\beta}{\overline{\mathsf{E}}}(Y,Z)X-\overset{\beta}{\overline{\mathsf{E}}}(X,Z)Y+\overline{g}(Y,Z)\overset{\beta}{\overline{\mathtt{E}}}X-\overline{g}(X,Z)\overset{\beta}{\overline{\mathtt{E}}}Y).$$

Узимајући у обзир једначине које важе за ЕТ-конциркуларно пресликавање, тј. (4.2.2), (4.6.3) и (4.6.4), добијамо

$$\begin{aligned}\overset{\beta}{\overline{E}}(X,Y)Z&=\frac{1}{n-2}(\overset{\beta}{\mathsf{E}}(Y,Z)X-\overset{\beta}{\mathsf{E}}(X,Z)Y+e^{2\varphi}g(Y,Z)e^{-2\varphi}\overset{\beta}{\mathtt{E}}X-e^{2\varphi}g(X,Z)e^{-2\varphi}\overset{\beta}{\mathtt{E}}Y)\\&=\overset{\beta}{E}(X,Y)Z,\end{aligned}$$

где су $\overset{\beta}{E}$ тензори кривине Ајнштајновог типа многострукости $\mathbb{G}\mathbb{R}_n$ и из последње једначине видимо да се они не мењају при трансформацији $\nabla\to\overline{\nabla}$, где је $\overline{\nabla}$ ЕТ-конциркуларна конексија. $\square$

Ако је многострукост четвородимензионална, тада из (4.6.1) имамо да је $\overset{\alpha}{\mathsf{Z}}=\overset{\alpha}{\mathsf{E}}$, $\alpha=1,3$, што имплицира наредно тврђење за генералисану Риманову многострукост $\mathbb{G}\mathbb{R}_4$.

Теорема 4.6.3 *ЕТ-конциркуларно пресликавање* $f:\mathbb{G}\mathbb{R}_4\to\mathbb{G}\overline{\mathbb{R}}_4$ *чува тензоре Ајнштајновог типа* $\overset{\theta}{\mathsf{E}}$, $\theta=1,2,\dots,5$.

Директна последица претходне теореме је следећа тврдња.

Последица 4.6.2 *ЕТ-конциркуларно пресликавање* $f:\mathbb{G}\mathbb{R}_4\to\mathbb{G}\overline{\mathbb{R}}_4$ *чува (1,3)-тензоре кривине Ајнштајновог типа* $\overset{\theta}{E}$, $\theta=1,2,\dots,5$.

Коришћењем једначине ЕТ-конформних тензора кривине (4.2.7), једначине ЕТ-конциркуларних тензора кривине (4.5.3) и једначине тензора кривине Ајнштајновог типа (4.4.1), можемо добити релацију за њихову међусобну зависност.

Теорема 4.6.4 *ЕТ-конформни тензори кривине, ЕТ-конциркуларни тензори кривине и тензори кривине Ајнштајновог типа* β *врсте, задовољавају следеће релације*

$$\overset{\beta}{C}(X,Y)Z=\overset{\beta}{Z}(X,Y)Z-\overset{\beta}{E}(X,Y)Z,\quad\beta=2,4,5.$$

4.7 ЕТ-конформна пресликавања која чувају инваријанте ЕТ-конциркуларног пресликавања

Многи аутори су проучавали пресликавања која чувају Ајнштајнов тензор (2.2.34) у Римановој многострукости [22–24, 70] и то нас је мотивисало да истражимо ЕТ-конформна пресликавања која чувају тензоре Ајнштајновог типа (4.3.7). У [85] су саопштени резултати о композицији конформних и геодезијских пресликавања генералисаних Риманових многострукости која чувају неке тензоре, међу којима је и Ајнштајнов тензор.

У наредним тврђењима, наводимо познате резултате који важе за конформно и конциркуларно пресликавање Риманове многострукости.

Теорема 4.7.1 [22] *Конформно пресликавање између две Риманове многострукости је конциркуларно ако и само ако чува Ајнштајнов тензор (2.2.34).*

Концикуларни тензор кривине (1.7.4) је инваријантан при концикуларном пресликавању (псеудо-)Римановох многострукости и претходна теорема имплицира следеће тврђење.

Последица 4.7.1 [70] *Конформно пресликавање између две Риманове многострукости је концикуларно ако и само ако чува концикуларни тензор кривине.*

У наставку, дајемо уопштења претходних тврђења за ЕТ-конформна и ЕТ-концикуларна пресликавања генералисаних Римановох многострукости.

Теорема 4.7.2 *ЕТ-конформно пресликавање $f : \mathbb{GR}_n \to \mathbb{G}\overline{\mathbb{R}}_n$ је ЕТ-концикуларно ако и само ако пресликавање f чува тензор $\overset{1}{\mathsf{Z}}$, који је дат једначином (4.6.1).*

Доказ: Ако је ЕТ-конформно пресликавање ЕТ-концикуларно тада је тензор $\overset{1}{\mathsf{Z}}$ инваријантан при том пресликавању (Теорема 4.6.1).

Обрнуто, претпоставимо да ЕТ-конформно пресликавање чува тензор $\overset{1}{\mathsf{Z}}$, тј. да при ЕТ-конформном пресликавању $f : \mathbb{GR}_n \to \mathbb{G}\overline{\mathbb{R}}_n$ важи

$$\overset{1}{\mathsf{Z}} = \overset{1}{\overline{\mathsf{Z}}},$$

што је еквивалентно са једначином

$$\overset{1}{\mathsf{E}}(X,Y) - \frac{n-4}{4n}\lambda(T(X,Y)) = \overset{1}{\overline{\mathsf{E}}}(X,Y) - \frac{n-4}{4n}\overline{\lambda}(\overline{T}(X,Y)).$$

Пошто при овом пресликавању многострукости $\mathbb{GR}_n$ и $\mathbb{G}\overline{\mathbb{R}}_n$ имају једнаке торзије, тј. пошто важи $T = \overline{T}$, даље имамо

$$\overset{1}{\overline{\mathsf{E}}}(X,Y) - \overset{1}{\mathsf{E}}(X,Y) - \frac{n-4}{4n}(\overline{\lambda}(T(X,Y)) - \lambda(T(X,Y))) = 0.$$

Узимајући у обзир израз тензора Ајнштајновог типа прве врсте (4.3.7), претходна једначина се може записати као

$$\overset{1}{\overline{S}}(X,Y) - \overset{1}{S}(X,Y) - \frac{n-4}{4n}(\overline{\lambda}(T(X,Y)) - \lambda(T(X,Y))) = \frac{1}{n}(\overset{1}{\overline{k}}\overline{g}(X,Y) - \overset{1}{k}g(X,Y)). \tag{4.7.1}$$

При ЕТ-конформном пресликавању, за Ричијеве тензоре $\overset{1}{S}$ и $\overset{1}{\overline{S}}$ и скаларе кривине $\overset{1}{k}$ и $\overset{1}{\overline{k}}$ важе наредне релације (за више детаља видети рад [114] или Секцију 3.3 у [141])

$$\begin{aligned}\overset{1}{\overline{S}}(X,Y) &= \overset{1}{S}(X,Y) - (n-2)M(X,Y) - ag(X,Y) + \frac{n-4}{2}\psi(T(X,Y))\\ &= \overset{1}{S}(X,Y) - (n-2)M(X,Y) - ag(X,Y) + \frac{n-4}{4n}(\overline{\lambda}(T(X,Y)) - \lambda(T(X,Y))),\end{aligned} \tag{4.7.2}$$

и

$$e^{2\varphi}\overset{1}{\overline{k}} = \overset{1}{k} - b, \tag{4.7.3}$$

где су a и b скалари дати једначинама

$$a = \overset{g}{\triangle}\varphi + (n-2)\psi(U), \quad b = 2(n-1)\overset{g}{\triangle}\varphi + (n-1)(n-2)\psi(U), \tag{4.7.4}$$

при чему $\overset{g}{\triangle}$ означава Лапласов оператор, а (0,2)-тензор M је дат са

$$M(X,Y) = (\overset{g}{\nabla}_X\psi)(Y) - \psi(X)\psi(Y). \tag{4.7.5}$$

На основу једначине (4.7.2), тензор M се може изразити у следећем облику

$$M(X,Y)=-\frac{1}{n-2}(\overset{1}{\bar{S}}(X,Y)-\overset{1}{S}(X,Y)-\frac{n-4}{4n}(\bar{\lambda}(T(X,Y))-\lambda(T(X,Y)))-\frac{a}{n-2}g(X,Y).$$

Заменом израза (4.7.1) у претходну једначину, добијамо

$$M(X,Y)=-\frac{1}{n(n-2)}(\overset{1}{\bar{k}}\bar{g}(X,Y)-\overset{1}{k}g(X,Y))-\frac{a}{n-2}g(X,Y).$$

Ако искористимо једначине (4.2.1) и (4.7.3), даље следи

$$M(X,Y)=\omega g(X,Y), \tag{4.7.6}$$

где је ω скалар дат једначином

$$\omega=\frac{b-an}{n(n-2)}=\frac{m}{n}, \tag{4.7.7}$$

а m је траг тензора M. Имајући на уму Дефиницију 4.5.3 и једначину (4.7.5), закључујемо да релација (4.7.6) јесте услов за ЕТ-конциркуларно пресликавање, односно том једначином смо доказали да је ЕТ-конформно пресликавање које чува тензор $\overset{1}{\mathsf{Z}}$ заиста ЕТ-конциркуларно. Тврђење смо доказали у оба смера, чиме је доказ завршен. ☐

Пошто су тензори $\overset{1}{\mathsf{Z}}$ и $\overset{3}{\mathsf{Z}}$ једнаки, јасно је да претходна теорема важи и за тензор $\overset{3}{\mathsf{Z}}$. У наредној теореми показујемо улогу тензора Ајнштајновог типа $\overset{2}{\mathsf{E}}$, $\overset{4}{\mathsf{E}}$ и $\overset{5}{\mathsf{E}}$ при ЕТ-конформном пресликавању.

