Rešenja testa iz matematike

1. Neka je $a = \sqrt[3]{7+5\sqrt{2}} + \sqrt[3]{7-5\sqrt{2}}$. Tada važi

$$a^3 = 7 + 5\sqrt{2} + 3\sqrt[3]{(7+5\sqrt{2})^2(7-5\sqrt{2})} + 3\sqrt[3]{(7-5\sqrt{2})^2(7+5\sqrt{2})} + 7 - 5\sqrt{2}$$

$$a^3 = 14 + 3\sqrt[3]{(-1)(7+5\sqrt{2})} + 3\sqrt[3]{(-1)(7-5\sqrt{2})}$$

$$a^3 = 14 - 3\,(\sqrt[3]{7+5\sqrt{2}} + \sqrt[3]{7-5\sqrt{2}})$$

Dakle, treba resiti jednačinu

$$a^3 = 14 - 3a$$

odnosno

$$a^3 + 3a - 14 = 0$$

Kako je za $a = 2$ ova jednakost zadovoljena, na osnovu Bezuovog stava je $a = 2$ rešenje ove jednačine i

$$(a^3 + 3a - 14):(a-2) = a^2 + 2a + 7$$

Rešenja jednačine su

$$\{a = 2\}, \{a = -1 - i\sqrt{6}\}, \{a = -1 + i\sqrt{6}\}$$

pri čemu je samo $a = 2$ celobrojno rešenje.
Dakle,

$$\sqrt[3]{7+5\sqrt{2}} + \sqrt[3]{7-5\sqrt{2}} = 2$$

2. Na osnovu Vijetovih formula koreni x_1 i x_2 kvadratne jednačine

$$ax^2 + bx + c = 0$$

ispunjavaju sledeće uslove

$$x_1 + x_2 = \frac{-b}{a}\ , \quad x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$$

Dakle za korene jednačine

$$x^2 - 2(3m - 1)x + 2m + 3 = 0$$

važi

$$x_1 + x_2 = 2(3m-1)\ , \quad x_1 \cdot x_2 = 2m + 3$$

Sada na osnovu uslova zadatka važi

$$x_1^{\ 3} + x_2^{\ 3} = x_1 + x_2$$

Pa imamo

$$(x_1 + x_2)(x_1{}^2 - x_1x_2 + \ x_2{}^2) = x_1 + x_2$$

$$(x_1 + x_2)(x_1{}^2 + 2x_1x_2 + \ x_2{}^2 - 3x_1x_2) = x_1 + x_2$$

$$(x_1 + x_2)((x_1 + x_2)^2 - 3x_1x_2) = x_1 + x_2$$

$$\big(2(3m-1)\big)\Big(\big(2(3m-1)\big)^2 - 3(2m+3)\Big) = 2(3m-1)$$

$$\big(2(3m-1)\big)\Big(\big(2(3m-1)\big)^2 - 3(2m+3) - 1\Big) = 0$$

Odavde imamo

$$2(3m-1) = 0 \quad \text{ili} \quad \big(2(3m-1)\big)^2 - 3(2m+3) - 1 = 0$$

$$3m - 1 = 0 \quad \text{ili} \quad 36m^2 - 30m - 6 = 0$$

$$m = \frac{1}{3} \quad \text{ili} \quad 6m^2 - 5m - 1 = 0$$

$$m = \frac{1}{3} \quad \text{ili} \quad m = 1 \quad ili \quad m = -\frac{1}{6}$$

3. Jednačina

$$\log_x 3 + \log_3 x \ = \ \log_{\sqrt{x}} 3 \ + \log_3 \sqrt{x} \ + \frac{1}{2}$$

je definisana za $x > 0$. Jednačina se svodi na

$$\frac{1}{\log_3 x} + \log_3 x \ = \ 2\log_x 3 \ + \frac{1}{2}\log_3 x \ + \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{\log_3 x} + \log_3 x \ = \ \frac{2}{\log_3 x} \ + \frac{1}{2}\log_3 x \ + \frac{1}{2}$$

