Универзитет у Нишу
Природно-математички факултет
Департман за математику

26.06.2024.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	$\sum$

ПРИЈЕМНИ ИСПИТ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

1. Решити неједначину
$$\frac{|x-2|-|x+1|}{x} \leq 3.$$

2. Одредити реалне коефицијенте a и b тако да је $x = 1 + i$ нула полинома
$$P(x) = 3x^4 + ax^3 + bx^2 + 4x - 2.$$
За нађене вредности коефицијената a и b одредити остале нуле полинома.

3. Наћи комплексне бројеве z који задовољавају једначину
$$|z|^2 - \overline{z} = 1 + i\,.$$

4. Решити неједначину
$$\sqrt{x-1} \geq 7 - x\,.$$

5. Одредити вредности параметра $m \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$ за које решења x_1 и x_2 квадратне једначине
$$(m-2)x^2 + 2(m-1)x + m = 0$$
задовољавају релацију
$$\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} = \frac{5}{4}.$$

6. Решити једначину
$$3^{2x+3} - 3^{x+1} = 2.$$

7. Решити једначину
$$\cos 9x + \cos 5x = 1 - 2\sin^2 x\,.$$

8. Бочна ивица правилне четворостране пирамиде је дужине 6 и нагнута је према равни основе под углом од 45°. Израчунати запремину те пирамиде.

9. Дате су тачке $A(3,1)$ и $B(7,7)$. Одредити једначину праве која садржи средину дужи AB и нормална је на праву одређену тачкама A и B.

10. Збир прва три члана геометријског низа је $\frac{26}{9}$, а њихов производ је $\frac{8}{27}$. Који члан тог низа је једнак 162?

Универзитет у Нишу
Природно-математички факултет
Департман за математику

26.06.2024.

ЗАДАЦИ СА РЕШЕЊИМА СА ПРИЈЕМНОГ ИСПИТА ИЗ МАТЕМАТИКЕ ∼ ЈУН 2024.

1. Решити неједначину

$$\frac{|x-2|-|x+1|}{x} \leq 3.$$

Решење: Неједначина је дефинисана за $x \neq 0$. Разликују се три случаја.

1. Нека је $x \in (-\infty, -1]$. Тада је

$$\frac{|x-2|-|x+1|}{x} \leq 3 \Leftrightarrow \frac{2-x+x+1}{x} \leq 3 \Leftrightarrow \frac{3(1-x)}{x} \leq 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, 0) \cup [1, +\infty).$$

   Имајући у виду да је $x \in (-\infty, -1]$, закључује се да је решење неједначине у овом случају $x \in (-\infty, -1]$.

2. Нека је $x \in (-1, 0) \cup (0, 2]$. Тада је

$$\frac{|x-2|-|x+1|}{x} \leq 3 \Leftrightarrow \frac{2-x-(x+1)}{x} \leq 3 \Leftrightarrow \frac{1-5x}{x} \leq 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, 0) \cup \left[\frac{1}{5}, +\infty\right).$$

   Како је $x \in (-1, 0) \cup (0, 2]$, следи да је решење неједначине у овом случају $x \in (-1, 0) \cup \big[1/5, 2\big]$.

3. Нека је $x \in (2, +\infty)$. Тада је

$$\frac{|x-2|-|x+1|}{x} \leq 3 \Leftrightarrow \frac{x-2-(x+1)}{x} \leq 3 \Leftrightarrow \frac{-3(x+1)}{x} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{x+1}{x} \geq 0$$
$$\Leftrightarrow x \in (-\infty, -1] \cup (0, +\infty).$$

   Како је $x \in (2, +\infty)$, следи да је решење неједначине у овом случају $x \in (2, +\infty)$.

Дакле, решење задатка је $x \in (-\infty, 0) \cup \left[\frac{1}{5}, +\infty\right)$.

2. Одредити реалне коефицијенте a и b тако да је $x = 1 + i$ нула полинома

$$P(x) = 3x^4 + ax^3 + bx^2 + 4x - 2.$$

За нађене вредности коефицијената a и b одредити остале нуле полинома.

Решење: Како је $x_1 = 1+i$ нула полинома $P(x)$, на основу Безуовог става следи да је остатак при дељењу тог полинома мономом $x - (1 + i)$ облика $P(1 + i)$, при чему је $P(1 + i) = 0$. У овом случају је $P(1 + i) = -10 - 2a + 2(a + b + 2)i$. Реалне константе a и b се одређују из услова да је $P(1 + i) = 0$, односно из система једначина

$$\begin{aligned} -10 - 2a &= 0 \\ a + b + 2 &= 0, \end{aligned}$$

чија су решења $a = -5$ и $b = 3$. За добијене вредности a и b, полазни полином је облика $P(x) = 3x^4 - 5x^3 + 3x^2 + 4x - 2$. Како полином $P(x)$ има реалне коефицијенте и једну нулу $x_1 = 1 + i$ и $x_2 = 1 - i$ је његова нула, па га можемо представити у облику

$$P(x) = (x - (1 + i))(x - (1 - i))S(x) = (x^2 - 2x + 2)S(x),$$

где је $S(x) = 3x^2 + x - 1$. Преостале нуле полинома $P(x)$ су решења квадратне једначине $3x^2 + x - 1 = 0$, односно $x_{3,4} = \frac{-1\pm\sqrt{13}}{6}$.