Теорема 4.7.3 *ЕТ-конформно пресликавање $f:\mathbb{GR}_n\to\mathbb{G}\overline{\mathbb{R}}_n$ је ЕТ-конциркуларно ако и само ако пресликавање f чува тензоре Ајнштајновог типа $\overset{\beta}{\mathsf{E}}$, који су дати једначином (4.3.7), $\beta=2,4,5$.*

Доказ: Ову теорему ћемо доказати за тензор $\overset{2}{\mathsf{E}}$. Ако је ЕТ-конформно пресликавање ЕТ-конциркуларно, тада је тензор Ајнштајновог типа друге врсте инваријантан при том пресликавању (Теорема 4.6.1).

Обрнуто, претпоставимо да ЕТ-конформно пресликавање чува тензор Ајнштајновог типа друге врсте $\overset{2}{\mathsf{E}}$, тј. да при ЕТ-конформном пресликавању важи

$$\overset{2}{\mathsf{E}}=\overset{2}{\bar{\mathsf{E}}}.$$

Након замене израза за тензоре Ајнштајновог типа друге врсте (4.3.7) многострукости $\mathbb{GR}_n$ и $\mathbb{G}\overline{\mathbb{R}}_n$, имамо наредну релацију

$$\overset{2}{\bar{S}}(X,Y)-\overset{2}{S}(X,Y)=\frac{1}{n}(\overset{2}{\bar{k}}\bar{g}(X,Y)-\overset{2}{k}g(X,Y)). \tag{4.7.8}$$

При ЕТ-конформном пресликавању, за Ричијеве тензоре $\overset{2}{S}$ и $\overset{2}{\bar{S}}$ и скаларе кривине $\overset{2}{k}$ и $\overset{2}{\bar{k}}$ важе наредне релације (Секција 3.3 у [141])

$$\overset{2}{\bar{S}}(X,Y)=\overset{2}{S}(X,Y)-(n-2)M(X,Y)-ag(X,Y), \tag{4.7.9}$$

и

$$e^{2\varphi}\overset{2}{\bar{k}}=\overset{2}{k}-b, \tag{4.7.10}$$

где су a и b скалари дати једначином (4.7.4), а M је (0,2)-тензор дат са (4.7.5). На основу једначине (4.7.9), добија се

$$M(X,Y) = -\frac{1}{n-2}(\overset{2}{\overline{S}}(X,Y) - \overset{2}{S}(X,Y)) - \frac{a}{n-2}g(X,Y). \tag{4.7.11}$$

Заменом (4.7.8) у једначину (4.7.11), уз коришћење једначине (4.2.1) и (4.7.10), добијамо да је

$$M(X,Y) = \omega g(X,Y),$$

где је ω скалар дат са (4.7.7). Овим смо доказали теорему. ☐

На основу претходне две теореме, Теореме 4.5.1 и 4.6.1 имамо директну последицу.

Последица 4.7.2 *ЕТ-конформно пресликавање $f : \mathbb{GR}_n \to \mathbb{G\overline{R}}_n$ је ЕТ-конциркуларно ако и само ако пресликавање f чува ЕТ-конциркуларне тензоре кривине $\overset{\theta}{Z}$, $\theta = 1, 2, \ldots, 5$, дате једначинама (4.5.1) - (4.5.3).*

Дакле, у претходном делу смо видели да ЕТ-конформно пресликавање чува тензоре Ајнштајновог типа друге, четврте и пете врсте када је то пресликавање ЕТ-конциркуларно, што није случај са тензором Ајнштајновог типа прве врсте. На крају, дајемо услове при којима ЕТ-конформно пресликавање чува тензор Ајнштајновог типа прве врсте.

Теорема 4.7.4 *ЕТ-конформно пресликавање $f : \mathbb{GR}_n \to \mathbb{G\overline{R}}_n$ чува тензор Ајнштајновог типа прве врсте $\overset{1}{\mathsf{E}}$ ако и само ако је $n = 4$ или $\psi(T(X,Y)) = 0$.*

Доказ: Нека је $f : \mathbb{GR}_n \to \mathbb{G\overline{R}}_n$ ЕТ-конформно пресликавање. Тада за Ричијев тензор $\overset{1}{S}$ и за скалар кривине $\overset{1}{k}$ важе једначине (4.7.2) и (4.7.3). Ако кренемо од израза за тензор Ајнштајновог типа прве врсте $\overset{1}{\mathsf{E}}$ и ако користимо једначине (4.7.2) и (4.7.3), имамо

$$\begin{aligned}\overset{1}{\mathsf{E}}(X,Y) &= \overset{1}{S}(X,Y) - \frac{\overset{1}{k}}{n}g(X,Y)\\ &= \overset{1}{\overline{S}}(X,Y) + (n-2)M(X,Y) + ag(X,Y) - \frac{n-4}{2}\psi(T(X,Y)) - \frac{1}{n}(e^{2\varphi}\overset{1}{\overline{k}} + b)g(X,Y).\end{aligned}$$

Узимајући у обзир једначину (4.2.1), даље следи

$$\begin{aligned}\overset{1}{\mathsf{E}}(X,Y) &= \overset{1}{\overline{S}}(X,Y) - \frac{\overset{1}{\overline{k}}}{n}\overline{g}(X,Y) + (n-2)M(X,Y) + \frac{an-b}{n}g(X,Y) - \frac{n-4}{2}\psi(T(X,Y))\\ &= \overset{1}{\overline{\mathsf{E}}}(X,Y) + (n-2)M(X,Y) - \frac{m(n-2)}{n}g(X,Y) - \frac{n-4}{2}\psi(T(X,Y)),\end{aligned} \tag{4.7.12}$$

при чему смо искористили да је $an - b = -m(n-2)$ (на основу једначине (4.7.4)).

Ако сада претпоставимо да ЕТ-конформно пресликавање f чува тензор Ајнштајновог типа прве врсте $\overset{1}{\mathsf{E}}$, тада је $\overset{1}{\mathsf{E}} = \overset{1}{\overline{\mathsf{E}}}$, па из једначине (4.7.12) добијамо

$$M(X,Y) = \frac{m}{n}g(X,Y) + \frac{n-4}{2(n-2)}\psi(T(X,Y)). \tag{4.7.13}$$

Коначно, с обзиром на то да је тензор $M(X,Y)$ симетричан (јер је ψ градијентни ковектор), претходна релације је могућа ако и само ако је $n = 4$ или $\psi(T(X,Y)) = 0$. ☐

На основу релације (4.7.13) лако добијамо наредну последицу.

Последица 4.7.3 *Ако ЕТ-конформно пресликавање $f : \mathbb{GR}_4 \to \mathbb{G\overline{R}}_4$ чува тензор Ајнштајновог типа прве врсте $\overset{1}{\mathsf{E}}$ тада је пресликавање ЕТ-конциркуларно.*

На основу једнакости тензора Ајнштајновог типа прве и треће врсте, јасно је да претходна два тврђења важе и за тензор $\overset{3}{\mathsf{E}}$.

4.8 Еквиторзионо конхармонијско пресликавање

У општем случају, конформна пресликавања не чувају хармоничност функције. Због тога је у раду [53] одређен услов при коме конформно пресликавање чува хармоничност функције и дефинисано је конхармонијско пресликавање. Ово нас је мотивисало да испитамо понашање хармонијске функције при ЕТ-конформном пресликању генералисане Риманове многострукости са Ајзенхартовом конексијом.

Функција ϕ је *хармонијска* ако нестаје њен Лапласијан, тј. ако важи $\overset{g}{\triangle}\phi = \mathrm{div}(\mathrm{grad}\phi) = 0$, односно у локалним координатама

$$\overset{g}{\triangle}\phi = g^{pq}\overset{g}{\nabla}_q\overset{g}{\nabla}_p\phi = 0.$$

Проверићемо најпре да ли се чува хармоничност функције при трансформацији Леви-Чивита конексије на Ајзенхартову конексију (4.1.1) и у ту сврху ћемо са $\overset{*}{\triangle}\phi$ означити Лапласов оператор у односу на Ајзенхартову конексију, односно локално

$$\overset{*}{\triangle}\phi = g^{pq}\nabla_q\nabla_p\phi.$$

Лако се уверавамо да важи

$$\overset{*}{\triangle}\phi = \overset{g}{\triangle}\phi,$$

где смо искористили да је $T(e_i, e_i, Y) = 0$, тј. у индексном запису $g^{pq}T^i_{pq} = 0$. На овај начин смо показали да се хармоничност функције чува при трансформацији конексија $\overset{g}{\nabla} \to \nabla$, тј. доказали смо наредну теорему.

Теорема 4.8.1 *При трансформацији Леви-Чивита конексије на Ајзенхартову конексију чува се хармоничност функције.*

Ако са $\overset{*}{\overline{\triangle}}$ означимо Лапласов оператор у односу на ЕТ-конформну конексију (4.2.4), тј. локално $\overset{*}{\overline{\triangle}}\phi = \overline{g}^{pq}\overline{\nabla}_q\overline{\nabla}_p\phi$, тада за функцију ϕ при ЕТ-конформном пресликавању имамо

$$\overset{*}{\overline{\triangle}}\phi = e^{-2\varphi}(\overset{g}{\triangle}\phi + (n-2)g(\mathrm{grad}\varphi, \mathrm{grad}\phi)),$$

при чему смо узели у обзир и претходну теорему. Одавде видимо да ЕТ-конформно пресликавање не чува хармоничност функције, осим у случају када су вектори $\mathrm{grad}\varphi$ и $\mathrm{grad}\phi$ ортогонални, тј. када важи $g(\mathrm{grad}\varphi, \mathrm{grad}\phi) = 0$, чиме се доказује наредна теорема.