Uvodjenjem smene $t = \log_3 x$ dobijamo

$$\frac{1}{t} + t \ = \ \frac{2}{t} \ + \frac{1}{2}t \ + \frac{1}{2}$$

Uz uslov da je $t \neq 0$. Daljim sredjivanjem dobijamo

$$t^2 - t - 2 = 0$$

Tj

$$t = 2 \quad \text{ili} \quad t = -1$$

Pa vraćanjem smene imamo

$$\log_3 x \ = 2 \quad \text{ili} \quad \log_3 x \ = -1$$

$$x_1 \ = 3^2 = 9 \quad \text{ili} \quad x_2 = (3)^{-1} = \frac{1}{3}$$

4. Da bi odredili jednačinu prave koja sadrži tačku $A(2{,}5)$ i čije je odstojanje od tačke $B(5{,}1)$ jednako 3, posmatrajmo kružnicu sa centrom u tački B poluprečnika 3 oblika:

$$k_1: \quad (x-5)^2 + (y-1)^2 = 9$$

I odredimo tangentu na $k_1$koja sadrži tačku A.
Na osnovu uslova dodira prave I kružnice, prava $y = kx + n$ je tangent na k_1 ako važi uslov:

$$9(1+k^2) = (5k - 1 + n)^2$$

a kako prava $y = kx + n$ sadrži tačku A, sledi da je

$$5 = 2k + n$$

Dakle, $n = 5 - 2k$, pa sledi

$$9(1+k^2) = (5k - 1 + 5 - 2k)^2$$

$$9 + 9k^2 = 9k^2 + 24k + 16$$

$$24k = -7$$

Dakle, $k = -\frac{7}{24}$ I $n = \frac{67}{12}$ pa je jednačina tražene prave

$$y = -\frac{7}{24}x + \frac{67}{12}$$

5. Množenjem jednačine

$$\sin x - \cos x = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

sa $\frac{\sqrt{2}}{2}$ dobijamo

$$\sin x \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - \cos x \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\sin x \cdot \cos\frac{\pi}{4} - \cos x \ \cdot \sin\frac{\pi}{4} = \frac{1}{2}$$

$$\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}$$

$$x - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \quad x - \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$$

$$x_k = \frac{5\pi}{12} + 2k\pi \quad x = \frac{13\pi}{12} + 2k\pi$$

6. Označimo temena šestougla sa

$$A_1, A_2, \dots, A_6$$

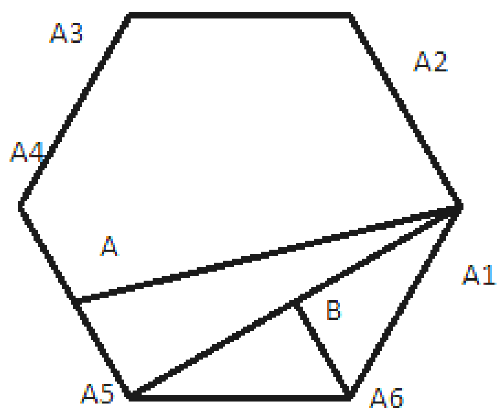
Neka se tačka A nalazi na sredini stranice A_4A_5. Sledi da je

$$AX \ < \ AA_1 \ i \ AY \ < \ AA_1,$$

pa je

$$AX \ + \ AY \ < \ 2\, AA_1$$

Sada računamo dužinu duži AA_1. Neka je B sredina duži A_1A_5.



Tada je trougao A_5A_6B pravougli, pa je $A_5B = \frac{5}{2}\sqrt{3}$, odakle sledi da je $A_1A_5 = 5\sqrt{3}$. Iz Pitagorine teoreme za trougao AA_5A_1 imamo da je $AA_1 = \frac{5}{2}\sqrt{13}$ pa je

$$AX \ + \ AY \ < \ 5\sqrt{13}$$