Дакле, нуле полинома $P(x)$ су $x_1 = 1 + i,\ x_2 = 1 - i,\ x_3 = \frac{-1+\sqrt{13}}{6}$ и $x_4 = \frac{-1-\sqrt{13}}{6}$.

3. Наћи комплексне бројеве z који задовољавају једначину

$$|z|^2 - \overline{z} = 1 + i\,.$$

Решење: Нека је $z = x + iy, x, y \in \mathbb{R}$. Тада је

$$|z|^2 - \overline{z} = 1 + i \Leftrightarrow x^2 + y^2 - (x - iy) - 1 - i = 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 - x - 1 + (y - 1)i = 0.$$

Претходна релација важи ако и само ако су и реални и имагинарни део комплексног броја на левој страни последње једнакости једнаки нули, тј. ако и само ако је $x^2 + y^2 - x - 1 = 0$ и $y - 1 = 0$, односно ако и само ако је $y = 1$ и $x^2 - x = 0$. Дакле, $y = 1 \wedge (x = 0 \vee x = 1)$, тако да су тражена решења једначине $z_1 = i$ и $z_2 = 1 + i$.

4. Решити неједначину

$$\sqrt{x-1} \geq 7 - x\,.$$

Решење: Неједначина је дефинисана за $x - 1 \geq 0$, тј. $x \in [1, +\infty)$. Важи

$$\begin{aligned}
\sqrt{x-1} \geq 7 - x \quad &\Leftrightarrow \quad (x - 1 \geq 0 \wedge 7 - x \leq 0) \vee (7 - x > 0 \wedge x - 1 \geq (7 - x)^2) \\
&\Leftrightarrow \quad (x \geq 1 \wedge x \geq 7) \vee (x < 7 \wedge x^2 - 15x + 50 \leq 0) \\
&\Leftrightarrow \quad (x \geq 7) \vee (x < 7 \wedge x \in [5, 10]) \\
&\Leftrightarrow \quad x \in [7, +\infty) \vee x \in [5, 7) \\
&\Leftrightarrow \quad x \in [5, +\infty).
\end{aligned}$$

Дакле, решење задате неједначине је $x \in [5, +\infty)$.

5. Одредити вредности параметра $m \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$ за које решења x_1 и x_2 квадратне једначине

$$(m - 2)x^2 + 2(m - 1)x + m = 0$$

задовољавају релацију

$$\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} = \frac{5}{4}.$$

Решење: Из Вијетових формула добијамо $x_1 + x_2 = -\frac{2(m-1)}{m-2}$ и $x_1 \cdot x_2 = \frac{m}{m-2}$. Применом ових формула из задате релације следи

$$\begin{aligned}
\frac{5}{4} \quad &= \quad \frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} = \frac{x_1^2 + x_2^2}{x_1^2 x_2^2} = \frac{(x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2}{x_1^2 x_2^2} = \frac{\frac{4(m-1)^2}{(m-2)^2} - 2\frac{m}{m-2}}{\frac{m^2}{(m-2)^2}} = \frac{4(m-1)^2 - 2m(m-2)}{m^2} \\
&= \quad \frac{2m^2 - 4m + 4}{m^2}.
\end{aligned}$$

Дакле, тражени параметар $m \neq 2$ је решење квадратне једначине

$$4(2m^2 - 4m + 4) = 5m^2 \Leftrightarrow 3m^2 - 16m + 16 = 0,$$

односно решења задатка су $m = 4$ и $m = \frac{4}{3}$.

6. Решити једначину

$$3^{2x+3} - 3^{x+1} = 2.$$

Решење: Једначина је дефинисана за $x \in \mathbb{R}$. Дату једначину можемо записати у еквивалентном облику $27 \cdot (3^x)^2 - 3 \cdot 3^x - 2 = 0$. Сменом $3^x = t$, добијамо квадратну једначину $27t^2 - 3t - 2 = 0$ чија су решења $t_1 = \frac{1}{3}$ и $t_2 = -\frac{2}{9}$. Како је $t = 3^x > 0$ добијамо $3^x = \frac{1}{3}$, односно тражено решење је $x = -1$.