Теорема 4.8.2 *Нека је ϕ хармонијска функција. ЕТ-конформно пресликавање $f : \mathbb{GR}_n \to \mathbb{G}\overline{\mathbb{R}}_n$ чува хармоничност функције ϕ ако и само ако су вектори $\mathrm{grad}\varphi$ и $\mathrm{grad}\phi$ ортогонални.*

Напомена 4.8.1 *У претходном делу смо под диференцирање ∇ подразумевали коваријантно диференцирање прве врсте у односу на Ајзенхартову конексију. Лапласов оператор се може дефинисати и помоћу коваријантног диференцирања друге врсте у односу на Ајзенхартову конексију, односно помоћу дуалне конексије Ајзенхартове конексије (4.1.1), али се и у том случају добијају исти резултати.*

У раду [53] је посматрана функција

$$\overline{\phi} = e^{2c\varphi}\phi, \tag{4.8.1}$$

где је $c = const.$ и утврђено је при којим условима конформно пресликавање Риманових многострукости чува њену хармоничност. На тај начин је дефинисано конхармонијско пресликавање. Ми ћемо сада проверити под којим условима ЕТ-конформно пресликавање генералисаних

Риманових многострукости чува њену хармоничност. За функцију $\overline{\phi}$ при ЕТ-конформном пресликавању имамо

$$\overset{*}{\triangle}\,\overline{\phi} =e^{2(c-1)\varphi}(\overset{*}{\triangle}\phi+2c\phi\overset{*}{\triangle}\varphi+(4c+n-2)g(\mathrm{grad}\varphi,\mathrm{grad}\phi)+2c(2c+n-2)\phi g(\mathrm{grad}\varphi,\mathrm{grad}\varphi)).$$

Ако узмемо у обзир Теорему 4.8.1, добијамо

$$\overset{*}{\triangle}\,\overline{\phi}=e^{2(c-1)\varphi}(\overset{g}{\triangle}\phi+2c\phi\overset{g}{\triangle}\varphi+(4c+n-2)g(\mathrm{grad}\varphi,\mathrm{grad}\phi)+2c(2c+n-2)\phi g(\mathrm{grad}\varphi,\mathrm{grad}\varphi)).$$

Узмимо да је $c=\frac{2-n}{4}$ и да је ϕ хармонијска функција у односу на Леви-Чивита конексију. Тада имамо

$$\overset{*}{\triangle}\,\overline{\phi}=\frac{2-n}{2}\phi e^{-\frac{n+2}{2}\varphi}(\overset{g}{\triangle}\varphi+\frac{n-2}{2}g(\mathrm{grad}\varphi,\mathrm{grad}\varphi)).$$

Теорема 4.8.3 *Нека је ϕ хармонијска функција и $c=\frac{2-n}{4}$. Функција $\overline{\phi}$ дефинисана са (4.8.1) је хармонијска на многострукости $\mathbb{G}\overline{\mathbb{R}}_n$ ако и само ако важи*

$$\overset{g}{\triangle}\varphi+\frac{n-2}{2}g(\mathrm{grad}\varphi,\mathrm{grad}\varphi)=0. \tag{4.8.2}$$

Сада ћемо дефинисати специјално ЕТ-конформно пресликавање.

Дефиниција 4.8.1 ЕТ-конформно пресликавање $f:\mathbb{GR}_n\to\mathbb{G}\overline{\mathbb{R}}_n$ које задовољава услов (4.8.2) се назива *еквиторзионо конхармонијско пресликавање.*

ЕТ-конформну конексију $\overline{\nabla}$ са условом (4.8.2) ћемо звати *ЕТ-конхармонијска конексија.*

4.9 Инваријанте за ЕТ-конхармонијско пресликавање

У раду [53] је одређен конхармонијски тензор кривине (1.7.3), који је инваријантан при конхармонијском пресликавању (псеудо-)Риманових многострукости. Коришћењем линеарно независних тензора кривине можемо одредити геометријске објекте који се не мењају при ЕТ-конхармонијском пресликавању генералисане Риманове многострукости са Ајзенхартовом конексијом.

Теорема 4.9.1 *Тензори $\overset{\theta}{H}$, $\theta=1,2,...,5$, дати једначинама*

$$\begin{aligned}\overset{1}{H}(X,Y)Z =&\overset{1}{K}(X,Y)Z-\frac{1}{n-2}(\overset{1}{S}(Y,Z)X-\overset{1}{S}(X,Z)Y+g(Y,Z)\overset{1}{\mathtt{K}}X-g(X,Z)\overset{1}{\mathtt{K}}Y)\\&+\frac{1}{2n(n-2)}(\lambda(T(X,Z))Y-\lambda(T(Y,Z))X+g(Y,Z)T(X,L)-g(X,Z)T(Y,L))\\&+\frac{1}{2n}(T(X,Y,Z)L-\lambda(Z)T(X,Y)),\end{aligned} \tag{4.9.1}$$

$$\begin{aligned}\overset{3}{H}(X,Y)Z =&\overset{3}{K}(X,Y)Z-\frac{1}{n-2}(\overset{3}{S}(Y,Z)X-\overset{3}{S}(X,Z)Y+g(Y,Z)\overset{3}{\mathtt{K}}X-g(X,Z)\overset{3}{\mathtt{K}}Y)\\&+\frac{1}{2n}(g(X,Y)T(Z,L)-g(Y,Z)T(X,L)+\lambda(X)T(Y,Z)+\lambda(Y)T(X,Z)-\lambda(T(X,Z))Y)\\&+\frac{1}{2n(n-2)}(\lambda(T(X,Z))Y-\lambda(T(Y,Z))X+g(Y,Z)T(X,L)-g(X,Z)T(Y,L)),\end{aligned} \tag{4.9.2}$$

$$\overset{\beta}{H}(X,Y)Z =\overset{\beta}{K}(X,Y)Z-\frac{1}{n-2}(\overset{\beta}{S}(Y,Z)X-\overset{\beta}{S}(X,Z)Y+g(Y,Z)\overset{\beta}{\mathtt{K}}X-g(X,Z)\overset{\beta}{\mathtt{K}}Y),\quad \beta=2,4,5, \tag{4.9.3}$$

су инваријантни при трансформацији конексија $\nabla\to\overline{\nabla}$, где је $\overline{\nabla}$ ЕТ-конхармонијска конексија.

Доказ: Доказ ћемо извести за тензор $\overset{3}{H}$. При ЕТ-конформном пресликавању, за тензоре кривине $\overset{3}{K}$ и $\overset{3}{\overline{K}}$ и Ричијеве тензоре $\overset{3}{S}$ и $\overset{3}{\overline{S}}$ важе наредне релације (видети рад [114] или Секцију 3.3 у [141])

$$\begin{aligned}\overset{3}{\overline{K}}(X,Y)Z =& \overset{3}{K}(X,Y)Z + M(X,Z)Y - M(Y,Z)X - g(Y,Z)\mathsf{M}X + g(X,Z)\mathsf{M}Y - \psi(X)T(Y,Z)\\ &- \psi(Y)T(X,Z) + \frac{1}{2}(\psi(T(Y,Z))X + \psi(T(X,Z))Y) + (g(X,Z)Y - g(Y,Z)X)\psi(U)\\ &+ \frac{1}{2}(g(X,Z)T(Y,U) + g(Y,Z)T(X,U) + 2g(X,Y)T(U,Z)),\end{aligned} \tag{4.9.4}$$

$$\overset{3}{\overline{S}}(X,Y) = \overset{3}{S}(X,Y) - (n-2)M(X,Y) - (\overset{g}{\triangle}\varphi + (n-2)\psi(U))g(X,Y) + \frac{n-4}{2}\psi(T(X,Y)), \tag{4.9.5}$$

где је M тензор дат са (4.7.5), а M је његов придружени (1,1)-тензор, тј. $M(X,Y) = g(\mathsf{M}X,Y)$. Ако је пресликавање ЕТ-конхармонијско, тада на основу релације (4.8.2), која се може записати помоћу ψ и U у облику $2\overset{g}{\triangle}\varphi + (n-2)\psi(U) = 0$, и на основу (4.9.5), имамо

$$\overset{3}{\overline{S}}(X,Y) = \overset{3}{S}(X,Y) - (n-2)M(X,Y) - \frac{n-2}{2}\psi(U)g(X,Y) + \frac{n-4}{2}\psi(T(X,Y)),$$

одакле се добија

$$M(X,Y) = \frac{1}{n-2}(\overset{3}{S}(X,Y) - \overset{3}{\overline{S}}(X,Y)) - \frac{1}{2}\psi(U)g(X,Y) + \frac{n-4}{2(n-2)}\psi(T(X,Y)). \tag{4.9.6}$$

Ако узмемо у обзир наредну релацију [113]

$$T(X,U)g(Y,Z) = \frac{1}{2n}(\overline{T}(X,\overline{L})\overline{g}(Y,Z) - T(X,L)g(Y,Z)),$$

заменом једначина (4.2.3) и (4.9.6) у (4.9.4), након раздвајања елемената основних тензора G и $\overline{G}$, добијамо

$$\begin{aligned}&\overset{3}{\overline{K}}(X,Y)Z - \frac{1}{n-2}(\overset{3}{\overline{S}}(Y,Z)X - \overset{3}{\overline{S}}(X,Z)Y + \overline{g}(Y,Z)\overset{3}{\overline{\mathsf{K}}}X - \overline{g}(X,Z)\overset{3}{\overline{\mathsf{K}}}Y)\\ &+\frac{1}{2n}(\overline{g}(X,Y)\overline{T}(Z,\overline{L}) - \overline{g}(Y,Z)\overline{T}(X,\overline{L}) + \overline{\lambda}(X)\overline{T}(Y,Z) + \overline{\lambda}(Y)\overline{T}(X,Z) - \overline{\lambda}(\overline{T}(X,Z))Y)\\ &+ \frac{1}{2n(n-2)}(\overline{\lambda}(\overline{T}(X,Z))Y - \overline{\lambda}(\overline{T}(Y,Z))X + \overline{g}(Y,Z)\overline{T}(X,\overline{L}) - \overline{g}(X,Z)\overline{T}(Y,\overline{L}))\\ &= \overset{3}{K}(X,Y)Z - \frac{1}{n-2}(\overset{3}{S}(Y,Z)X - \overset{3}{S}(X,Z)Y + g(Y,Z)\overset{3}{\mathsf{K}}X - g(X,Z)\overset{3}{\mathsf{K}}Y)\\ &+\frac{1}{2n}(g(X,Y)T(Z,L) - g(Y,Z)T(X,L) + \lambda(X)T(Y,Z) + \lambda(Y)T(X,Z) - \lambda(T(X,Z))Y)\\ &+ \frac{1}{2n(n-2)}(\lambda(T(X,Z))Y - \lambda(T(Y,Z))X + g(Y,Z)T(X,L) - g(X,Z)T(Y,L)),\end{aligned} \tag{4.9.7}$$

односно

$$\overset{3}{\overline{H}}(X,Y)Z = \overset{3}{H}(X,Y)Z$$

где је $\overset{3}{\overline{H}}(X,Y)Z$ лева страна једначине (4.9.7), а $\overset{3}{H}(X,Y)Z$ десна страна једначине (4.9.7). Овим смо показали да је тензор $\overset{3}{H}$ инваријантан при ЕТ-конхармонијском пресликавању $f : \mathbb{GR}_n \to \mathbb{G}\overline{\mathbb{R}}_n$, тј. при трансформацији $\nabla \to \overline{\nabla}$, где је $\overline{\nabla}$ ЕТ-конхармонијска конексија

☐

Име тензора одређених у претходној теореми формално уводимо наредном дефиницијом.

