Univerzitet u Nišu
Prirodno-matematički fakultet
Departman za matematiku 24.06.2019.

ZADACI SA REŠENJIMA SA PRIJEMNOG ISPITA IZ MATEMATIKE – JUN 2019.

1. Ako je $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=0$, $abc\neq 0$, izračunati

$$\frac{bc}{a^2}+\frac{ac}{b^2}+\frac{ab}{c^2}.$$

Rešenje: Iz uslova zadatka sledi da je $bc+ac+ab=0$, odakle je, na primer, $a=-\frac{bc}{b+c}$ (analogno se mogu izraziti ostale nepoznate). Tada je

$$\frac{bc}{a^2}+\frac{ac}{b^2}+\frac{ab}{c^2}=\frac{b^3c^3+a^3c^3+a^3b^3}{a^2b^2c^2}=\frac{b^3c^3-\frac{b^3c^3}{(b+c)^3}(b^3+c^3)}{a^2b^2c^2}=\frac{bc((b+c)^3-(b^3+c^3))}{a^2(b+c)^3}$$
$$=\frac{bc(b+c)(b^2+2bc+c^2-b^2+bc-c^2)}{\frac{b^2c^2}{(b+c)^2}(b+c)^3}=3.$$

2. Odrediti kompleksan broj z koji zadovoljava jednačinu

$$|z|+z=2+i.$$

Rešenje: Neka je kompleksan broj z oblika $z=x+iy$. Tada je $\sqrt{x^2+y^2}+x+iy=2+i$, odakle je $\sqrt{x^2+y^2}+x-2+i(y-1)=0$. Može se zaključiti da je $y=1$ i $\sqrt{x^2+y^2}+x-2=0$, odnosno $\sqrt{x^2+1}=2-x$. Kako je član sa leve strane jednakosti pozitivan, to je $x<2$. Kvadriranjem poslednje jednakosti dobija se jednačina $4x=3$, odakle je $x=\frac{3}{4}<2$. Dakle, traženo rešenje je $z=\frac{3}{4}+i$.

3. Polinom $P(x)=x^8+2x^7+3x^2+ax+b$ deljiv je polinomom x^2+x-2. Odrediti a i b.

Rešenje: Deljenjem polinoma $P(x)$ polinomom $Q(x)$ dobija se polinom $S(x)=x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+4$ i ostatak $R(x)=(a-2)x+b+8=0$, odakle je $a=2$, $b=-8$.

4. Rešiti jednačinu

$$5\sqrt[6]{x}+2\sqrt[3]{x}=18.$$

Rešenje: Očigledno da je $x>0$. Uvodi se smena $x=t^6$, tako da zadata jednačina postaje kvadratna jednačina $2t^2+5t-18=0$, čija su rešenja $t_1=-\frac{9}{2}$ $t_2=2$. Rešenje $t_1<0$ nije moguće, tako da je rešenje $t_2=2$, odakle je $x=2^6=64$.

5. Rešiti nejednačinu

$$\log_{2x+3}x^2<1.$$

Rešenje: Mogu se uočiti dva slučaja u zavisnosti da li je $2x+3>1$ ili $2x+3<1$. Neka je $2x+3>1$, odakle je $x>-1$. Tada nejednačina postaje $x^2<2x+3$, tako da je njeno rešenje $x\in(-1,3)$. Ako je $0<2x+3<1$, odnosno $-\frac{3}{2}<x<-1$, rešenje kvadratne nejednačine $x^2>2x+3$ je $x\in(-\infty,-1)\cup(3,\infty)$, tako da je rešenje u tom slučaju $x\in(-\frac{3}{2},-1)$. Kako mora da je $x\neq 0$, rešenje je $x\in(-\frac{3}{2},-1)\cup(-1,0)\cup(0,3)$.

6. Rešiti jednačinu

$$\sqrt{2}\sin^2 x+\cos x=0.$$

Rešenje: Primenom osnovnog trigonometrijskog identiteta jednačina postaje $\sqrt{2}\cos^2 x - \cos x - \sqrt{2} = 0$. Smenom $\cos x = t$ jednačina se svodi na kvadratnu $\sqrt{2}\,t^2 - t - \sqrt{2} = 0$ čija su rešenja $t_1 = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, $t_2 = \sqrt{2}$. Tada se dobijaju jednačine $\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ i $\cos x = \sqrt{2}$. Rešenja prve jednačinu su $x = \pm\frac{3\pi}{4} + 2k\pi$, $k = 0, 1, \ldots$, dok druga jednačina nema rešenja jer $\cos x \in [-1, 1]$.

