PRIRODNO – MATEMATIČKI FAKULTET U NIŠU
DEPARTMAN ZA RAČUNARSKE NAUKE

Utorak, 27.06.2023. godine

PRIJEMNI ISPIT IZ MATEMATIKE

1. Reši jednačinu po nepoznatoj x:

$$\frac{2x-1}{x^2+2x-3}-\frac{3x+1}{x^2-6x+5}=\frac{x-20}{x^2-2x-15}$$

Resenje:

$$x^2+2x-3=(x-1)(x+3)$$

$$x^2-6x+5=(x-5)(x-1)$$

$$x^2-2x-15=(x-5)(x+3)$$

$$\frac{2x-1}{(x-1)(x+3)}-\frac{3x+1}{(x-5)(x-1)}=\frac{x-20}{(x-5)(x+3)}$$

Mnozenjem prethodnog izraza sa $(x-1)(x-3)(x-5)$ dobijamo:

$$(2x-1)(x-5)-(3x+1)(x+3)=(x-20)(x-1)$$

$$2x^2-10x-x+5-3x^2-9x-x-3=x^2-x-20x+20$$

$$-x^2-21x+2=x^2-21x+20$$

$$-2x^2=18$$

$$x^2=-9$$

$$x=\pm 3i$$

2. Odredi one vrednosti parametra m za koje je nejednakost

$$\frac{x^2-8x+20}{mx^2+2(m+1)x+9m+4}<0$$

Ispunjena za sve realne vrednosti promenljive x.

Resenje:

Kako je za polinom $x^2 - 8x + 20$ diskriminanta $D = 64 - 80 < 0$, a koeficijent uz najstariji clan $a = 1$, zadovoljeno je

$$x^2 - 8x + 20 > 0, \qquad \forall x \in R$$

Sledi da mora biti zadovoljeno

$$mx^2 + 2(m+1)x + 9m + 4 < 0, \qquad \forall x$$

Dakle,

$$m < 0 \text{ i } 4(m+1)^2 - 4m(9m+4) < 0$$
$$(m+1)^2 - m(9m+4) < 0$$
$$m^2 + 2m + 1 - 9m^2 - 4m < 0$$
$$-8m^2 - 2m + 1 < 0$$
$$8m^2 + 2m - 1 > 0$$
$$m_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{3+32}}{16} = \frac{-2 \pm 6}{16}$$
$$m_1 = -\frac{1}{2}, m_2 = \frac{1}{4}$$

Dakle,

$$m < 0 \text{ i } m \in (-\infty, -\tfrac{1}{2}) \cup (\tfrac{1}{4}, \infty)$$

Dakle $za\ m \in (-\infty, -\frac{1}{2})$ je nejednakost zadovoljena za svako x.

3. Koeficijenat drugog člana u razvoju binoma $\left(\frac{x}{\sqrt{y}} + \frac{\sqrt{y}}{x}\right)^n$ odnosi se prema koeficijentu trećeg člana kao 2:11. Odrediti četvrti član.
   Resenje:

   k+1-vi član u razvoju ovog binoma je:

$$T_{k+1} = \binom{n}{k} \left(\frac{x}{\sqrt{y}}\right)^{n-k} \left(\frac{\sqrt{y}}{x}\right)^k$$

Dakle,

$$T_2 = \binom{n}{1} \left(\frac{x}{\sqrt{y}}\right)^{n-1} \left(\frac{\sqrt{y}}{x}\right)^1$$
$$T_3 = \binom{n}{2} \left(\frac{x}{\sqrt{y}}\right)^{n-2} \left(\frac{\sqrt{y}}{x}\right)^2$$

Kako je $\binom{n}{1} : \binom{n}{2} = 2:11$ imamo da je:

$$11n = n^2 - n$$

$$n = 0 \vee n = 12$$

Dakle, n mora biti jednako 12.

$$T_4 = \binom{n}{3}\left(\frac{x}{\sqrt{y}}\right)^{n-3}\left(\frac{\sqrt{y}}{x}\right)^3 = \binom{12}{3}\left(\frac{x}{\sqrt{y}}\right)^{12-3}\left(\frac{\sqrt{y}}{x}\right)^3$$

$$T_4 = \frac{220x^6}{y^3}$$

4. Izračunati vrednost izraza

$$y = x^3 - 3x - 2\frac{A^2+B}{A^2-B}$$

za $x = \sqrt[3]{\frac{A+\sqrt{B}}{A-\sqrt{B}}} + \sqrt[3]{\frac{A-\sqrt{B}}{A+\sqrt{B}}}$

Kako je

$$x^3 - 3x = (\sqrt[3]{\frac{A+\sqrt{B}}{A-\sqrt{B}}} + \sqrt[3]{\frac{A-\sqrt{B}}{A+\sqrt{B}}})^3 - 3\left(\sqrt[3]{\frac{A+\sqrt{B}}{A-\sqrt{B}}} + \sqrt[3]{\frac{A-\sqrt{B}}{A+\sqrt{B}}}\right) =$$

$$\frac{A+\sqrt{B}}{A-\sqrt{B}} + \frac{A-\sqrt{B}}{A+\sqrt{B}} - 3\sqrt[3]{\frac{A+\sqrt{B}}{A-\sqrt{B}}\cdot\frac{A-\sqrt{B}}{A+\sqrt{B}}}\cdot(\sqrt[3]{\frac{A+\sqrt{B}}{A-\sqrt{B}}} + \sqrt[3]{\frac{A-\sqrt{B}}{A+\sqrt{B}}})^3 - 3\left(\sqrt[3]{\frac{A+\sqrt{B}}{A-\sqrt{B}}} + \sqrt[3]{\frac{A-\sqrt{B}}{A+\sqrt{B}}}\right) =$$

$$= \frac{2(A^2+B)}{A^2-B}$$

Tada je

$$y = x^3 - 3x - 2\frac{A^2+B}{A^2-B} = \frac{2(A^2+B)}{A^2-B} - 2\frac{A^2+B}{A^2-B} = 0$$

5. Rešiti jednačinu:

$$sinx + sin2x + sin3x = 0$$

Kako je $sinx + sin3x = 2sin2xcosx$, imamo da je

$$2sin2xcosx + sin2x = 0$$

$$sin2x(2cosx + 1) = 0$$

Dakle,

$$sin2x = 0 \text{ ili } 2cosx + 1 = 0$$

Ako je $sin2x = 0$ tada je $2x = k\pi$, odnosno $x = \frac{k\pi}{2}, k \in Z$

Ako je $2cosx + 1 = 0$, tada je $cosx = -\frac{1}{2}$, odnosno $x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2n\pi, n \in Z$.

6. Osnova piramide je trougao čije su stranice a, b i c. Sve bočne ivice piramide nagnute su prema ravni osnove piramide pod uglom α. Izračunati zapreminu piramide.

Oznacimo sa H visinu piramide. Tada je

$$tg\alpha = \frac{H}{R} \rightarrow H = R\, tg\alpha$$

Povrsina osnove piramide se racuna po formuli:

$$B = \frac{abc}{4R} \rightarrow R = \frac{abc}{4B}$$

$$H = \frac{abc}{4B} \cdot tg\alpha$$

Dakle, zapremina piramide je

$$V = \frac{1}{3}B \cdot H = \frac{1}{3}B\frac{abc}{4B} \cdot tg\alpha = \frac{1}{12}abc\, tg\alpha$$