Дефиниција 4.9.1 Тензори $\overset{\theta}{H}$ се називају *ЕТ-конхармонијски тензори кривине θ врсте*, $\theta = 1, 2, \dots, 5$.

Ако уведемо следеће (0,2)-тензоре

$$\overset{\theta}{\mathsf{H}}(Y,Z) = \mathrm{trace}\{X \to \overset{\theta}{H}(X,Y)Z\}, \tag{4.9.8}$$

тада се контракцијом по X у једначинама (4.9.1)-(4.9.3) доказује наредна теорема.

Теорема 4.9.2 *Тензори*

$$\overset{\theta}{\mathsf{H}}(X,Y) = -\frac{\overset{\theta}{k}}{n-2}g(X,Y), \;\; \theta = 1, 2, \dots, 5, \tag{4.9.9}$$

су инваријанти при трансформацији $\nabla \to \overline{\nabla}$, где је $\overline{\nabla}$ ЕТ-конхармонијска конексија.

За скаларе кривине $\overset{3}{k}$ и $\overset{3}{\overline{k}}$ при ЕТ-конформном пресликавању важе наредне релације [141]

$$e^{2\varphi}\overset{3}{\overline{k}} = \overset{3}{k} - 2(n-1)(\overset{g}{\triangle}\varphi + \frac{n-2}{2}\psi(U)). \tag{4.9.10}$$

Ако је пресликавање ЕТ-конхармонијско, тада на основу релације (4.8.2), из последње једначине добијамо

$$e^{2\varphi}\overset{3}{\overline{k}} = \overset{3}{k}. \tag{4.9.11}$$

Ако претходну једначину помножимо са генералисаном метриком G добијамо да је

$$\overset{3}{\overline{k}}\,\overline{G} = \overset{3}{k}G,$$

односно, тензор $\overset{3}{G} = \overset{3}{k}G$ је инваријантан при ЕТ-конхармонијском пресликавању. Стога, може се доказати валидност наредне теореме.

Теорема 4.9.3 *Тензори $\overset{\theta}{G} = \overset{\theta}{k}G$, $\theta = 1, 2, \dots, 5$ су инваријантни при трансформацији конексија $\nabla \to \overline{\nabla}$, где је $\overline{\nabla}$ ЕТ-конхармонијска конексија.*

Како је тензор M симетричан, анти-симетризацијом једначине (4.9.6) добијамо

$$\overset{3}{S}(X,Y) - \overset{3}{S}(Y,X) - \overset{3}{\overline{S}}(X,Y) + \overset{3}{\overline{S}}(Y,X) + (n-4)\psi(T(X,Y)) = 0,$$

одакле је

$$\overset{3}{\overline{S}}(X,Y) - \overset{3}{\overline{S}}(Y,X) - \frac{n-4}{2n}\overline{\lambda}(\overline{T}((X,Y))) = \overset{3}{S}(X,Y) - \overset{3}{S}(Y,X) - \frac{n-4}{2n}\lambda(T(X,Y)).$$

На основу ове једначине видимо да је тензор

$$\overset{3}{S}(X,Y) - \overset{3}{S}(Y,X) - \frac{n-4}{2n}\lambda(T(X,Y))$$

инваријантан при ЕТ-конхармонијском пресликавању. Из једначине (4.1.9) добијамо

$$\overset{3}{S}(X,Y) - \overset{3}{S}(Y,X) = (\mathrm{div}T)(X,Y),$$

и тиме смо доказали наредну теорему.

Теорема 4.9.4 *Тензор*

$$B(X,Y) = (\mathrm{div}T)(X,Y) - \frac{n-4}{2n}\lambda(T(X,Y))$$

је инваријантан за трансформацију $\nabla \to \overline{\overline{\nabla}}$, *где је* $\overline{\overline{\nabla}}$ *ЕТ-конхармонијска конексија.*

Напомена 4.9.1 *Претходна теорема се може добити и на основу релације (4.9.5), што значи да важи и за ЕТ-конформно пресликавање.*

У наредној теореми ћемо представити зависност ЕТ-конформних и ЕТ-конхармонијских тензора кривине.

Теорема 4.9.5 *ЕТ-конформни тензори кривине и ЕТ-конхармонијски тензори кривине задовољавају следећу релацију*

$$\overset{\theta}{C}(X,Y)Z = \overset{\theta}{H}(X,Y)Z + \frac{1}{n-1}\left(\overset{\theta}{\mathsf{H}}(X,Z)Y - \overset{\theta}{\mathsf{H}}(Y,Z)X\right),\ \theta = 1,2,\ldots,5.$$

Доказ: На основу једначина ЕТ-конформних тензора кривине (4.2.5)-(4.2.7) и једначина (4.9.1)-(4.9.3), (4.9.9), лако се могу доказати дате релације. ☐

Закључак

У овој дисертацији смо се бавили конексијама са торзијом на разним многострукостима. Прво смо проучавали конциркуларну полу-симетричну метричку конексију на псеудо-Римановој многострукости. Полазећи од једначина линеарно независних тензора кривине одредили смо тензоре који се поклапају са Вејловим пројективним тензором, а у три случаја смо одредили и тензоре коинцидентне са конциркуларним тензором кривине, чиме смо добили нове услове да посматрана многострукости буде пројективно и конциркуларно равна. Коришћењем тензора Ајнштајновог типа, у односу на конциркуларну полу-симетричну метричку конексију смо дефинисали посебне класе многострукости и доказали смо да се оне своде на Ајштајнове и квази-Ајнштајнове многострукости. Ово нас је мотивисало да посматрану конексију применимо на Лоренцове многострукости, јер је идеалан флуид пример квази-Ајнштајнове многострукости. Доказали смо да Лоренцова многострукост са конциркуларном полу-симетричном метричком конексијом чији је генератор јединични временски вектор представља *GRW* простор-време, а поменута конексија се своди на полу-симетричну метричку P-конексију. У *GRW* простор-времену смо установили да су три тензора кривине увек различита од нуле. Проучавали смо неке симетрије ових тензора и одредили потребне и довољне услове да *GRW* простор-време буде Ајнштајнова многострукост, а одредили смо и случајеве када је скалар кривине константан. Иделан флуид са посматраном конексијом је Ричи псеудо-симетричан константног типа. Применом ове конексије на теорију релативности, видели смо да је нарушен јак услов енергије у идеалном флуиду који задовољава Ајнштајнову једначину без космолошке константе, а затим смо показали да је дивергенција тензора енергије-импулса идеалног флуида за посматрану конексију једнака нули само у случају када једначина стања представља фантомску баријеру, односно граничну вредност за фантомску тамну енергију.

Ово нас је навело да уведемо специјалну полу-симетричну метричку конексију чији је генератор паралелан у односу на Леви-Чивита конексију, јер је у том случају дивергенција тензора енергије-импулса идеалног флуида увек једнака нули. Ричијев солитон у односу на ову конексију је стабилан и представља квази-Ајнштајнову многострукост. Доказали смо да је Ајнштајнова Лоренцова многострукост са специјалном полу-симетричном метричком конексијом Ричи равна. Ако ишчезава тензор кривине ове конексије, тада је Лоренцова многострукост квази-константне кривине. Ову конексију смо посматрали у идеалном флуиду који задовољава Ајнштајнову једначину без космолошке константе. Прво смо одредили вредност једначине стања у произвољној димензији, што је имплицирало да је у четdatabродимензионалном идеалном флуиду једначина стања једнака $-\frac{1}{3}$. Ово је гранична вредност за нарушавање јаког услова енергије, односно гранична вредност за тамну енергију.

На крају друге главе смо се бавили полу-симетричном конексијом која има исте геодезијске линије као и Леви-Чивита конексија. Таква конексија се зове пројективна полу-симетрична конексија и она није метричка. Полазећи од једначина свих линеарно независних тензора кривине у Римановој многострукости са том конексијом, одредили смо тензоре који не зависе од њеног генератора и показали смо да се они поклапају са Вејловим пројективним тензором кривине, чиме смо добили нове услове да посматрана многострукост буде пројективно равна ако они ишчезавају.

У трећој глави смо представили четврт-симетричну метричку A-конексију на генерализаним Римановим многострукостима, а затим смо њеним проучавањем на скоро Хермитске и скоро контактне метричке многострукости добили Келерове и ко-Келерове многострукости, што је била последица паралелности (1,1)-тензора A.

У Келеровим многострукостима смо прво за сваки линеарно независни тензор кривине испитали особине које задовољава Риманов тензор кривине у тим многострукостима. Показало се да то зависи од услова хибридности неких величина које зависе од генератора четврт-симетричне конексије. Поред тога, посматрали смо и тензоре који не зависе од поменутог генератора и на тај начин смо у Келеровим многострукостима са четврт-симетричном метричком конексијом одредили релације за Вејлов пројективни тензор и холоморфно пројективни тензор кривине. Видели смо да тензор $\overset{0}{V}$ представља линеарну комбинацију Вејловог пројективног тензора кривине и холоморфно пројективног тензора кривине, а тензор $\overset{4}{V}$ је једнак Вејловом пројективном тензору.