7. Решити једначину

$$\cos 9x + \cos 5x = 1 - 2\sin^2 x\,.$$

Решење: Једначина је дефинисана за $x \in \mathbb{R}$ и еквивалентна са једначином $2\cos 7x \cos 2x = \cos 2x$. Следи

$$\cos 2x(1 - 2\cos 7x) = 0 \Leftrightarrow \cos 2x = 0 \vee \cos 7x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{2} + k\pi \vee 7x = \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi,$$

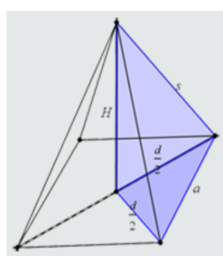
односно скуп решења задатка је

$$\left\{ \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}, \pm\frac{\pi}{21} + \frac{2}{7}k\pi \,\middle|\, k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

8. Бочна ивица правилне четворостране пирамиде је дужине 6 и нагнута је према равни основе под углом од 45°. Израчунати запремину те пирамиде.

Решење: Нека је d дијагонала квадрата у основи правилне четворостране пирамиде, H висина пирамиде и $s = 6$ бочна ивица пирамиде. Посматрајмо правоугли троугао у дијагоналном пресеку пирамиде са катетама $d/2$ и H и хипотенузом s. Користећи Питагорину теорему добија се

$$H^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2 = s^2 = 36\,. \tag{1}$$



Како је бочна ивица s нагнута према равни основе под углом од 45° правоугли троугао је једнакокраки, односно $H = d/2$. Дакле, из (1) се добија

$$2H^2 = 36 \quad \Rightarrow \quad H = \sqrt{18} = 3\sqrt{2} \quad \Rightarrow \quad d = 6\sqrt{2}\,.$$

Ако је a страница квадрата у основи пирамиде, користећи Питагорину теорему је $2a^2 = d^2$, одакле се добија да је страница квадрата $a = 6$. Запремина правилне четворостране пирамиде је

$$V = \frac{B \cdot H}{3} = \frac{a^2 \cdot H}{3} = 36\,\sqrt{2}.$$

9. Дате су тачке $A(3,1)$ и $B(7,7)$. Одредити једначину праве која садржи средину дужи AB и нормална је на праву одређену тачкама A и B.

Решење: Средина дужи AB је тачка $C\left(\frac{3+7}{2}, \frac{1+7}{2}\right)$, тј. $C(5,4)$. Једначина праве q одређене тачкама A и B је

$$\frac{x-3}{7-3} = \frac{y-1}{7-1} \quad \Rightarrow \quad y = 1 + \frac{3}{2}(x-3) = \frac{3}{2}\,x - \frac{7}{2}\,.$$

Дакле, коефицијент правца праве q је $k_q = \frac{3}{2}$. Нека је једначина тражене праве $p : y = k_p x + n$. Из услова да је права p нормална на праву q имамо да је

$$k_q \cdot k_p = -1 \quad \Rightarrow \quad k_p = -\frac{1}{k_q} = -\frac{2}{3}.$$

Из услова да права p пролази кроз тачку C имамо

$$4 = -\frac{2}{3} \cdot 5 + n \quad \Rightarrow \quad n = \frac{22}{3}\,.$$

Дакле, једначина тражене праве је $y = -\frac{2}{3}x + \frac{22}{3}$.

10. Збир прва три члана геометријског низа је $\frac{26}{9}$, а њихов производ је $\frac{8}{27}$. Који члан тог низа је једнак 162?

Решење: Ако је a први члан геометријског низа и q количник низа, прва три члана тог геометријског низа су a, aq и aq^2. Из датих услова добијамо систем једначина

$$\begin{aligned} a + aq + aq^2 = a(1+q+q^2) &= \frac{26}{9}, \\ a^3q^3 &= \frac{8}{27}\,. \end{aligned}$$

Из друге једначине имамо да је $aq = 2/3$, односно $a = \dfrac{2}{3q}$. Заменом у прву једначину добија се

$$\frac{1+q+q^2}{q} = \frac{13}{3} \quad \Rightarrow \quad 3q^2 - 10q + 3 = 0 \quad \Rightarrow \quad q_1 = \frac{1}{3}, \quad q_2 = 3\,.$$

Дакле, решења система једначина су $a_1 = 2$, $q_1 = \dfrac{1}{3}$ и $a_2 = \dfrac{2}{9}$, $q_2 = 3$. Како је $n-$ти члан низа $b_n = aq^{n-1}$, треба наћи $n \in \mathbb{N}$ тако да је $b_n = 162$. У првом случају добија се

$$a_1 q_1^{n-1} = 162 \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} = 81 \quad \Rightarrow \quad 3^{n-1} = \frac{1}{81} = 3^{-4} \quad \Rightarrow \quad n-1 = -4 \quad \Rightarrow \quad n = -3\,.$$

Дакле, у овом случају $n \notin \mathbb{N}$. У другом случају је

$$a_2 q_2^{n-1} = 162 \quad \Rightarrow \quad 3^{n-3} = 81 = 3^4 \quad \Rightarrow \quad n-3 = 4 \quad \Rightarrow \quad n = 7\,.$$

Дакле, седми члан геометријског низа чији је први члан $a = \frac{2}{9}$ и количник $q = 3$ је једнак 162.