7. Date su prave

$$p_1 : 3x + 4y = 4 \qquad p_2 : 9x + 5y = -4 \qquad p_3 : 5x + 2y = 6$$

(a) Odrediti presečnu tačku P pravih p_1 i p_2.
(b) Odrediti jednačinu prave koja prolazi kroz tačku P i paralelna je sa pravom p_3.
(c) Odrediti rastojanje tačke P od prave p_3.

Rešenje: (a) Rešavanjem sistema $3x+4y = 4$, $9x+5y = -4$ dobija se presečna tačka $P\left(-\frac{12}{7}, \frac{16}{7}\right)$ pravih p_1 i p_2.

(b) Prava je odredjena tačkom P i vektorom pravca prave p_3, $(2, -5)$, tako da je njena jednačina $\frac{x+\frac{12}{7}}{2} = \frac{y-\frac{16}{7}}{-5}$, odnosno $5x + 2y = -4$.

(c) Rastojanje tačke $P\left(-\frac{12}{7}, \frac{16}{7}\right)$ od prave p_3 se izračunava na sledeći način $d = \frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$, gde su A, B, C koeficijenti jednačine p_3, a (x_0, y_0) koordinate tačke P, tako da je $d = \frac{10\sqrt{29}}{29}$.

8. Kvadrat i jednakostranični trougao imaju jednake obime. Ako je površina trougla $9\sqrt{3}\,\mathrm{cm}^2$ izračunati dijagonalu kvadrata?

Rešenje: Neka je sa a označena stranica kvadrata, a sa b stranica jednakostraničnog trougla. Površina trougla je $P = 9\sqrt{3}\,\mathrm{cm}^2 = \frac{\mathrm{b}^2\sqrt{3}}{4} \Rightarrow \mathrm{b}^2 = 36\,\mathrm{cm}^2 \Rightarrow \mathrm{b} = 6\,\mathrm{cm}$. Iz jednakosti obima dobija se $4a = 3b$ tj. $a = \frac{9}{2}\,\mathrm{cm}$. Tada je dijagonala kvadrata $d = a\sqrt{2} = \frac{9}{2}\sqrt{2}\,\mathrm{cm}$.

9. Odrediti geometrijsku progresiju kod koje je zbir drugog i trećeg člana 3, a zbir četvrtog i petog člana 12.

Rešenje: Po uslovu zadatka je $q_2 + q_3 = 3$, $q_4 + q_5 = 12$ i važi da je $q_n = q \cdot q_{n-1}$. Tada prva jednačina postaje $q_2(1 + q) = 3$, a druga $q_2 \cdot q^2(1 + q) = 12$. Iz prve se dobija da je $q_2 = \frac{3}{1+q}$ i zamenom u drugoj $3q^2 = 12$. Tada je $q = -2$ ili $q = 2$. Iz prve jednačine se dobija da je $q_1(q + q^2) = 3$, odakle je $q_1 = \frac{1}{2}$, kada je $q = 2$, odnosno $q_1 = \frac{3}{2}$, za $q = -2$. Geometrijske progresije su $q_n = \frac{1}{2} \cdot 2^n$ i $q_n = \frac{3}{2} \cdot (-2)^n$, za $n = 0, 1, \ldots$.

10. Ako se poluprečik lopte poveća za $1\,\mathrm{cm}$, njena površina se poveća za $8\pi\,\mathrm{cm}^2$. Za koliko se poveća njena zapremina?

Rešenje: Površina lopte je $P = 4r^2\pi$. Ako se poluprečik lopte poveća za $1\,\mathrm{cm}$ površina lopte iznosi $P_1 = 4(r+1)^2\pi$. Kako je $P_1 - P = 4((r+1)^2 - r^2)\pi = 8\pi\,\mathrm{cm}^2$ dobija se da je $r = \frac{1}{2}\,\mathrm{cm}$. Sledi da je $V_1 - V = \frac{4}{3}((r+1)^3 - r^3)\pi = \frac{13}{3}\pi\,\mathrm{cm}^3$. Dakle, zapremina lopte se nakon povećanja poluprečnika za $1\,\mathrm{cm}$ povećala za $\frac{13}{3}\pi\,\mathrm{cm}^3$.