Један од разлога зашто до сада није проучавана четврт-симетрична A-метричка конексија (3.1.4) у ко-Келеровим многострукостима је вероватно тај што се њен тензор кривине поклапа са Римановим тензором кривине, што значи да су и све остале структуре које се формирају помоћу Римановог тензора кривине инваријантне при оваквој трансформацији конексија. Показали смо да се такође и тензор кривине дуалне конексије за (3.1.4) поклапа са $\overset{g}{R}$. Међутим, утврдили смо да су три од укупно шест линеарно независних тензора кривине различити од $\overset{g}{R}$ и увек су различити од нуле, а такође су различити од нуле и њихови Ричијеви тензори. Управо ово нам је омогућило да поменуту конексију проучавамо у ко-Келеровим многострукостима. Помоћу ових тензора смо конструисали тензоре који су коинцидентни са Вејловим пројективним тензором, чиме смо добили услове да њихово ишчезавање даје пројективно равну ко-Келерову многострукост. Ово нас је навело и да испитамо када је ко-Келерова многострукост пројективно равна, па смо доказали да је она пројективно равна ако и само ако је равна. С обзиром на то да су три Ричијева тензора различита од нуле, задали смо им мало слабије услове и показали да се тада поклапају са η-Ајнштајновом ко-Келеровом многострукошћу.

На крају треће главе смо доказали егзистенцију четврт-симетричне неметричке конексије (3.4.2), која се даље може посматрати у (пара-)комплексним и (пара-)контактним многострукостима, а већ је посматрана на Сасакијевој многострукости [110].

У оквиру генералисаних Риманових многострукости са Ајзенхартовом конексијом смо проучавали класу конформних пресликавања при којима се чува торзија и пресликавања која се дефинишу помоћу њих. Декомпозицијом инваријантних тензора кривине за ЕТ-конформно пресликавање смо одредили тензоре кривине Ајнштајновог типа, од којих су три алгебарски тензори кривине и притом су инваријантни за ЕТ-конциркуларно пресликавање, док су у случају четвородимензионалне многострукости инваријантни сви тензори Ајнштајновог типа. Коришћењем ових тензора одредили смо потребне и довољне услове да ЕТ-конформно пресликавање буде ЕТ-конциркуларно.

На крају смо дефинисали ЕТ-конхармонијско пресликавање, као специјалну класу ЕТ-конформног пресликавања које чува хармоничност функције и одредили смо тензоре који се не мењају при таквом пресликавању.

Будућа истраживања о посматраним конексијама се могу заснивати пре свега у налажењу примене претходних резултата, као што смо то представили на Лоренцовим, Келеровим и ко-Келеровим многострукостима, а могу се испитати и још неке многострукости у конкретној димензији. Интересантно ће бити проверити које још многострукости конциркуларна полусиметрична метричка конексија своди на неке специјалне случајеве. Истраживање о посматраној четврт-симетричној метричкој конексији треба бити завршено применом на скоро пара-комплексне и скоро пара-контактне метричке многострукости и то су задаци за наредна проучавања.

Интересанта су и истраживања нових конексија са торзијом, као што смо представили конексију (3.4.1), која остаје отворена за проучавање за произвољне различите реалне бројеве a и b, различите од нуле, која је у том случају неметричка. Може се проучавати и конексија

(3.4.1) која уместо (1,1)-тензора A, садржи произвољан (1,1)-тензор ϕ који је придружен произвољном (0,2)-тензору. Проблеми које смо проучавали у овој дисертацији за метричке конексије могу послужити и код разматрања полу-симетричних и четврт-симетричних неметричких конексија.

Што се тиче генералисаних Риманових многострукости са Ајзенхартовом конексијом, могу се проширити резултати представљени у овој дисертацији. На пример, могу се детаљније испитати четвородимензионалне многострукости са неким специјалним типом метрике. Такође, будући правци истраживања могу ићи ка дефинисању још неких типова ЕТ-конформних пресликавања, као и ка проучавању још неког пресликавања које чува тензоре Ајнштајновог типа.

Литература

[1] L. J. Alias, A. Romero, M. Sanchez, *Uniqueness of complete spacelike hypersurfaces of constant mean curvature in Generalized Robertson-Walker space-times*, Gen. Relativity Gravitation, 27(1), (1995), 71-84.

[2] K. Amur, S. S. Pujar, *On submanifolds of a Riemannian manifold admitting a metric semi-symmetric connection*, Tensor N.S., 32(1), (1978), 35-38.

[3] K. Arslan, R. Deszcz, R. Ezentas, M. Hotlos, C. Murathan, *On generalized Robertson-Walker space-times satisfying some curvature condition*, Turk. J. Math., 38(2), (2014), 353-373.

[4] C. L. Bejan, A. Velimirović, *Linear connections with and without torsion, making parallel an integrable endomorphism on a manifold*, Filomat, 33(10), (2019), 2943-2949.

[5] S. Bhowmik, *Some properties of a quarter-symmetric nonmetric connection in a Kähler manifold*, Bull. Kerala Math. Assoc., 6(1), (2010), 99-109.

[6] A. Blaga, A. Nannicini, *On statistical and semi-Weyl manifolds admitting torsion*, Mathematics, 10, (2022), 990.

[7] D. E. Blair, *The theory of quasi-Sasakian structures*, J. Differential Geom., 1, (1967), 331-345.

[8] D. E. Blair, *Riemannian geometry of contact and symplectic manifolds*, second ed., Progress in Mathematics, Vol. 203, 2010.

[9] E. Cartan, *Sur une généralisation de la notion de courbure de Riemann et les espaces à torsion*, Comptes Rendus Acad. Sci., 174, (1922), 593-595.

[10] E. Cartan, *Sur les variétés à connexion affine et la théorie de la relativé généralisée. Part I*, Ann. Ec. Norm., 40, (1923), 325-412.

[11] M. C. Chaki, *On pseudo symmetric manifolds*, An. Stiint. Univ. Al. I. Cuza Iasi. Mat. (N. S.), 33, (1987), 53-58.

[12] M. C. Chaki, R. K. Maity, *On quasi Einstein manifolds*, Publ. Math. Debrecen, 57(3-4), (2000), 297-306.

[13] B. Cappelleti-Montano, A. De Nicola, I. Yudin, *A survey on cosymplectic geometry*, Rev. Math. Phys., 25(10), (2013), 1343002.

[14] B. B. Chaturvedi, P. N. Pandey, *Kähler manifold with a special type of semi-symmetric non-metric connection*, Global J. Math. Sci., 7(1), (2015), 17-24.

[15] B. B. Chaturvedi, P. N. Pandey, *A note on semi-symmetric metric connection*, Thai J. Math., 19(4), (2021), 1199-1207.

[16] S. K. Chaubey, U. C. De, *Characterization of the Lorentzian para-Sasakian manifolds admitting a quarter-symmetric non-metric connection*, SUT J. Math., 51(1), (2019), 53-67.

[17] S. K. Chaubey, J. W. Lee, S. K. Yadav, *Riemannian manifolds with a semi-symmetric metric P-connection*, J. Korean Math. Soc., 56(4), (2019), 1113-1129.

[18] S. K. Chaubey, Y. J. Suh, *Riemannian concircular structure manifolds*, Filomat, 36(19), (2022), 6699-6711.

[19] S. K. Chaubey, Y. J. Suh, U. C. De, *Characterizations of the Lorentzian manifolds admitting a type of semi-symmetric metric connection*, Anal. Math. Phys., 10 (2020) 61.

[20] S. K. Chaubey, G-E. Vilcu, *Gradient Ricci solitons and Fischer-Marsden equation on cosymplectic manifolds*, Rev. Real Acad. Cienc. Exactas Fis. Nat. Ser. A-Math., 116, (2022), 186.

[21] B. Y. Chen, *A simple characterization of generalized Robertson-Walker spacetimes*, Gen. Relativ. Gravit., 46(12), (2014), 1833.

[22] O. Chepurna, *Diffeomorphisms of Riemannian manifolds with preserved Einstein tensor*, PhD Thesis, Palacky Univ. Olomouc, 2012.

[23] O. Chepurna, V. Kiosak, J. Mikeš, *Conformal mappings of Riemannian spaces which preserve the Einstein tensor*, J. Appl. Math. Aplimat, 3(1), (2010), 253-258.

[24] Y. Cherevko, V. Berezovski, O. Chepurna, *Conformal mappings of Riemannian manifold preserving generalized Einstein tensor*, Proceedings of 17th Conference on Applied Mathematics Aplimat2018, (2018), 224-231.

[25] D. Conti, M. Fernandez, *Einstein almost cokähler manifolds*, Math. Nachr., 289, (2016), 1-12.

[26] K. De, U. C. De, *Perfect fluid spacetimes obeying certain restrictions on the energy-momentum tensor*, Filomat, 37(11), (2023), 3483-3492.

[27] K. De, U. C. De, Lj. Velimirović, *Some curvature properties of perfect fluid spacetimes*, Quaes. Math., 47(4), (2024), 751-764.

[28] U. C. De, G. C. Ghosh, *On weakly concircular Ricci symmetric manifolds*, South East Asian J. Math. and Math. Sci., 3(2), (2005), 9-15.

[29] U. C. De, K. De, S. Güler, *Characterizations of a Lorentzian manifold with a semi-symmetric metric connection*, Publ. Math. Debrecen, 104(3-4), (2024), 329-341.

[30] U. C. De, Lj. Velimirović, *Spacetimes with semisymmetric energy-momentum tensor*, Int. J. Theor. Phys., 54, (2015), 1779-1783.

[31] F. Defever, R. Deszcz, L. Verstraelen, L. Vrancken, *On pseudosymmetric space-times*, J. Math. Phys., 35, (1994), 5908.

[32] R. Deszcz, *On Ricci-pseudosymmetric warped products*, Demonstr. Math., 22, (1989), 1053-1065.

[33] R. Deszcz, M. Glogowska, M. Hotlos, M. Petrović-Torgašev, G. Zafindratafa, *On semi-Riemannian manifolds satisfying some generalized Einstein metric conditions*, Int. Elec. J. Geom., 16(2), (2023), 539-576.

[34] R. Deszcz, M. Glogowska, M. Hotlos, Z. Sentürk, *On certain quasi-Einstein semisymmetric hypersurfaces*, Annales Univ. Sci. Budapest, 41, (1998), 151-164.

[35] R. Deszcz, M. Hotlos, Z. Sentürk, *On some family of generalized Einstein metric conditions*, Demonstr. Math. 34(4), (2001), 943-954.

[36] R. Deszcz, L. Verstraelen, S. Yaprak, *Warped products realizing a certain condition of pseudosymmetry type imposed on the Weyl curvature tensor*, Chinese J. Math., 22, (1994), 139-157.

[37] A. K. Dubey, R. H. Ojha, *Some properties of quarter-symmetric non-metric connection in a Kähler manifold*, Int. J. Contemp. Math. Sci., 5(20), (2010), 1001-1007.

[38] K. L. Duggal, R. Sharma, *Symmetries of spacetimes and Riemannian manifolds*, Mathematics and its Applications, Kluwer Academic Publishers, 1999.

[39] Z. Dušek, O. Kowalski, *How many are affine connections with torsion*, Archivum Mathematicum (Brno), 50, (2014), 257-264.

[40] A. Einstein, *Die Grundlage der allgemeinen Relativitätstheorie*, Annalen der Physik, 354(7), (1916), 769-822.

[41] L. Eisenhart, *Generalized Riemannian spaces*, Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 37(5), (1951), 311-315.

[42] H. Endo, *On the AC-contact Bochner curvature tensor field on almost cosymplectic manifolds*, Publ. Inst. Math. (Beograd), 56(70), (1994), 102-110.

[43] A. Friedmann, J. A. Schouten, *Über die geometrie der halbsymmetrischen Übertragung*, Math. Zeitschr., 21, (1924), 211–223.

[44] P. Gauduchon, *Hermitian connections and Dirac operators*, Bolletino Un. Math. Ital., 11-B, (1997), 257-288.

[45] J. Geheniau, R. Debever, *Les invariants de courbure de l'espace de Riemann a quatre dimensions*, Bull. Acad. R. Sci. Lett. Beaux-arts Belgique, 42, (1956), 114.

[46] S. Golab, *On semi-symmetric and quarter-symmetric linear connections*, Tensor N.S., 29, (1975), 249-254.

[47] S. I. Goldberg, I. Vaisman, *On compact locally conformal Kaehler manifolds with non-negative sectional curvature 1980*, Ann. Fac. Sci. Toulouse Math. Ser. V, 2(2), (1980), 117-123.

[48] S. I. Goldberg, K. Yano, *Integrability of almost cosymplectic structures*, Pac. J. Math., 31(2), (1969), 373-382.

[49] M. Gutierrez, B. Olea, *Global decomposition of a Lorentzian manifold as a generalized Robertson-Walker space*, Differ. Geom. Appl. 27, (2009), 146-156.

[50] Y. Han, A. De, P. Zhao, *On a semi-quasi-Einstein manifold*, J. Geom. Phys., 155, (2021), 103739.

[51] Y. Han, H. T. Yun, P. Zhao, *Some invariants of quarter-symmetric metric connections under projective transformation*, Filomat, 27(4), (2013), 679-691.

[52] F. W. Hehl, Y. N. Obukhov, *Foundations of classical electrodynamics: charge, flux and metric*, Progress in Mathematical Physics, Vol. 33, Springer Science, 2003.

[53] Y. Ishii, *On conharmonic transformations*, Tensor N.S., 7, (1957), 73-80.

[54] S. Ivanov, *Heterotic supersymmetry, anomaly cancellation and equations of motion*, Phys. Lett. B, 685(2-3), (2010), 190-196.

[55] S. Ivanov, M. Zlatanović, *Connections on a non-symmetric (generalized) Riemannian manifold and gravity*, Classical Quant. Grav., 33(7), (2016), 075016.

[56] S. Ivanov, M. Zlatanović, *Non-symmetric Riemannian gravity and Sasaki-Einstein 5-manifolds,* Classical Quant. Grav., 37(2), (2020), 025002.

[57] B. Jovanović, K. Lukić, *Integrable systems in cosymplectic geometry*, J. Phys. A: Math. Theor., 56(1), (2023), 015201.

[58] M. N. I. Khan, *Tangent bundle endowed with quarter-symmetric non-metric connection on an almost Hermitian manifold*, Facta Universitatis, Ser. Math. Inform., 35(1), (2020), 167-178.

[59] H. Li, *Topology of co-symplectic/co-Kähler manifolds*, Asian J. Math., 12(4), (2008), 527-543.

[60] Y. Li, H. A. Kumara, M. S. Siddesha, D. M. Naik, *Charachterization of Ricci almost solitons on Lorentzian manifolds*, Symmetry, 15, (2023), 1175.

[61] P. Libermann, *Sur les automorphismes infinitèsimaux des structures symplectiques et de atructures de contact*, Coll. Gèom. Diff. Globale, (Bruxelles 1958), Louvain, (1959), 37-59.

[62] G. D. Ludden, *Submanifolds of cosymplectic manifolds*, J. Differential Geom., 4, (1970), 237-244.

[63] **M. Maksimović**, *Quarter-symmetric non-metric connection*, Filomat, 38(23), (2024).

[64] **M. Maksimović**, M. Petrović, N. Vesić, M. Zlatanović, *Concircularly semi-symmetric metric connection*, Quaest. Math., 47(3), (2024), 557-576.

[65] **M. Maksimović**, M. Stanković, *Some new identities for the second covariant derivative of the curvature tensor*, Facta Universitatis, Ser. Math. Inform., 36(3), (2021), 519-528.

[66] **M. Maksimović**, M. Zlatanović, *Einstein type curvature tensors and Einstein type tensors of generalized Riemannian space in the Eisenhart sense*, Mediterr. J. Math., 19, (2022), 217.

[67] **M. Maksimović**, M. Zlatanović, *Quarter-symmetric metric connection on a cosymplectic manifold*, Mathematics, 11(9), (2023), 2209.

[68] S. Mallick, U. C. De, *Spacetimes with pseudosymmetric energy-momentum tensor*, Commun. Phys., 26(2), (2016), 121-128.

[69] C. A. Mantica, L. G. Molinari, *Generalized Robertson-Walker spacetimes: A survey*, Int. J. Geom. Methods Mod. Phys. 14(3), (2017), 1730001.

[70] J. Mikeš, E. Stepanova, A. Vanžurova, et al., *Differential geometry of special mappings*, Palacky University, Olomouc, 2015.

[71] S. Minčić, *Generalisani Rimanovi prostori*, Doktorska disertacija, PMF, Novi Sad, 1975.

[72] S. Minčić, *Independent curvature tensors and pseudotensors of space with non-symmetric affine connexion*, Colloquia Mathematica Societatis Janos Bolayai, 31 Differential Geometry, Budapest (Hungary), (1979), 445-460.

[73] S. Minčić, *Some characteristics of curvature tensors of nonsymmetric affine connexion*, 12th Yugoslav Geometric Seminar (Novi Sad, 1998), Novi Sad J. Math., 29(3), (1999), 169-186.

[74] S. Minčić, *On some properties of non-symmetric connections*, Filomat, 29(3), (2015), 585-591.

[75] R. S. Mishra, S. Pandey, *On quarter symmetric metric F-connections*, Tensor N.S., 34, (1980), 1-7.

[76] C. Murathan, C. Özgür, *Riemannian manifolds with a semi-symmetric metric connection satisfying some semisymmetry conditions*, P. Est. Acad. Sci., 57(4), (2008), 210-216.

[77] M. Najdanović, M. Zlatanović, I. Hinterleitner, *Conformal and Geodesic Mappings of Generalized Equidistant Spaces*, Publ. Inst. Math., 98(112), (2015), 71-84.

[78] B. O'Neill, *Semi-Riemannian geometry with applications to the relativity*, Academic Press, New York-London, 1983.

[79] A. Newlander, L. Nirenberg, *Complex analytic coordinates in almost complex manifold*, Ann. Math., 65, (1957), 391-404.

[80] F. Özdemir, G. C. Yildirim, *On conformally recurrent Kahlerian Weyl spaces*, Topol. Appl., 153, (2005), 477-484.

[81] C. Özgür, *On Ricci solitons with a semi-symmetric metric connection*, Filomat, 35(11), (2021), 3635-3641.

[82] E. Pak, *On the pseudo-Riemannian spaces*, J. Korean Math. Soc., 6, (1969), 23-31.

[83] J. S. Pak, J-H. Kwon, K-H. Cho, *On the spectrum of the Laplacian in cosymplectic manifolds*, Nihonkai Math. J., 3, (1992), 49-66.

[84] T. Pal, M. H. Shahid, S. K. Hui, *CR-submanifolds of $(LCS)_n$-manifolds with respect to quarter-symmetric non-metric connection*, Filomat, 33(11), (2019), 3337-3349.

[85] M. Petrović, *Composition of conformal and projective mappings of generalized Riemannian spaces in Eisenhart's sense preserving certain tensors*, Book of abstracts of XXII Geometrical seminar, Vrnjačka Banja, Serbia, May 26-31, 2024, pp. 48.

[86] M. Petrović, M. Stanković, P. Peška, *On conformal and concircular diffeomorphisms of Eisenhart's generalized Riemannian spaces*, *Mathematics*, 7, (2019), 626.

[87] M. Petrović, N. Vesić, M. Zlatanović, *Curvature properties of metric and semi-symmetric linear connections*, Quaest. Math., 45(10), (2022), 1603-1627.

[88] R. J. Petti, *Derivation of Einstein-Cartan theory from general relativity*, Int. J. Geo. Meth. Mod. Phys., 18(06), (2021), 2150083.

[89] M. Prvanović, *Some tensors of metric semi-symmetric connection*, Atti della Accad. Delle Sci. di Torino, 107, (1972-1973), 303-316.

[90] M. Prvanović, *On pseudo-metric semi-symmetric connections,* Publ. Inst. Math. d'Acad. Serbe des Sci, 18(32), (1975), 157-165.

[91] M. Prvanović, *On two curvature tensors in a locally decomposable Riemannian space*, *Review of Research Faculty of Science - Novi Sad*, 6, (1976), 49-57.

[92] M. Prvanović, *Four curvature tensors of non-symmetric affine connexion*, (in Rusian), Proceedings of the conference "150 years of Lobachevski geometry", Kazan, (1976), Moscow (1977), 199–205.

[93] M. Prvanović, *Product semi-symmetric connections of the locally decomposable Riemannian spaces.* Bulletin T.LXIV de l'Academie serbe des Sciences et des Arts, Classe des Sciences mathematiques et naturelles Sciences mathematiques, 10, (1979), 17-27.

[94] M. Prvanović, *Holomorphically semi-symmetric connection*, Review of Research Faculty of Science, University of Novi Sad, 9 (1979) 91-99.

[95] M. Prvanović, *Some special product semi-symmetric and some special holomorphically semisymmetric F-connections*, Publ. Inst. Math., 33(47), (1984), 138-152.

[96] M. Prvanović, *Einstein connection of almost Hermitian manifold*, Bull. Cl. Sci. Math. Nat. Sci. Math., 20, (1995), 51-59.

[97] M. Prvanović, *Holomorphically projective curvature tensors*, Kragujevac J. Math., 28, (2005), 97-111.

[98] N. Pušić, *On quarter-symmetric metric connections on a hyperbolic Kaehlerian space*, Publ. Inst. Math., Nouvelle serie, 73(87), (2003), 73-80.

[99] N. Pušić, *A note on curvature-like invariants of some connections on locally decomposable spaces*, Publ. Inst. Math., 94(108), (2013), 219-228.

[100] N. Pušić, *On a curvature-type invariants of a g-holomorphically semi-symmetric connection on a locally product space*, Novi Sad J. Math., 44(1), (2014), 115-128.

[101] N. Pušić, *On curvature-type invariants in hyperbolic Kähler spaces, Part I*, Diff. Geo. Dynamical System, 17, (2015), 110-125.

[102] N. Pušić, *On curvature-type invariants in hyperbolic Kähler spaces, Part II*, Diff. Geo. Dynamical System, 18, (2016), 111-122.

[103] S. C. Rastogi, *Some curvature properties of quarter symmetric metric connections*, Int. Atomic Energy Agency (IAEA), Int. Centre for Theor. Phys. (ICTP), 18(6), (1986), 18015243.

[104] J. A. Schouten, *Der Ricci-Kalkül*, Springer-Verlag, Berlin, 1924.

[105] J. A. Schouten, *Ricci-calculus*, 2nd edition, Springer-Verlag, Berlin, 1954.

[106] A. Šeboković, *Unutrašnje i spoljašnje simetrije u Rimanovoj geometriji*, Doktorska disertacija, PMF, Kragujevac, 2016.

[107] A. A. Shaikh, R. Deszcz, M. Hotlos, J. Jelowicki, *On pseudosymmetric manifolds*, Publ. Math. Debrecen, 86(3-4), (2016), 433-456.

[108] M. D. Siddiqi, *Ricci ρ-soliton and geometrical structure in a dust fluid and viscous fluid spacetime*, Bulg. J. Phys. 46, (2019), 163-173.

[109] A. N. Siddiqui, M. D. Siddiqi, *Almost Ricci-Bourguignon solitons and geometrical structure in a relativistic perfect uid spacetime*, Balkan J. Geom. Appl., 26(2), (2021), 126-138.

[110] A. Singh, Pankaj, R. Prasad, S. Patel, *Ricci soliton on Sasakian manifolds with quarter-symmetric non-metric connection*, Ganita, 73(2), (2023), 59-74.

[111] W. Slosarska, *On some invariants of Riemannian manifold admitting a concircularly semi-symmetric metric connection*, Demonstr. Math. 17(1), (1984), 251-257.

[112] S. K. Srivastava, Sunil K. Srivastava, M. Kankarej, *On quarter symmetric metric connection in almost contact manifold*, J. Int. Acad. Phys. Sci., 13(2), (2009), 167-174.

[113] M. Stanković, *Neka preslikavanja prostora nesimetrične afine koneksije*, Doktorska disertacija, PMF, Niš, 2001.

[114] M. Stanković, Lj. Velimirović, S. Minčić, M. Zlatanović, *Equitorsion conform mappings of generalized Riemannian spaces*, Mat. Vesnik, 61, (2009), 119-129.

[115] V. Stanković, *Certain properties of generalized Einstein spaces*, Filomat, 32(13), (2018), 4803-4810.

[116] V. Stanković, *Einstein type tensors in the generalized Riemannian space*, Quaest. Math., 44(6), (2021), 735-745.

[117] P. Stavre, *On the S-concircular and S-conharmonic connections*, Tensor N.S., 38, (1982), 103-107.

[118] S. E. Stepanov, I. A. Gordeeva, *Pseudo-Killing and pseudoharmonic vector fields on a Riemann-Cartan manifold*, Math. Notes, 87(2), (2010), 238-247.

[119] W. Tang, T. Y. Ho, K. I. Ri, F. Fu, P. Zhao, *On a generalized quarter-symmetric metric recurrent connection*, Filomat, 32(1), (2018), 207-215.

[120] W. Tang, J. C. Yong, H. T. Yun, G. He, P. Zhao, *Geometries of manifolds equipped with a Ricci (projection-Ricci) quarter-symmetric connection*, Filomat, 33(16), (2019), 5237-5248.

[121] Y. Tashiro, *On holomorpically projective correspondences in an almost complex space*, Math. J. Okayama Univ., 6(2), (1957), 147-152.

[122] A. Velimirović, *Conformal curvature tensors in a generalized Riemannian space in Eisenhart sense*, Appl. Anal. Discrete Math., 14(2), (2020), 459-471.

[123] N. Vesić, *Some invariants of conformal mappings of a generalized Riemannian space*, Filomat, 32(4), (2018), 1465-1474.

[124] N. Vesić, *Generalized Weyl conformal curvature tensor of generalized Riemannian space*, Miskolc Math. Notes, 20(1), (2019), 555-563.

[125] N. Vesić, *Eighty one Ricci-type identities*, Facta Universitatis, Ser. Math. Inform., 35(4), (2020), 1059-1078.

[126] V. V. Vishnevskii, A. P. Shirokov, V. V. Shurygin, *Spaces over algebras (Prostranstva nad algebrami)*, Kazanskii Gosudarstvennyi Universitet, Kazan, 1985. (in Russian)

[127] W. Wang, *A class of three dimensional almost coKähler manifolds*, Palestine J. Math., 6(1), (2017), 111-118.

[128] H. Weyl, *Reine infinitesimalgeometrie*, Math. Zeitschrift Bd., 2, (1918), 384-411.

[129] K. Yano, *Concircular geometry I. Concircular transformations*, Proc. Imp. Acad. Tokyo, 16(6), (1940), 195-200.

[130] K. Yano, *On the torse-forming direction in a Riemannian spaces*, Proc. Imp. Acad. Tokyo, 20(6), (1944), 340-345.

[131] K. Yano, *Differential geometry of complex and almost complex spaces*, Pergamon Press, New York, 1965.

[132] K. Yano, *On semi-symmetric metric connection*, Rev. Roumaine Math. Pures Appl., 15, (1970), 1579-1586.

[133] K. Yano, *The Hayden connection and its applications*, SEA Bull. Math., 6, (1982), 96-114.

[134] K. Yano, S. Bochner, *Curvature and Betti numbers*, Annals of Mathematics Studies, 32, Princeton University Press, (1954).

[135] K. Yano, T. Imai, *Quarter-symmetric connections and their curvature tensors*, Tensor N.S., 38, (1982), 13-18.

[136] H. B. Yilmaz, *On pseudo Z-symmetric Lorentzian manifolds admitting a type of semi-symmetric metric connection*, Anal. Math. Phys. 13, (2023), 18.

[137] H. I. Yoldas, *Some results on α-cosymplectic manifolds*, Bull. Transilv. Univ. Brasov Serie III Math. Comput. Sci., 1(63), No. 2, (2021), 115-128.

[138] P. Zhang, Y. Li, S. Roy, S. Dey, *Geometry of α-cosymplectic metric as $*$-conformal η-Ricci-Yamabe solitons admitting quarter-symmetric metric connection*, Symmetry, 13, (2021), 2189.

[139] D. Zhao, T. Ho, K. Kwak, C. Jon, *On quarter-symmetric connections preserving geodesics*, Bull. Malays. Math. Sci. Soc., 45, (2022), 3255-3276.

[140] P. Zhao, H. Song, *An invariant of the projective semi-symmetric connection,* Chinese Quarterly J. of Math., 17(4), (2001), 48-52.

[141] M. Zlatanović, *Ekvitorziona preslikavanja prostora nesimetrichne afine koneksije*, Doktorska disertacija, PMF, Niš, 2010.

[142] M. Zlatanović, **M. Maksimović**, *Quarter-symmetric generalized metric connections on a generalized Riemannian manifold*, Filomat, 37(12), (2023), 3927-3937.

[143] M. Zlatanović, **M. Maksimović**, *Quarter-symmetric connection on an almost Hermitian manifold and on a Kähler manifold*, Hacettepe J. Math. Stat., 53(4), (2024), 963-980.

[144] M. Zlatanović, M. Petrović, **M. Maksimović**, *Curvature properties of projective semi-symmetric linear connections*, Miskolc Math. Notes, 24(3), (2023), 1615-1635.

Имена страних научника

А. Ајнштајн	Albert Einstein (1879-1955)
Л. П. Ајзенхарт	Luther Pfahler Eisenhart (1876-1965)
Е. Картан	Elie Joseph Cartan (1869-1951)
Чен	Bang-Yen Chen
Фиалков	Aaron Fialkow (////-1999)
А. Фридман	Alexander Alexandrovich Friedmann (1888-1925)
С. Голаб	Stanislaw Golab (1902-1980)
Хермит	Charles Hermite (1822-1901)
Келер	Erich Kähler (1906-2000)
Кенмоцу	Katsuei Kenmotsu
Килинг	Wilhelm Killing (1847-1923)
Кулкарни	Ravindra Shripad Kulkarni
Леви-Чивита	Tullio Levi-Civita (1873-1941)
Лоренц	Hendrik Lorentz (1853-1928)
Нијенхуис	Albert Nijenhuis (1926-2015)
Номизу	Katsumi Nomizu (1924-2008)
Ричи	Gregorio Ricci Cubastro (1853-1925)
Риман	Bernhard Riemann (1826-1866)
J. А. Схаутен	Jan Arnoulds Schouten (1883-1971)
Х. Сонг	Hongzao Song
Тачибана	Shun-Ichi Tachibana
Вејл	Hermann Klaus Hugo Weyl (1885-1995)
Вокер	Arthur Geoffrey Walker (1909-2001)
К. Јано	Kentaro Yano (1912-1993)
П. Жао	Peibiao Zhao

Биографија

Мирослав Д. Максимовић је рођен 19.5.1993. год. у Гњилану. Основну школу „Миладин Поповић“ и Гимназију Гњилане је завршио у Пасјану. Природно-математички факултет, Универзитета у Приштини са привременим седиштем у Косовској Митровици, Одсек за математику, је уписао 2012. год. и основне академске студије је завршио 2016. са просечном оценом 9,42. Мастер академске студије на истом Факултету завршио је 2017. са просечном оценом 9,67. Од 2017. је студент докторских академских студија на Природно-математичком факултету, Универзитета у Нишу, на студијском програму Математика.

Од новембра 2016. год. је запослен на Природно-математичком факултету у Косовској Митровици за извођење вежби из неколико предмета.

Учесник је интерног јуниор пројекта број ИЈ-2303, чији је носилац Природно-математички факултет у Косовској Митровици (2023-2025), а био је учесник и интерног јуниор пројекта број ИЈ-0203, у периоду 2020-2022. Био је учесник пројекта број ОН 174025 Министарства просвете, науке и технолошког развоја Републике Србије.

Био је члан организационог одбора међународне конференције XXII Geometrical seminar, која се одржала у Врњачкој Бањи 2024. год.

Библиографија радова аутора

Списак радова у међународним часописима (M21-M23):

1. **M. Maksimović**, M. Zlatanović, *Quarter-symmetric metric connection on a cosymplectic manifold*, Mathematics, 11(9), (2023), 2209. (IF2021: 2.592, M21a)
2. **M. Maksimović**, M. Zlatanović, *Einstein type curvature tensors and Einstein type tensors of generalized Riemannian space in the Eisenhart sense*, Mediterr. J. Math., 19, (2022), 217. (IF 2020: 1.4, M21)
3. **M. Maksimović**, *Flexibility of curves on a single-sheet hyperboloid*, J. Eng. Math., 123, (2020), 19-27. (IF 2019: 1.434, M22)
4. M. Zlatanović, M. Petrović, **M. Maksimović**, *Curvature properties of projective semi-symmetric linear connections*, Miskolc Math. Notes, 24(3), (2023), 1615-1635. (IF 2021: 1.22, M22)
5. M. Zlatanović, **M. Maksimović**, *Quarter-symmetric generalized metric connections on a generalized Riemannian manifold*, Filomat, 37(12), (2023), 3927-3937. (IF 2021: 0.988, M22)
6. **M. Maksimović**, M. Stanković, *Notes on product semisymmetric connection in a locally decomposable Riemannian space*, Turkish J. Math., 45(1), (2021), 96-109. (IF 2021: 0.954, M22)
7. **M. Maksimović**, Lj. Velimirović, M. Najdanović, *Infinitesimal bending of DNA helices*, Turkish J. Math., 45(1), (2021), 520-528. (IF 2021: 0.954, M22)
8. **M. Maksimović**, M. Petrović, N. Vesić, M. Zlatanović, *Concircularly semi-symmetric metric connection*, Quaest. Math., 47(3), (2024), 557-576. (IF 2022: 0.9, M22)
9. **M. Maksimović**, S. Rančić, M. Najdanović, Lj. Velimirović, E. Ljajko, *On the torsional energy of torus knots under infinitesimal bending*, An. St. Univ. Ovidius Constanta, Ser. Mat., 31(1), (2023), 181-197. (IF 2021: 0.886, M22)
10. M. Zlatanović, **M. Maksimović**, *Quarter-symmetric connection on an almost Hermitian manifold and on a Kähler manifold*, Hacettepe J. Math. Stat., 53(4), (2024), 963-980. (IF 2022: 0.8, M22)
11. **M. Maksimović**, *Quarter-symmetric non-metric connection*, Filomat, 38(23), (2024), 8097-8110. (IF 2023: 0.8, M22)

Списак радова у националном часопису међународног значаја (M24):

1. **M. Maksimović**, M. Stanković, *Some new identities for the second covariant derivative of the curvature tensor*, Facta Universitatis, Ser. Math. Inform., 36(3), (2021), 519-528. (2021: M24)

Списак радова у националним часописима (M50):

1. **M. Maksimović**, T. Jovanović, E. Ljajko, M. Ivanović, *Analysis of geodesics on different surfaces*, The University Thought - Publication in Natural Sciences, 10(1), (2020), 51-56. (2020: M53)
2. M. Najdanović, **M. Maksimović**, Lj. Velimirović, *Curves on ruled surfaces under infinitesimal bending*, Bulletin of Natural Sciences Research, 11(1), (2021), 38-43. (2021: M53)

Списак радова саопштених на научним скуповима:

1. **M. Maksimović**, N. Kontrec, S. Panić, *Use of GeoGebra in the study of rotations*, 12th International Conference Science and Higher Education in Function of Sustainable Development - SED 2021, Užice, (2021). (M33)
2. E. Ljajko, M. Najdanović, **M. Maksimović**, N. Kontrec, *Visualization of geometric objects using program package Mathematica*, Book of Abstracts of 7th International Conference CP-MMI 2022, Novi Pazar, (2022). (M34)
3. M. Najdanović, **M. Maksimović**, Lj. Velimirović, S. Rančić, *Deformed spherical curves*, Proceedings of CODEMA 2022, (2023), 43-51. (M33)
4. **M. Maksimović**, N. Kontrec, S. Panić, M. Petrović, *Analiza efekata primene GeoGebra-e na praćenje nastave geometrije*, Konferencija ITOP18, FTN, Čačak, (2018), 361-367. (M63)
5. **M. Maksimović**, *On a quarter-symmetric generalized metric connection in a generalized Riemannian manifold*, Kongres mladih matematičara Novi Sad 2022, Knjiga Sažetaka, (2022), pp. 42. (M64)
6. **M. Maksimović**, M. Zlatanović, *Some curvature properties of quarter-symmetric metric connection*, Book of abstracts of XXII Geometrical seminar, Vrnjačka Banja, Serbia, May 26-31, (2024), pp. 48. (M34)
7. A. Vučetić, **M. Maksimović**, M. Najdanović, M. J. Petrović, *Solving an unconstrained minimization problem using the Hybrid Modified Accelerated Gradient Method*, Book of abstracts of XV Serbian Mathematical congress, Belgrade, Serbia, june 19-22, (2024), pp. 64. (M34)
8. **M. Maksimović**, M. Najdanović, E. Ljajko, N. Kontrec, *Exploring geometrical content with ICTs: A case study on infinitesimal bending of a hyperbolic paraboloid*, Proceedings TIE 2024, 10th International Scientific Conference Technics, Informatics, and Education, Čačak, Serbia, 20-22 September, (2024), pp. 140-143. (M33)
9. **М. Максимовић**, *Једна примена конциркуларне полу-симетричне метричке конексије*, Књига апстраката, XIV симпозијум „Математика и примене“, Београд, Србија, 6-7 децембар, (2024), pp. 21. (M64)

ИЗЈАВА О АУТОРСТВУ

Изјављујем да је докторска дисертација, под насловом

КОНЕКСИЈЕ СА ТОРЗИЈОМ У РИМАНОВИМ МНОГОСТРУКОСТИМА И УОПШТЕЊА

која је одбрањена на Природно-математичком факултету Универзитета у Нишу:

- резултат сопственог истраживачког рада;
- да ову дисертацију, ни у целини, нити у деловима, нисам пријављивао/ла на другим факултетима, нити универзитетима;
- да нисам повредио/ла ауторска права, нити злоупотребио/ла интелектуалну својину других лица.

Дозвољавам да се објаве моји лични подаци, који су у вези са ауторством и добијањем академског звања доктора наука, као што су име и презиме, година и место рођења и датум одбране рада, и то у каталогу Библиотеке, Дигиталном репозиторијуму Универзитета у Нишу, као и у публикацијама Универзитета у Нишу.

У Нишу, 9.1.2025.

Потпис аутора дисертације:

Мирослав Д. Максимовић

ИЗЈАВА О ИСТОВЕТНОСТИ ШТАМПАНОГ И ЕЛЕКТРОНСКОГ ОБЛИКА ДОКТОРСКЕ ДИСЕРТАЦИЈЕ

Наслов дисертације:

КОНЕКСИЈЕ СА ТОРЗИЈОМ У РИМАНОВИМ МНОГОСТРУКОСТИМА И УОПШТЕЊА

Изјављујем да је електронски облик моје докторске дисертације, коју сам предао/ла за уношење у **Дигитални репозиторијум Универзитета у Нишу,** истоветан штампаном облику.

У Нишу, 9.1.2025.

Потпис аутора дисертације:

Мирослав Д. Максимовић

ИЗЈАВА О КОРИШЋЕЊУ

Овлашћујем Универзитетску библиотеку „Никола Тесла“ да у Дигитални репозиторијум Универзитета у Нишу унесе моју докторску дисертацију, под насловом:

КОНЕКСИЈЕ СА ТОРЗИЈОМ У РИМАНОВИМ МНОГОСТРУКОСТИМА И УОПШТЕЊА

Дисертацију са свим прилозима предао/ла сам у електронском облику, погодном за трајно архивирање.

Моју докторску дисертацију, унету у Дигитални репозиторијум Универзитета у Нишу, могу користити сви који поштују одредбе садржане у одабраном типу лиценце Креативне заједнице (Creative Commons), за коју сам се одлучио/ла.

1. Ауторство **(CC BY)**
2. Ауторство – некомерцијално **(CC BY-NC)**
[✓ **3. Ауторство – некомерцијално – без прераде (CC BY-NC-ND)**]
4. Ауторство – некомерцијално – делити под истим условима **(CC BY-NC-SA)**
5. Ауторство – без прераде **(CC BY-ND)**
6. Ауторство – делити под истим условима **(CC BY-SA)**

У Нишу, 9.1.2025.

Потпис аутора дисертације:

Мирослав Д. Максимовић